ВОЛНОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ИОНОСФЕРЕ И КОСМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЕ

Б. Н. ГЕРШМАН, Л.М. ЕРУХИМОВ,
Ю.Я. ЯШИН

Б. Н. ГЕРШМАН
Л. М. ЕРУХИМОВ
Ю. Я. ЯШИН

ВОЛНОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ИОНОСФЕРЕ И КОСМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЕ

Москва «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
1984

22.333
Г 42
УДК 533.9

«Рекомендовано Учебно-методическим управлением по высшему образованию Минвуза СССР для использования в учебном процессе для студентов физических специальностей высших учебных заведений»

ГЕРШМАН Б. Н., ЕРУХИМОВ Л. М., ЯШИН Ю. Я. Волновые явления в ионосфере и космической плазме.— М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1984.— 392 с.

В книге с единой точки зрения рассмотрены основы волновых явлений в приземной плазме (ионосфера, магнитосфера) и в плазме космического пространства (солнечная корона, межпланетная и межзвездная среда и др.). Наряду с изложением классических вопросов кинетики, электродинамики и вопросов распространения волн в плазме большое внимание уделено приложениям геофизического и астрофизического характера, а также обсуждению методов экспериментального исследования околоземного и космического пространства.

Для специалистов, проводящих исследования в области радиофизики, астрофизики, геофизики верхней атмосферы и изучения космического пространства, а также для студентов и аспирантов физических, физико-технических и инженерно-физических специальностей вузов.

Рецензенты: Кафедра распространения радиоволн и космической связи МФТИ; доктор физико-математических наук *П. В. Блиох*

Борис Николаевич Гершман, Лев Михайлович Ерухимов, Юрий Яковлевич Яшин
ВОЛНОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ИОНОСФЕРЕ И КОСМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЕ

Редактор *Н. А. Петрунина*
Техн. редакторы *Е. В. Морозова, И. Ш. Аксельрод*
Корректор *И. Я. Кришталь*

ИБ № 11768

Сдано в набор 20.09.83. Подписано к печати 05.07.84. Т-14823. Формат 60×90$^1/_{16}$. Бумага тип. № 1. Обыкновенная гарнитура. Высокая печать. Условн. печ. л. 24,5. Усл. кр.-отт. 24,5. Уч.-изд. л. 28,66. Тираж 2900 экз. Заказ № 807. Цена 4 р. 60 к.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы
117071, Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

4-я типография издательства «Наука». 630077, Новосибирск, 77, Станиславского, 25

Г $\frac{1704020000-124}{053(02)-84}$ 88-84

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Быстрое развитие физики плазмы находит свое отражение в появлении большого количества книг по различным направлениям плазменных исследований. Среди этих книг заметное место занимают монографии и сборники, посвященные плазме в естественных условиях (приземная, межпланетная и космическая плазма). Возрастающая роль физики плазмы привела к тому, что плазменные циклы лекций стали реальностью не только при подготовке специалистов, непосредственно изучающих плазму в лабораторных условиях, но при подготовке радиофизиков, астрофизиков и геофизиков.

Несмотря на обширную литературу, ознакомление с основами современного состояния физики плазмы и ее применениями представляет определенные трудности. Вероятно, в большей степени это относится к случаю, когда в центре внимания оказываются процессы в естественной плазме. Здесь многие книги (в частности, по ионосферной плазме) содержат описание большого наблюдательного материала, а вопросы теории даются в явно «облегченном» варианте. С другой стороны, использование молодыми специалистами ряда превосходных монографий затруднено из-за сложности расчетов и обилия частных задач. Во многих монографиях часто опускаются промежуточные вычисления, восстановить которые при первоначальном знакомстве с предметом крайне сложно. К сказанному добавим, что многие разделы бурно развивающихся космической физики и физики ионосферы еще не нашли своего отражения в монографиях.

Задача предлагаемой книги состояла в том, чтобы, ознакомив читателя с последними достижениями в области теоретических и экспериментальных исследований плазмы в естественных условиях, изложить вместе с тем и вопросы, лежащие в основе теории этих явлений. Авторы стремились к тому, чтобы (за редким исключением) все приведенные формулы были выведены или могли быть выведены по указанным в книге подробным рецептам.

Настоящая книга в значительной мере основана на спецкурсах, которые были прочитаны авторами на радиофизическом факультете Горьковского государственного университета. Поэтому она в первую очередь ориентирована на помощь моло-

дым научным сотрудникам, аспирантам, а также студентам физических специальностей в изучении сложной и многообразной картины волновых явлений в приземной и космической плазме, включая методы ее исследования.

Не останавливаясь здесь подробно на содержании книги, укажем лишь на вопросы, которым в книге уделено особое внимание. Прежде всего это касается метода кинетического уравнения, как основного способа описания волновых явлений в ионизированном газе, обсуждения перехода к гидродинамическому описанию. Дан вывод и анализ выражений для компонент тензора диэлектрической проницаемости магнитоактивной плазмы и изложены основы линейной кинетической теории распространения волн в магнитоактивной плазме. Дана характеристика ряда нестабильностей плазмы. Из вопросов излучения сравнительно подробно рассмотрен случай синхротронного излучения в плазме, а из вопросов распространения — те, которые легли в основу часто используемых методов изучения ионосферы и космического пространства. Среди них представлены и вопросы рассеяния радиоволн, а также нелинейные явления. Отметим, что мы ограничились только рассмотрением нерелятивистской плазмы.

Б. Н. Гершман написал гл. 2, 4, 6 и 9, Л. М. Ерухимов — гл. 1, 7, 8, 10, 11, Ю. Я. Яшиным написаны гл. 3 и 5.

Авторы искренне признательны П. В. Блиоху, Д. С. Лукину, Л. Г. Генкину и П. И. Шпиро за многочисленные замечания, сделанные при ознакомлении с рукописью книги.

Б. Н. Гершман,
Л. М. Ерухимов,
Ю. Я. Яшин

ВВЕДЕНИЕ

В последнее десятилетие наблюдается существенное расширение исследований плазмы и возможностей ее практического использования. В лабораторных условиях одной из важнейших является проблема нагрева высокотемпературной сильноионизированной плазмы с целью осуществления в ней реакции управляемого термоядерного синтеза, в том числе с помощью мощного радио- или оптического излучения и быстрых потоков нейтральных частиц [1]. Интерес к слабоионизированной плазме определяется прежде всего созданием магнитогидродинамических (МГД) преобразователей энергии, в основу которых положен принцип использования ионизированного газа в качестве проводника, пересекающего силовые линии магнитного поля [2]. Среди других многочисленных примеров практического применения плазмы можно указать на плазменные ускорители, генераторы и газоразрядные приборы. Возникла новая область электроники — плазменная электроника, в которой одним из наиболее перспективных направлений стало использование плазменных эффектов в твердых телах с целью усиления и генерации колебаний и волн [3].

С плазмой приходится очень часто встречаться и в естественных условиях. Изучение плазмы ионосферы и космического пространства необходимо при решении ряда проблем распространения радиоволн, солнечно-земной физики, при интерпретации огромного наблюдательного материала по радиоизлучению галактических и метагалактических объектов, межзвездной среды и звездных атмосфер. В этих случаях исследователям приходится сталкиваться с множеством разнообразных задач гидродинамики и кинетики плазмы, связанных с генерацией, распространением и поглощением волн в плазме, взаимодействием волн и частиц, развитием в плазме неустойчивостей [4—14].

Например, возникновение и развитие такого крупного раздела теоретической астрофизики, как космическая электродинамика было обусловлено применением методов магнитной гидродинамики [5—7]. Магнитогидродинамический подход оказался плодотворным при изучении крупномасштабных процессов в галактической и метагалактической плазме, в солнечном ветре, представляющем собой истечение корональной плазмы в межпланет-

ное пространство, при описании взаимодействия солнечного ветра и магнитосферы Земли, а также ряда явлений в ионосфере. Вместе с тем кинетический метод описания процессов в плазме позволил существенно продвинуться в решении задач об излучении и поглощении волн, о мелкомасштабном расслоении плазмы и др.

Очень многообразны проблемы электродинамики магнитосферных явлений [9, 11]. Само объяснение формирования магнитосферы Земли при обтекании солнечным ветром геомагнитного поля приводит даже при сильной идеализации к необходимости решения сложной задачи магнитной гидродинамики. Достаточно трудными являются и задачи ионосферной физики, при решении которых кроме влияния на ионосферу солнечного ионизирующего излучения и многообразных рекомбинационных процессов необходимо учитывать эффекты электродинамического взаимодействия ионосферы и магнитосферы, а иногда и ее динамическое взаимодействие с нижними слоями атмосферы.

Волновые явления в космической плазме занимают особое место. Можно упомянуть, например, что с низкочастотными волнами в плазме связывают решение проблемы нагрева солнечной короны. Высокочастотные волновые явления определяют неравновесное излучение плазмы в радио- и более коротковолновом диапазонах электромагнитных волн.

Излучение из плазмы и ее влияние на характер распространения радиоволн лежат в основе многочисленных методов исследования ионосферы и космического пространства. Спорадическое радиоизлучение Солнца и звезд, радиоизлучение Юпитера [8] и магнитосферы Земли [9] являются одним из основных методов диагностики параметров плазмы. Эффекты поглощения и рассеяния радиоволн широко используются при изучении ионосферы и космической среды.

Физика ионосферы является одной из тех областей, где исследования различных явлений в плазме имеют определяющее значение ввиду их тесной связи с практикой распространения радиоволн. В этих исследованиях используется и наиболее обширный арсенал экспериментальных методов и средств, опирающихся на эффекты распространения радиосигналов. Следует заметить, что многие экспериментальные методы, разработанные ранее для изучения ионосферы и космической среды, в последние годы используются и для диагностики параметров лабораторной плазмы.

Если говорить о распространении в магнитосферной плазме электромагнитных волн, то здесь нужно в первую очередь упомянуть о низкочастотных волнах в диапазоне частот 1—15 кГц, который называют иногда свистовым диапазоном. Радиоизлучение на этих частотах возникает при разряде молний и может генерироваться специальными передатчиками. Важной его особенностью является возможность проникновения из ионосферы в магнитосферу, что связано с влиянием геомагнитного поля.

При определенных обстоятельствах радиоизлучение канализируется и распространяется вдоль силовых линий магнитного поля Земли. Так, например, радиоизлучение, возникшее при вспышке молнии в северном полушарии, может по «подковообразному» пути последовательно пройти через ионосферу и магнитосферу и быть принято в южном полушарии (или же после отражения вернуться в район генерации). Из-за дисперсии плазмы излучаемые молниями сигналы в виде помех после однократного или многократного прохождения через магнитосферу воспринимаются уже не как трески, а как свистящие звуки с постепенно понижающейся частотой. Эти сигналы грозового происхождения получили название свистящих атмосфериков (свистов) [12, 13, 15].

Свистящие атмосферики являются не единственными представителями принимаемых на Земле электромагнитных низкочастотных сигналов естественного происхождения, имеющих «звуковую» окраску. Если интересоваться только свистовым диапазоном, то и в нем существует несколько различных по своим спектральным свойствам излучений, получивших название ОНЧ-излучений [9, 15, 16]. Эти излучения не связаны с молниями и имеют чисто магнитосферное происхождение. На более низких частотах в магнитосфере могут возбуждаться колебания (волны) магнитогидродинамического характера, которые на наземных станциях регистрируются как пульсации геомагнитного поля [17].

Одна из интересных проблем взаимодействия волн и частиц связана с нелинейными явлениями, возникающими при воздействии на ионосферную плазму мощным коротковолновым радиоизлучением. Успешные эксперименты позволили осуществить искусственное возбуждение мелкомасштабных ионосферных неоднородностей [18, 19], генерацию низкочастотного радиоизлучения ионосферных токовых систем и др. Все это позволяет говорить о новом эффективном инструменте изучения ионосферы.

Из приведенного беглого обзора видно многообразие проблем, связанных с излучением плазмы и распространением в ней различных волн. Это относится к плазме естественного происхождения не в меньшей степени, чем к лабораторной плазме. Без овладения методами физики плазмы и активного использования ее результатов невозможно развитие исследований в области распространения радиоволн, радиоастрономии, во многих разделах астрофизики и геофизики.

ГЛАВА 1

ПАРАМЕТРЫ ИОНОСФЕРНОЙ И КОСМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЫ

Разнообразие физических процессов, протекающих в космическом пространстве, определяет существенное различие в параметрах плазмы разных космических объектов. С одной стороны, низкотемпературная частично ионизированная плазма ионосферы Земли, ионосфер планет, плазма «холодных» облаков Галактики, с другой — сильно ионизированная плазма HII областей межзвездного газа, солнечного ветра и солнечной короны, температура частиц в которых может достигать десятков тысяч — миллионов градусов, или релятивистская плазма магнитосфер нейтронных звезд, находящаяся в магнитных полях 10^{10}—10^{12} Гс.

Мы остановимся только на тех параметрах космической плазмы, которые в какой-то мере определяют протекание волновых явлений, обсуждаемых в настоящей книге, и могут быть определены с помощью этих явлений. Как будет видно из дальнейшего, такими параметрами плазмы являются: *концентрация* и *температура* заряженных и нейтральных частиц, распределение этих частиц по скоростям, а также параметры плазмы, являющиеся функциями вышеуказанных параметров, но имеющие самостоятельное значение: *частота соударений* частиц и длина их свободного пробега между соударениями, *проводимости* и *токи* в плазме, макроскопические *неоднородности* плазмы. Поскольку большинство рассматриваемых в книге вопросов относятся к волновым явлениям в ионосферной плазме, основное внимание в данной главе будет уделено обсуждению параметров ионосферы.

1.1. Структура и состав ионосферы

Ионосферой называют частично ионизированную область верхней атмосферы, расположенную на высотах от 50 до нескольких тысяч километров, где она плавно переходит в магнитосферу (п. 1.2). Верхняя граница ионосферы точно не определена. Иногда ее считают расположенной на высотах, почти на порядок меньших указанной. Чаще, однако, за граничную высоту ионосферы принимают такую высоту, на которой легкие частицы (атомы и ионы гелия и водорода) становятся основными или концентрация заряженных частиц начинает превышать концентрацию нейтральных составляющих (высоты 1000—1500 км).

Ионосфера возникает в результате воздействия ионизирующего излучения Солнца на различные газы, содержащиеся в верхней атмосфере. Отсюда ясно, что структура ионосферы определяется прежде всего составом и плотностью атмосферы на разных высотах, спектральными характеристиками солнечного волнового и корпускулярного излучений, динамикой ионосферной плазмы. Корпускулярное излучение, за исключением редких событий, связанных с хромосферными вспышками (п. 1.3), проникает на высоты ионосферы и оказывает существенное влияние на ее параметры, в основном в высоких широтах. В условиях средних и низких широт свойства ионосферы прежде всего определяются волновым излучением Солнца. Ряд особенностей имеет ионосфера, расположенная вблизи геомагнитного экватора. Поэтому ионосферу обычно разделяют на высокоширотную, несколько условно ограничивая ее геомагнитными широтами $|\Phi| \geqslant 55-60°$, среднеширотную и низкоширотную ($|\Phi| \leqslant 30°$), выделяя в особую область зону геомагнитного экватора $|\Phi| \leqslant \leqslant 5-10°$ *).

Газовый состав атмосферы. Для атмосферы, находящейся в состоянии гидростатического равновесия, когда действующая на элементарный объем газа сила тяжести $\rho_n g$ компенсируется градиентом давления, суммарная плотность $\rho_n = \sum\limits_\beta \rho_\beta$ (ρ_β — плотность газа массы m_β) и давление $P_n = \sum\limits_\beta P_\beta$ связаны уравнением

$$\partial P_n/\partial z = -g\rho_n. \tag{1.1.1}$$

Для идеального газа

$$P_n = \varkappa N_n T, \quad \rho_n = \sum_\beta m_\beta N_\beta, \quad N_n T = \sum_\beta N_\beta T_\beta$$

($\varkappa$ — постоянная Больцмана, N, T — концентрация и температура газа соответственно) и в приближении изотермической атмосферы ($T(z) = \text{const}$) закон изменения плотности атмосферы с высотой имеет вид

$$N_n = N_{n0} \exp\left[-(z - z_0)/H_n\right], \tag{1.1.2}$$

где $H_n = \varkappa T/M_n g$ — высота однородной атмосферы, $M = N_n^{-1} \sum\limits_\beta m_\beta N_\beta$, $N_n = \sum\limits_\beta N_\beta$, N_{n0} — концентрация частиц на высоте $z = z_0$ (ниже

*) Кроме геомагнитной широты, определение которой связано с расположенным в центре Земли диполем, в ионосферно-магнитосферной физике используют понятие «широты магнитного наклонения» $\Phi = \operatorname{arc}\left[(1/2)\operatorname{tg} I\right]$, где I — угол магнитного наклонения, а также систему координат H_0, L Мак-Илвейна, в которой H_0 — напряженность магнитного поля, а L — выраженное в радиусах Земли $R_З$ геоцентрическое расстояние в экваториальной плоскости до поверхности вращения силовой линии вокруг оси эффективного диполя. Место пересечения такой силовой линии с поверхностью Земли характеризуют инвариантной широтой $\Phi_и$, связанной с L соотношением $L \cos^2 \Phi_и = 1$ [1].

$z_0 = 0$). Обычные макроскопические законы, описывающие поведение газов (в том числе и (1)), применимы к атмосферным газам до тех пор, пока число столкновений молекул (атомов) друг с другом достаточно для установления между ними статистического равновесия. В случае ионосферы Земли эта граница находится примерно на высоте $z_э \simeq 1000-2000$ км, начиная с которой длина свободного пробега частицы газа между соударениями превышает «высоту однородной атмосферы» H_n. В области высот $z > z_э$, которая носит название экзосферы, частицы могут двигаться без столкновений и покидать атмосферу Земли, если их кинетическая энергия превысит потенциальную энергию в поле тяготения [2].

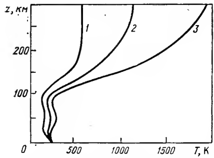

Рис. 1.1. Изменение температуры атмосферы с высотой для ночных часов в условиях низкой (1) и дневных часов средней (2) и высокой (3) активности Солнца.

В реальной атмосфере закон изменения плотности атмосферы с высотой отличен от (2), что преимущественно вызвано ростом температуры T с высотой. Степень этого роста зависит от интенсивности нагревающего атмосферу солнечного излучения, а на высоких широтах, в зоне полярных сияний, где существенным становится нагрев атмосферы токами, T зависит еще и от уровня корпускулярного излучения Солнца на орбите Земли. Поэтому параметр H_n увеличивается с высотой и является функцией широты. Высотное распределение температуры атмосферы для ночных и дневных условий среднеширотной ионосферы приведено на рис. 1.1, а на рис. 1.2 показаны характерные для средних широт зависимости концентрации N_n и высоты однородной атмосферы H_n.

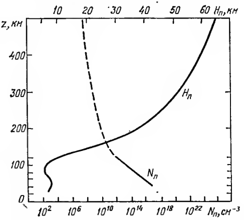

Рис. 1.2. Характерные для средних широт зависимости N_n и H_n от высоты.

На высотах, меньших 100 км, атмосфера в основном состоит из молекул азота и кислорода, но содержит также составляющие (NO, O, O_3 и др.), относительное содержание которых мало, но которые, несмотря на это, в силу своей химической активно-

сти, могут играть важную роль в процессах, определяющих концентрацию заряженных частиц в ионосфере. На указанных высотах концентрация малых составляющих в значительной мере зависит от их переноса за счет атмосферной турбулентности, а также циркулярных и волновых движений в атмосфере.

На высотах, больших 100 км, турбулентность отсутствует (уровень $z_т \approx 100$ км носит название турбопаузы) и закон (1) вплоть до высот экзосферы выполняется также для отдельных газовых составляющих атмосферы. Основными компонентами здесь являются образовавшиеся вследствие диссоциации молекул атомы азота и кислорода.

В экзосфере преобладают атомарные водород и гелий, которые попадают в нее из более низких слоев атмосферы. Соотношение между концентрациями H и He определяется температурой экзосферы. На очень больших высотах основной составляющей атмосферы является атомарный водород, который непрерывно покидает экзосферу. О высотном распределении атмосферных газов в среднеширотной ионосфере можно судить по рис. 1.3.

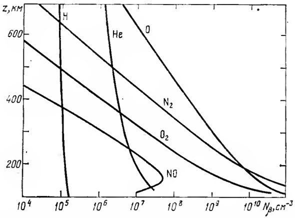

Рис. 1.3. Высотное распределение основных атмосферных газов на средних широтах [3].

Характеристики ионосферной плазмы. Изменение концентрации электронов N_e во времени определяется скоростью ионообразования q, скоростью потерь α' и дивергенцией потока электронов $N_e\mathbf{u}_e$ при их движении со скоростью $\mathbf{u}_e$:

$$\partial N_e/\partial t + \operatorname{div}(N_e\mathbf{u}_e) = q - \alpha'. \quad (1.1.3)$$

При ионизации газа (концентрации N_β с эффективным сечением ионизации $\tilde{Q}_{\beta\lambda}$) волновым излучением длины волны λ и интенсивностью I_λ скорость ионообразования, т. е. число образующихся

пар электронов и ионов в единицу времени,

$$q_{\beta\lambda} = \widetilde{Q}_{\beta\lambda} N_\beta I_\lambda, \quad q_\lambda = \sum_\beta q_{\beta\lambda}. \tag{1.1.4}$$

Интенсивность I_λ на определенной высоте z зависит от величины поглощения излучения, которое, кроме ионизации газа, нагревает атмосферу и вызывает диссоциацию ее молекул. Изменение интенсивности dI_λ в слое толщиной $ds = dz \sec\chi$ (χ — угол падения излучения на слой) равно

$$dI_\lambda = Q_\lambda I_\lambda N_n dz \sec\chi, \tag{1.1.5}$$

где Q_λ носит название эффективного сечения поглощения *). С учетом (2) из (4) и (5) следует, что

$$I_\lambda(z) = I_{\lambda\infty} \exp\{-Q_\lambda H_n N_{n0} \sec\chi \exp(-z/H_n)\}$$

($I_{\lambda\infty}$ — интенсивность излучения вне атмосферы), а изменение скорости ионообразования с высотой описывается выражением

$$q_{\beta\lambda}(z) = \widetilde{Q}_{\beta\lambda} N_{n0} I_{\lambda\infty} \exp\{-[z/H_n + \tau_\lambda \sec\chi \exp(-z/H_n)]\}, \tag{1.1.6}$$

где $\tau_\lambda = Q_\lambda H_n N_{n0}$ — оптическая толщина атмосферы для излучения длины волны λ. Величина $q_{\beta\lambda}$, очевидно, максимальна на высоте

$$z_{\max} = H_n \ln(\tau_\lambda \sec\chi), \tag{1.1.7}$$

где

$$q_{\beta\lambda}(z_{\max}) = \eta_{\beta\lambda}(I_{\lambda\infty}/H_n) \cos\chi \exp(-1) \tag{1.1.8}$$

($\eta_{\beta\lambda} = \widetilde{Q}_{\beta\lambda}/Q_\lambda$ — эффективность ионизации). С учетом (7), (8) выражение (6) можно переписать в виде

$$q_{\beta\lambda}(z, \chi) = q_{\beta\lambda}(z_{\max}, 0) \exp(1 - \sec\chi\, e^{-\zeta}) e^{-\zeta}, \qquad \zeta = [z - z_{\max}(\chi = 0)]/H_n. \tag{1.1.9}$$

Таким образом, если атмосфера состоит из одного сорта газа с постоянной высотой однородной атмосферы H_n и сечением поглощения, не зависящим от длины волны падающего на атмосферу излучения, то функция ионообразования имеет универсальный профиль, определяемый параметрами H_n и χ, который известен как слой Чепмена. При $\zeta \gg 1$ $q(z)$ пропорциональна $\exp(-\zeta)$. При $\sec\chi = 1$ и $\zeta \ll 1$ функция ионообразования

$$q(z, 0) = q(z_{\max}, 0)(1 - \zeta^2/2), \tag{1.1.10}$$

т. е. изменяется по параболическому закону при удалении от максимума слоя. Если скорость потерь электронов определяется преимущественно захватом электронов положительно заряжен-

---

*) Обычно, с учетом сферичности атмосферы, зависимость от угла падения солнечного излучения на атмосферу (зенитного угла Солнца) в (5) заменяется более точной функцией, называемой функцией Чепмена, которая для зенитных углов χ, меньших 75°, совпадает с указанной [6].

ными ионами, то в простейшем случае одного сорта ионов

$$\alpha' = \alpha N_e N_i^+ = \alpha N_e^2. \qquad (1.1.11)$$

(Здесь использовано условие квазинейтральности плазмы, согласно которому число положительно заряженных частиц в плазме должно быть равно числу отрицательно заряженных частиц.) Из (3), (7)—(11) следует, что в пренебрежении процессами переноса электронов ($\operatorname{div} N_e \mathbf{u}_e = 0$) время их жизни при $q = 0$ равно $(\alpha N_e)^{-1}$, а в равновесии, когда $q = \alpha N_e^2$, величина электронной концентрации N_e пропорциональна $\sqrt{q}$ и вблизи максимума слоя закон ее изменения по высоте близок к параболическому.

Изложенная простейшая теория, основы которой были созданы в конце двадцатых — начале тридцатых годов, позволяет понять физическую сущность процессов, приводящих к образованию ионосферы, но не может претендовать на глобальное объяснение ее структуры по следующим причинам.

1. Спектр солнечного волнового излучения не является монохроматическим, а содержит достаточную для ионизации атмосферы интенсивность в широком диапазоне длин волн от ультрафиолетовых до рентгеновских. Изменяется с высотой состав атмосферы. Поэтому высотная зависимость функции ионообразования отлична от (9). Для различных спектральных компонент солнечного излучения величина q_λ имеет максимум на разных высотах. Например, на высоты 60—100 км может проникнуть только излучение с длиной волны меньше 10 нм и больше 100 нм. При этом рентгеновское излучение с $\lambda < 10$ нм, которое особенно интенсивно во время хромосферных вспышек на Солнце [1, 6], способно ионизовать практически все компоненты атмосферного газа с образованием ионов O_2^+, O^+, N_2^+, N^+, часть из которых, являясь химически нестойкими, образуют за счет реакций с основными составляющими атмосферы новые ионы и молекулы. Мягкие агенты ионизации (ультрафиолетовое излучение в диапазоне 107,7—111,8 нм и в линии $\lambda = 121{,}6$ нм) воздействуют на малую атмосферную составляющую — окись азота (и на молекулы кислорода с возбужденными колебательными уровнями). Именно благодаря излучению с указанными значениями λ образуется максимум ионизации на высотах $z \sim 80$ км. Другим источником ионизации на высотах $z \leqslant 80$ км является жесткое рентгеновское излучение в диапазоне 0,1—0,8 нм.

На рис. 1.4 показаны высотные профили q_λ при вертикальном падении на ионосферу солнечного излучения различных длин волн, а также профили q, вызванные галактическими космическими лучами (понижение скорости ионообразования космическими лучами в годы максимальной активности Солнца связано с экранировкой этих частиц магнитными полями солнечного ветра — форбуш-эффект [16]). На высотах, больших 150—160 км, т. е. выше максимума q, обусловленного излучением в диапазоне 14—79,6 нм, скорость ионообразования убывает с ростом высоты

пропорционально концентрации N_n газа в атмосфере, т. е. по закону, близкому к (6), (9).

2. Кроме ионизации атмосферных газов волновым излучением, возможна ионизация корпускулярным излучением. Попадающие в атмосферу протоны и электроны имеют широкий спектр энергий. Наиболее энергичными являются частицы галактических космических лучей (энергии $\mathscr{E} > 10^9$ эВ). Во время протонных вспышек ионосфера облучается солнечными протонами

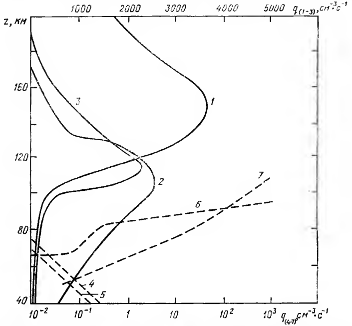

Рис. 1.4. Высотные профили скорости ионообразования q за счет фотоионизации атмосферных газов при вертикальном падении на атмосферу солнечного излучения различных длин волн (*1* — для $14 \leqslant \lambda \leqslant 79{,}6$; *2* — для $0{,}8 \leqslant \lambda \leqslant 14$; *3* — для $79{,}6 \leqslant \lambda \leqslant 102{,}7$ нм), а также за счет ионизации галактическими космическими лучами на геомагнитной широте 50° в минимуме (*4*) и максимуме (*5*) солнечной активности. Кривые *6, 7* иллюстрируют скорость ионообразования в нижних слоях ионосферы за счет фотоионизации для спокойного Солнца и увеличение q при солнечной вспышке (средней интенсивности) соответственно [1, 2].

с энергией, составляющей в среднем 10^7—10^8 эВ. Кроме того, в ионосферу могут попасть во время магнитных бурь из солнечного ветра и из магнитосферы протоны и электроны с энергией в несколько килоэлектронвольт. Галактические космические лучи в силу больших энергий частиц слабо отклоняются магнитным полем Земли и проникают вплоть до геомагнитных широт $\Phi \approx \approx 40°$. Хотя производимая этими частицами ионизация мала по сравнению с ионизацией электромагнитным излучением, на ма-

лых высотах ($\leqslant 30$ км), особенно в ночное время, она становится определяющей. Высокоэнергетичные солнечные протоны, которые проникают на высоты до 60—90 км и на широты $\Phi \geqslant 70°$, являются основным агентом, вызывающим ионизацию на указанных высотах в приполюсных областях (полярных шапках) в периоды солнечных протонных вспышек. Наконец, попадающие из солнечного ветра и ускоренные в магнитосфере (п. 1.2) электроны ответственны за ионизацию и разогрев атмосферы в зоне полярных сияний во время магнитных бурь и суббурь.

3. Скорость потерь электронов в ионосфере зависит от состава атмосферы и является функцией высоты [1, 2, 4—12].

Среди химических процессов, приводящих к гибели электронов в ионосфере, наиболее эффективными являются следующие:

рекомбинация электрона e^- с положительным молекулярным ионом M^+, сопровождающаяся диссоциацией последнего на два возбужденных нейтральных атома A_1^* и A_2^*, — диссоциативная рекомбинация:

$$e^- + M^+ \to A_1^* + A_2^*$$

(обычно $O_2^+ + e^- \to O^* + O^*$ и $NO^+ + e^- \to N^* + O^*$);

прилипание электрона к молекуле M^0 с образованием отрицательного молекулярного иона:

$$e^- + M^0 \to M^-.$$

Процесс радиативной рекомбинации, связанный с захватом электрона атомарным ионом и испусканием при этом фотона, протекает в условиях ионосферы существенно менее эффективно по сравнению с диссоциативной рекомбинацией, что связано с резким различием констант, характеризующих скорости протекания этих процессов. Для радиативной рекомбинации $\alpha' = \alpha_2 N_e^2$, где $\alpha_2 \sim 10^{-12}$ см³/с.

При диссоциативной рекомбинации

$$\alpha' = \alpha_d N_e N_M^+, \tag{1.1.12}$$

где N_M^+ — число положительно заряженных молекулярных ионов, а $\alpha_d \sim$ $\sim 10^{-7}$ см³/с. Более точные выражения для коэффициентов α_d, соответствующих основным реакциям с участием O_2^+ и NO^+, имеют вид [11]

$$\begin{aligned} \alpha_d\left(O_2^+\right) &\simeq 2{,}1 \cdot 10^{-7}\,(T/300)^{-0{,}6}, \\ \alpha_d\left(NO^+\right) &\approx 4{,}1 \cdot 10^{-7}\,(T/300)^{-1}\left(T_e/T\right)^{-0{,}5}, \end{aligned} \tag{1.1.13}$$

где T_e — температура электронов в кельвинах ($200 \leqslant T \leqslant 300$ К).

Из (12) ясно, что если относительный вклад молекулярных ионов в общее число положительных ионов мал, то в отличие от (11) коэффициент потерь в случае (12) будет пропорционален не N_e^2, а N_e. Очевидно, что такая ситуация имеет место на больших высотах, где атмосфера преимущественно состоит из атомарных составляющих. Высота, на которой выравниваются скорости потерь электронов, пропорциональные соответственно N_e^2 и N_e, носит название высоты перехода в законе рекомбинации. Ее значение колеблется в зависимости от времени суток, сезона и уровня солнечной активности и в среднем примерно составляет 170—230 км.

Процессы прилипания электронов происходят при тройных соударениях с участием двух нейтральных молекул, поэтому коэффициент прилипания β ($\alpha' = \beta N_e$) пропорционален произведению концентрации сталкиваю-

щихся частиц, в связи с чем этот процесс становится эффективным только в нижней ионосфере (высоты $z < 90$ км). Образовавшиеся в процессе прилипания отрицательные ионы рекомбинируют при столкновении с положительными ионами (ион-ионная рекомбинация) или теряют дополнительный электрон в реакциях отлипания.

В процессах прилипания к молекулам кислорода в качестве третьего тела участвуют молекулы азота или кислорода. При этом [10, 11]

$$\begin{aligned} \beta_{N_2} &\approx 10^{-31} N_{O_2} N_{N_2}, \\ \beta_{O_2} &\simeq 1{,}4 \cdot 10^{-29} (300/T) \exp(-600/T) N_{O_2}^2 \end{aligned} \tag{1.1.13a}$$

($195 \leqslant T \leqslant 600$ K). Коэффициенты β_{O_2} строго равны (13а) при $T_e = T$. Зависимость β_{O_2} от T_e характеризуется наличием максимума с $\beta_{O_2} \propto \propto 3{,}5 \cdot 10^{-30} N_{O_2}^2$ с$^{-1}$, $T_e \approx 700$К ($T = 300$ К), и его уменьшением при больших T_e. Характер зависимости $\beta_{O_2}(T_e)$ в значительной степени определяется величиной T. При $T \simeq 200$ К $\beta_{O_2}(T_e) \propto \exp(700/T_e)\, T_e^{-1}$.

Значение коэффициента ион-ионной рекомбинации обычно принимается равным $\alpha_i = 10^{-7}$ см$^{-3}$с$^{-1}$. Скорость отлипания при соударениях существенно зависит от сорта частиц, с которыми сталкиваются отрицательные ионы. Например, скорость наиболее быстрого для условий ионосферы процесса (столкновение O_2^- с возбужденными молекулами O_2^+) при $T \simeq \simeq 300$ К составляет $2 \cdot 10^{-10} N_{O_2^+} N_{O_2^-}$ см$^{-3} \cdot$с$^{-1}$. Скорость процесса ассоциативного отлипания — химического взаимодействия, приводящего к образованию электронов и новых молекул, в условиях нижней ионосферы по порядку величины равна $\gamma_a N_{O_2^-} \simeq 3 \cdot 10^{-10} N_0 N_{O_2^-}$ см$^{-3} \cdot$с$^{-1}$ (процесс $O_2^- + O \to O_3 + e$) [10]. Радиативное отлипание, которое существенно в освещенное время суток, характеризуется скоростью порядка $\gamma_r N_{M^-} \sim 0{,}3 N_{M^-}$ см$^{-3} \cdot$с$^{-1}$.

Относительная концентрация отрицательных ионов $\lambda_i = N_i^- / N_e$ в равновесном состоянии при учете рассмотренных выше простейших процессов ионизационно-рекомбинационного баланса характеризуется уравнением [10]

$$\lambda_i = \beta \{\gamma + q/(1 + \lambda_i) N_e + (\alpha_i - \alpha_d) N_e\}^{-1}, \tag{1.1.14}$$

которое легко получается из уравнений $q_\alpha = \alpha_d'$ для электронов, положительных и отрицательных ионов. Из (14) следует, что $\lambda_i \propto \beta \propto N_n^2$, т. е. существенно увеличивается с уменьшением высоты z. Величина λ_i известна недостаточно хорошо. По-видимому, $\lambda_i \approx 1$ на высотах около 50 км днем и около 60 км ночью [1].

Как было видно, скорость протекания химических процессов, влияющих на равновесные значения концентрации в ионосфере, зависит от ионного состава. Особо важное значение это обстоятельство имеет в нижней ионосфере, где в результате реакций ионов и при участии паров воды и радикалов типа OH, HO_2 образуются сложные ионы, именуемые ионами связок [10, 12]. В связи с этим скорость потерь в нижней ионосфере часто характеризуют некоторой эффективной величиной $\alpha_{эф} N_e^2$, где $\alpha_{эф}$ называют коэффициентом потерь электронов. Коэффициент $\alpha_{эф}$ зависит от высоты и существенно изменяется в периоды внезапных ионосферных возмущений (ВИВ), вызванных рентгеновским излучением солнечных вспышек, в пе-

риоды вторжений солнечных энергичных протонов вблизи полярных шапок (явление ППШ) и в возмущенные периоды в зоне полярных сияний *).

Примерные значения $\alpha_{эф}$ для различных ионосферных условий, взятые из [10], приведены в табл. 1.1. Для сравнения здесь же приведены значения $\alpha_{эф}$ во время явления ППШ в ночное время суток.

4. В уравнении (3) и аналогичном уравнении непрерывности для ионов сорта α далеко не всегда можно пренебрегать членами $\operatorname{div} N_\alpha \mathbf{u}_\alpha$, которые описывают изменение концентрации плазмы за счет ее переноса, в частности, за счет диффузии или из-за наличия в ионосфере электрического поля E.

Таблица 1.1. Значения $\alpha_{эф}$, 10^{-6} см³/с

Высота, км	День	Ночь	ППШ, день	ППШ, ночь
60	—	—	10	$(1.5-2)10^3$
70	—	8—30	4	$2\cdot10^2$
80	80	2—8	0,7	1
90	3—8	0,5—1	—	—

Поскольку концентрация плазмы изменяется преимущественно вдоль вертикальной оси z, изменение концентрации заряженных частиц за счет процессов переноса будет определяться членом $\partial(Nu_z)/\partial z$ в уравнениях непрерывности (u_z — некоторая эффективная скорость плазмы вдоль оси z). В случае диффузии, например, появление такого переноса обусловлено силами давления и гравитационного притяжения. Очевидно, что процесс переноса плазмы становится существенным, если $Nu_z/L_z > |q - \alpha'|$, где L_z — характерный масштаб изменения Nu_z. В связи с убыванием α' с высотой наиболее сильное влияние переноса плазмы на высотную зависимость ее концентрации имеет место на больших высотах и в ночные часы (когда интенсивность волнового излучения Солнца пренебрежимо мала).

Обычно для описания движений плазмы в ионосфере используют квазигидродинамические уравнения (гл. 3). Рассмотрение вопросов динамики ионосферной плазмы выходит за рамки настоящей книги (им посвящена монография [15]). Поэтому мы кратко остановимся на этом вопросе с целью иллюстрации характера влияния процессов переноса плазмы на распределения ее концентрации в ионосфере.

Предположим, что ионосфера состоит из электронов, одного сорта ионов и нейтральных частиц. Представим уравнения для скоростей электронов и ионов в виде

$$\begin{aligned} m\left\{\frac{d\mathbf{u}_e}{dt} + (\nu_{en} + \nu_{ei})\,\mathbf{u}_e\right\} &= -m\omega_H[\mathbf{u}_e\mathbf{h}] + \mathbf{F}_e, \\ M\left\{\frac{d\mathbf{u}_i}{dt} + \left(\nu_{in} + \frac{m}{M}\,\nu_{ei}\mathbf{u}_i\right)\right\} &= M\Omega_H[\mathbf{u}_i\mathbf{h}] + \mathbf{F}_i, \end{aligned} \tag{1.1.15}$$

где в пренебрежении членами, описывающими вязкость (гл. 3),

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_e &= m\mathbf{g} - N_e^{-1}\varkappa\nabla(N_eT_e) - e\mathbf{E} + m\nu_{en}\mathbf{u}_n + m\nu_{ei}\mathbf{u}_i, \\ \mathbf{F}_i &= M\mathbf{g} - N_i^{-1}\varkappa\nabla(N_iT_i) + e\mathbf{E} + M\nu_{ei}\mathbf{u}_n + m\nu_{ei}\mathbf{u}_e, \end{aligned} \tag{1.1.15a}$$

*) При вторжении солнечных протонов с $\mathscr{E} > 10$—50 МэВ в полярную ионосферу в высоких широтах наблюдаются нарушения загоризонтной коротковолновой радиосвязи, вызванные поглощением радиоволн в полярной ионосфере. Это явление получило название «поглощение в полярной шапке — ППШ».

$\mathbf{h} = \mathbf{H}_0/H_0$ — единичный вектор, характеризующий направление силовых линий магнитного поля $\mathbf{H}_0$. В (15) ν_{en}, ν_{in} и ν_{ei} — соответственно частоты соударений электронов и ионов с нейтральными частицами и электронов с ионами; $\omega_H = eH_0/mc$ — гирочастота электронов; $\Omega_H = eH_0/Mc$ — гирочастота ионов; T_e и T_i — температура электронов и ионов; $\mathbf{u}_e$, $\mathbf{u}_i$ и $\mathbf{u}_n$ — направленные скорости электронов, ионов и нейтральных частиц соответственно; $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля, которое включает в себя поляризационное (внутреннее) поле $\mathbf{E}_п$, обусловленное небольшим ($|N_e - N_i| \ll N_e$) отклонением состояния плазмы от нейтрального.

Величину $\mathbf{E}_п$ можно найти, вычитая из (3) аналогичное уравнение для ионов. Учитывая, что на масштабах, много больших радиуса Дебая r_D (гл. 2), $N_e \simeq N_i \simeq N$, то при $\sum_\alpha q_\alpha - \alpha'_\alpha = 0$ получаем

$$\operatorname{div} N(\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i) = 0. \qquad (1.1.16)$$

Если концентрация и скорости частиц изменяются только вдоль одной координаты z, то условие (16) эквивалентно условию отсутствия неоднородного вдоль оси z тока. Такая ситуация имеет место в плоскослоистой ионосфере.

Если изменение скоростей $\mathbf{u}_e$ и $\mathbf{u}_i$ во времени происходит достаточно медленно по сравнению с ν_{en}, ν_{ei} и ν_{in}, а нелинейными членами $(\mathbf{u}_\alpha \nabla)\mathbf{u}_\alpha$ в $d\mathbf{u}_\alpha/dt$ можно пренебречь, то решение (15) можно представить в виде *)

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_e &= \left(1 + b_e^2\right)^{-1} \left\{\mathbf{F}'_e - b_e\left[\mathbf{F}'_e\mathbf{h}\right] + b_e^2\left(\mathbf{F}'_e\mathbf{h}\right)\mathbf{h}\right\}, \\ \mathbf{u}_i &= \left(1 + b_i^2\right)^{-1} \left\{\mathbf{F}'_i + b_i\left[\mathbf{F}'_i\mathbf{h}\right] + b_i^2\left(\mathbf{F}'_i\mathbf{h}\right)\mathbf{h}\right\}, \end{aligned} \qquad (1.1.17)$$

где $b_e = \omega_H/\nu_e$, $\nu_e = \nu_{ei} + \nu_{en}$, $b_i = \Omega_H/\nu_{in}$ (считается, что $m\nu_e \ll M\nu_{in}$), а $\mathbf{F}'_e = \mathbf{F}_e/m\nu_e$ и $\mathbf{F}'_i = \mathbf{F}_i/M\nu_{in}$. Напряженность магнитного поля Земли на высотах ионосферы составляет примерно 0,4 Гс, $\omega_H \simeq 7\cdot 10^6$ с$^{-1}$, а $\Omega_H \sim \sim 2\cdot 10^2$ с$^{-1}$. На $z > 120$–150 км частоты соударений ν_e и ν_{in} (рис. 1.12) существенно меньше соответствующих гирочастот, т. е. величины b_e и b_i здесь велики по сравнению с единицей. При этих условиях, согласно (17), составляющие скоростей $\mathbf{u}_{e\perp}$ и $\mathbf{u}_{i\perp}$ в направлениях, ортогональных $\mathbf{h}$, много меньше их компонент вдоль $\mathbf{h}$.

Ориентируем ось y в направлении север — юг, а ось x — в направлении восток — запад. Направим вектор $\mathbf{h}$ вдоль оси z', расположенной в плоскости yz и составляющей угол I с осью y (угол I обычно называют углом наклонения). Складывая уравнения (15) с учетом вытекающего из (16) при изменении параметров среды вдоль одной координаты z соотношения $\mathbf{u}_e = \mathbf{u}_i = \mathbf{u}$, получаем

$$Nu_z \simeq -\frac{1}{M\nu_{in}}\left\{\frac{\partial}{\partial z}\left[\varkappa N\left(T_e + T_i\right)\right] + NMg\right\}\sin^2 I + \\ + N\{u_{nz}\sin^2 I + u_{ny}\cos I \sin I\} \qquad (1.1.18)$$

(здесь учтено, что $M \gg m$ и $M\nu_{in} \gg m\nu_{en}$). Кроме диффузионного переноса плазмы и ее увлечения нейтральными ветрами (в направлении силовых линий геомагнитного поля), при наличии внешнего электрического поля $\mathbf{E}_в$ в ионосфере возможен и перенос плазмы в направлении, ортогональном $\mathbf{h}$. Последнее легко видеть из (17) при $b_e > b_i \gg 1$, полагая $\mathbf{F}_e = -e\mathbf{E}_в$ и $\mathbf{F}_i = e\mathbf{E}_в$. Скорость переноса при этом

$$\mathbf{u}_{E,z} = c\left[\mathbf{E}_в\mathbf{H}_0\right]/H_0^2. \qquad (1.1.19)$$

Положим в (18) $T_e(z) = \text{const}$, $T_i(z) = \text{const}$ и учтем, что ν_{in} пропорционально N_n, а $N_n(z)$ описывается (2). Подставляя полученное выражение и

*) Эти уравнения получаются путем скалярного и векторного умножения (15) на $\mathbf{h}$ и последующего сложения полученных выражений.

(19) в (3), имеем

$$\frac{\partial N}{\partial t} - D_a\left\{\frac{\partial^2 N}{\partial z^2} + \left(\frac{1}{H_n} + \frac{1}{H_i}\right)\frac{\partial N}{\partial z} + \frac{N}{H_n H_i}\right\}\sin^2 I + \frac{c}{H_0}\frac{\partial}{\partial z}(N\,[\mathbf{E}_B\mathbf{h}])_z +$$
$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left(Nu_{n,z}\sin^2 I + Nu_{n,y}\sin I\cos I\right) = q - \alpha', \quad (1.1.20)$$

где $D_a = \varkappa(T_e + T_i)/M\nu_{in}$ — коэффициент амбиполярной диффузии изотропной плазмы, а $H_i = Mg/\varkappa(T_e + T_i)$. Из (20) следует, что при $q = \alpha'$ и равных нулю величинах u_n и u_E в равновесном состоянии изменение концентрации плазмы с высотой подчиняется экспоненциальному закону

$$N = N_0 \exp\{-z/H_i\}, \quad (1.1.21)$$

где показатель H_i при $T_e = T_i$ равен $2H_n$.

Таким образом, распределение электронной концентрации в ионосфере является не только функцией высоты, но и времени суток, сезона, широты и уровня солнечной активности.

Ионосферу принято, хотя и несколько условно, разделять на пять характерных областей: слой D, расположенный на высотах 50—90 км, слой E (90—130 км) и слой F, часто подразделяемый на слой F_1 (130—180 км) и слой F_2, нижняя граница которого расположена на $z \simeq 150$—200 км. Кроме указанных слоев в ионосфере на высотах 90—120 км часто наблюдается резко выраженный, имеющий малую протяженность по высоте (до 0,1—1 км) слой, носящий название спорадического слоя E. Его появление обычно связывают с особенностями увлечения электронов и ионов на этих высотах (область, где $\nu_{in} \sim \sim \Omega_H$, но $\nu_{en} \ll \omega_H$) ветрами нейтрального газа (17), приводящими к «сгонке» плазмы при наличии стратифицированных по высоте ветровых структур (подробнее см. [15, 18]).

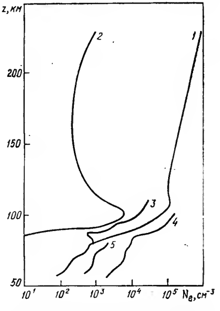

Рис. 1.5. Характерный высотный ход N_e на средних широтах (1 — день, 2 — ночь) и кривые $N_e(z)$ в нижней ионосфере в периоды хромосферных вспышек (3), протонных вспышек (4) и возмущений в зоне полярных сияний (5) (кривая 4 относится к полярной шапке).

На рис. 1.5 показан характерный высотный ход концентрации электронов на средних широтах для дневных и ночных условий. Здесь же схематически изображены характерные изменения N_e

в нижней ионосфере в возмущенные периоды (внезапные ионосферные возмущения, вызванные хромосферными вспышками, события в полярной шапке после протонных вспышек и возмущения в зоне полярных сияний). На высотах $z < 100$ км в условиях невозмущенной ионосферы изменение концентрации электронов со временем суток и с широтой определяется в среднем углом падения χ солнечного излучения на ионосферу. Сезонный ход N_e в нижней ионосфере характеризуется повышенными значениями N_e в зимние месяцы (зимняя аномалия [12]). Эту аномалию, так же как ряд других изменений N_e в D-слое ионосферы, связывают с изменениями состава атмосферы, а именно, изменением содержания ее малых компонент. Как уже указывалось, такие изменения хорошо коррелируют с вариациями параметров стратосферы ($z \sim 30$ км) и свидетельствуют о связи параметров ионосферы с циркуляцией, наблюдаемой в более низких слоях атмосферы.

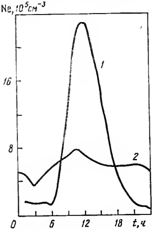

Рис. 1.6. Суточный ход N_e в максимуме среднеширотного слоя F_2: *1* — зима, *2* — лето.

На рис. 1.6 приведены зависимости N_e в максимуме среднеширотного слоя F_2 от времени суток для зимнего и летнего месяцев. На основе этих данных можно судить о порядке величины суточных и сезонных вариаций концентрации плазмы в верхней ионосфере [17]. Для $z > z_{\max}F_2$ N примерно определяется (21).

Широтный ход N_e и T_e в слое F_2 (рис. 1.7) характеризуется рядом особенностей. Основная из них — «провал» концентрации

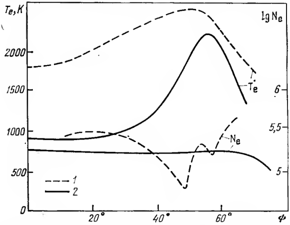

Рис. 1.7. Широтный ход концентрации электронов и их температуры: *1* — день; *2* — ночь ($z = z_mF_2$).

плазмы (иногда до двух-трех порядков величины) в переходной области широт (от средних к высоким), который носит название среднеширотного провала.

Эта особенность, подобно некоторым другим, наблюдаемым в высокоширотной ионосфере, определяется структурой магнитосферы Земли (п. 1.2) и связана с конвективными потоками газа в верхней атмосфере и электродинамическими дрейфами плазмы (19). С особенностями этого дрейфа и диффузии плазмы вблизи геомагнитного экватора связан и характер широтного распределения N_e в области низких широт [1, 5, 7]. На рис. 1.8 приведены высотные распределения температуры электронов T_e и ионов T_i в ионосфере средних и низких широт. На рис. 1.9 показаны высотные профили T_e, T_i и N для типичных условий дневной высокоширотной ионосферы. Видно, что на высоких широтах отношение T_e/T_i больше, чем на средних и низких широтах.

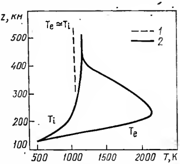

Рис. 1.8. Характерные зависимости температуры электронов T_e и температуры ионов T_i от высоты на низких широтах: 1 — ночь; 2 — день.

В условиях невозмущенной ионосферы нагрев электронов осуществляется в процессе ионизации атмосферы солнечным волновым излучением. Образовавшийся электрон приобретает кинетическую энергию, практически равную (в пренебрежении энергией, отданной более тяжелому иону) разнице энергии ионизирую-

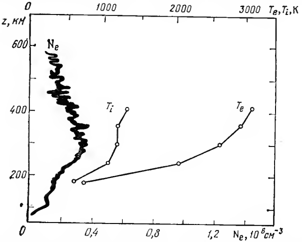

Рис. 1.9. Высотные профили N_e, T_e и T_i, характерные для высоких широт [3].

щего фотона и энергии ионизации. Эта энергия, составляющая примерно 10—20 эВ, частично передается при соударениях молекулам, атомам, ионам и менее энергичным электронам. Доля

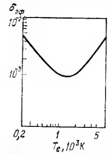

Рис. 1.10. Зависимость $\delta_{эф}$ от T_e ($z = 90$ км) [13].

передаваемой энергии $\delta_{эф}$ при упругих столкновениях, каковыми, в частности, являются столкновения электронов с ионами, равна отношению $2m/M$ (гл. 3). В случае соударений с нейтральными частицами энергия электрона расходуется в основном на возбуждение различного рода квантовых уровней молекул и атомов (возбуждение вращательных и колебательных уровней молекул, тонкоструктурные переходы). О характерных значениях $\delta_{эф}$ на высоте $z = 90$ км при разных значениях T_e можно судить по рис. 1.10 [13]. В нижних слоях ионосферы скорость передачи электронами энергии другим частицам достаточно велика, и поэтому $T_e \simeq T_i \simeq T_n$.

В верхней ионосфере (F_2-слой) энергичные электроны расходуют свою энергию при упругих столкновениях с тепловыми электронами, ионами ($\delta_{эф} \sim (2—3) \cdot 10^{-5}$) и в результате неупругих столкновений с атомами кислорода (потери на тонкоструктурные переходы). В последнем случае

$$\delta_O \simeq 2{,}9 \cdot 10^{-16}\, N_O/T_O\nu_{eO}$$

(здесь индекс O означает, что соответствующие величины относятся к атомарному кислороду). Этот процесс определяет потери энергии электронов в верхней ионосфере вплоть до высоты $z_1 \sim 220—250$ км, начиная с которой превалирует перераспределение энергии за счет упругих соударений.

В дневные часы на высотах слоя F_2 электроны не успевают отдать свою энергию тяжелым частицам, и поэтому для этих условий $T_e > T_i \geqslant \geqslant T_n$. Последнее неравенство связано с тем, что даже при $z < z_1$ нагрев ионов при соударениях с электронами происходит

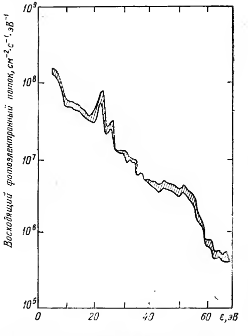

Рис. 1.11. Пример зависимости потока фотоэлектронов от их энергии [3].

более эффективно из-за того, что $N_i \ll N_n$. Образовавшиеся в результате ионизации энергичные электроны не могут полностью передать свою энергию тепловым электронам. Поэтому в среднеширотном F_2-слое в дневные часы функция распределения $f_e(v)$ электронов по скоростям (энергиям) отличается от максвелловской: наряду с тепловыми электронами существует аномально большое количество электронов с энергиями, большими 1—10 эВ, которые называют фотоэлектронами (рис. 1.11). В ночное время суток, когда ионизирующее солнечное излучение отсутствует на средних и низких широтах, функция распределения близка к максвелловской, а температура электронов мало отличается от температуры ионов.

В высокоширотном слое F температура заряженных частиц (особенно электронов) выше, чем на средних и низких широтах, что связано с проникновением в высокоширотную ионосферу энергичных электронов из магнитосферы и солнечного ветра (п. 1.2). Эти электроны, вызывая ионизацию атмосферы, образуют вторичные электроны, первоначальная энергия которых подобно фотоэлектронам составляет десятки электронвольт. Вторичные электроны теряют свою энергию при взаимодействии с атомами кислорода, ионами и низкоэнергичными электронами.

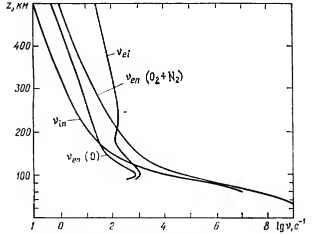

Рис. 1.12. Зависимость частоты соударений электронов ν_{en}, ν_{ei} и ионов ν_{in} от высоты z.

Другим источником нагрева ионосферной плазмы являются электрические поля и связанные с ними токи (джоулевый нагрев).

Существенную роль в пространственном распределении температуры заряженных частиц в верхней ионосфере играют процессы переноса: теплопроводность вдоль силовых линий геомагнитного поля (гл. 3), а также дрейф плазмы, вызванный электрическими полями.

Одним из важных ионосферных параметров, влияющих как на динамические процессы в ионосфере, так и на распространяющиеся в ней волны, является частота соударений электронов ν_e. Рис. 1.12 иллюстрирует примерную зависимость ν_e от высоты для условий дневной и ночной среднеширотной ионосферы. Здесь же показана соответствующая зависимость ν_{in}.

Оценки частот соударений ν_{ei} для различных N и T_e можно легко провести, используя формулу (2.2.35). Приближенные выражения для ν_{en} имеют вид [14]

$$\begin{aligned} &\nu_{eN_2} \simeq 2{,}5\cdot 10^{-11} N_{N_2} T_e \left(1 + 9{,}3\cdot 10^{-3}\sqrt{T_e}\right), \\ &\nu_{eO_2} \simeq 1{,}5\cdot 10^{-10} N_{O_2}\sqrt{T_e}\left(1 + 4{,}2\cdot 10^{-2}\sqrt{T_e}\right), \\ &\nu_{eO} \simeq 2{,}8\cdot 10^{-10} N_{O}\sqrt{T_e}, \\ &\nu_{eH} = 4{,}6\cdot 10^{-10} N_{H}\sqrt{T_e}, \\ &\nu_{eHe} = 4{,}7\cdot 10^{-10} N_{He}\sqrt{T_e}. \end{aligned} \tag{1.1.22}$$

С высотным распределением ν_e и ν_i тесно связана и зависимость от z проводимости ионосферы. Как уже указывалось, токи в ионосфере вызваны либо наличием электрических полей, либо различным увлечением ионов и более легких электронов нейтральными частицами при их ветровых движениях. Из (15), (15а) и (17) видно, что при переходе в систему координат, где нейтральный газ покоится, в (15) и (17) появляется член, который описывает движение плазмы в эффективном поле $\mathbf{E}_d = -c^{-1}[\mathbf{u}_n\mathbf{H}]$, называемом динамополем. В ионосфере $\mathbf{E}_d$ преимущественно направлено в северо-южном направлении [5]. Оставим в (17) только члены, пропорциональные $\mathbf{E} = \mathbf{E}_в + \mathbf{E}_п + \mathbf{E}_d$, и вычислим плотность тока $\mathbf{j} = eN(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e)$. Тогда для $E = E(E_{x'}, E_{z'})$ имеем $j_{z'} = \sigma_\parallel E_{z'}$, $j_y = \sigma_H E_{x'}$ и $j_{x'} = \sigma_\perp E_{x'}$, где $\sigma_\parallel$, σ_H и $\sigma_\perp$ носят название продольной, холловской и педерсеновской проводимостей и определяются (2.3.81). В более общем случае $j_i = \sigma_{ij}E_j$, где тензор σ_{ij} в часто употребляемых в геофизической литературе для σ_0, σ_1 и σ_2 обозначениях ($\sigma_\parallel$, $\sigma_\perp$ и σ_H соответственно) имеет вид

$$\sigma_{ij} = \begin{pmatrix} \sigma_1\sin^2 I + \sigma_0\cos^2 I & \sigma_2\sin I & (\sigma_0 - \sigma_1)\sin(2I)/2 \\ -\sigma_2\sin I & \sigma_2 & \sigma_2\cos I \\ (\sigma_0 - \sigma_1)\sin(2I)/2 & -\sigma_2\cos I & \sigma_1\cos^2 I + \sigma_0\sin^2 I \end{pmatrix}. \tag{1.1.23}$$

Учтем условие (16), запрещающее в неоднородной в вертикальном направлении ионосфере токи вдоль оси z. Тогда

$$\begin{aligned} &j_x = \sigma_{xx}E_x + \sigma_{xy}E_y, \quad j_y = -\sigma_{xy}E_y + \sigma_{yy}E_y, \\ &\sigma_{xx} = \sigma_1\sigma_0/\left(\sigma_0\sin^2 I + \sigma_1\cos^2 I\right), \\ &\sigma_{yy} = \left(\sigma_0\sigma_1\sin^2 I + \sigma_1\sigma_3\cos^2 I\right)/\left(\sigma_0\sin^2 I + \sigma_1\cos^2 I\right), \\ &\sigma_{xy} = \sigma_2\sigma_0\sin I/\left(\sigma_1\cos^2 I + \sigma_0\sin^2 I\right), \\ &\sigma_3 = \sigma_1 + \sigma_2^2/\sigma_1. \end{aligned} \tag{1.1.24}$$

Из (24) можно видеть, что вблизи геомагнитного экватора ($\operatorname{tg} I \ll \sigma_1/\sigma_0$)

$$j_y = \left(\sigma_1 + \sigma_2^2/\sigma_1\right)E_y \simeq \left(\sigma_2^2/\sigma_1\right)E_y. \tag{1.1.25}$$

Последнее равенство выполняется на высотах $z \geqslant z_d \approx 100$ км, где $\sigma_2 \gg \sigma_1$. Плотность тока имеет ярко выраженный максимум вблизи высоты z_d (эк-

ваториальная токовая струя). Интенсивные токи в высоких широтах связаны с полями магнитосферного происхождения (п. 1.2).

Ионосферные неоднородности. Выше мы рассматривали достаточно крупномасштабные квазирегулярные распределения плазмы в ионосфере. Ионосфера характеризуется, однако, развитой хаотической неоднородной структурой, имеющей масштабы от сотен километров до десятков и единиц метров. Эти неоднородности могут быть связаны как с турбулентной структурой атмосферы на ионосферных высотах, так и с многочисленными неустойчивостями ионосферной плазмы (гл. 6).

На малых высотах в ионосфере, на которых $\nu_e \gg \omega_H$, плазма полностью увлекается нейтральным газом при его движении. Вместе с тем, в силу больших значений ν_{en} и ν_{in} и малой концентрации плазмы по сравнению с концентрацией нейтрального газа, развитие неустойчивостей плазменного типа (гл. 6) здесь затруднено. Поэтому плазма в нижней ионосфере ($z < 70$ км) является пассивной примесью. Турбулентные движения в плазме определяются характером атмосферной турбулентности, а степень неоднородности концентрации в основном зависит от величины турбулентных скоростей $\widetilde{\mathbf{u}}$* и от высотного градиента концентрации плазмы. Образование флуктуаций $\widetilde{N}$ концентрации в этом случае описывается членом $(\widetilde{\mathbf{u}}_\alpha \nabla)\langle N_\alpha\rangle$ уравнения (3)*).

На больших высотах, где $\nu_e \ll \omega_H$ и $\nu_{in} \ll \Omega_H$, плазма может увлекаться нейтральным газом только в направлении силовых линий геомагнитного поля (см. (17), (18)). Кроме того, выше 100 км (выше турбопаузы) затруднена, в силу большой молекулярной вязкости, атмосферная турбулентность. Поэтому в верхней ионосфере, во всяком случае, в области масштабов, меньших 50—100 км, неоднородная структура (за исключением случаев, когда неоднородности плазмы являются «отпечатком» атмосферных акустико-гравитационных волн — АГВ [18]) обусловлена чисто плазменными процессами [19—21]. В этом случае принято говорить о турбулентности ионосферной плазмы.

Неоднородную структуру ионосферной плазмы принято характеризовать спектральной плотностью флуктуаций концентрации $\Phi_N(\varkappa)$ в интервале волновых чисел $\varkappa, \varkappa + d\varkappa$ $\left(\int\limits_{\varkappa_1}^{\varkappa_2} \Phi_N(\varkappa)\, d\varkappa = \langle \widetilde{N}^2\rangle\right.$ — средний квадрат флуктуаций концентрации в интервале $\left.\{\varkappa_1, \varkappa_2\}\right)$. Проекцию волнового числа на определенные направления часто характеризуют масштабом неоднородности $l_j = 2\pi/\varkappa_j$, $j = x, y, z$. Часто Φ_N представляют в модельном виде:

$$\Phi_N(\varkappa) = c_0 \frac{\exp\left\{-\sum \varkappa_j^2/\varkappa_{mj}^2\right\}}{\left(1 + \sum \varkappa_j^2/\varkappa_{0j}^2\right)^{p/2}}, \tag{1.1.26}$$

где c_0 — числовой коэффициент, определяемый из условий нормировки, $\varkappa_0$ характеризует внешний масштаб неоднородной структуры, а $\varkappa_m$ — внутренний масштаб, определяемый процессами диссипации (в том числе вязкостью среды). В интервале волновых чисел $\varkappa_0 \ll \varkappa \ll \varkappa_m$

$$\Phi_N(\varkappa) = c_0 \left(\sum_j \varkappa_j^2/\varkappa_{0j}^2\right)^{-p/2} \exp\left\{-\sum \varkappa_j^2/\varkappa_{mj}^2\right\}. \tag{1.1.27}$$

Область $\varkappa_j \ll \varkappa_{mj}$, когда в (27) можно пренебречь экспоненциальным членом, носит название инерционного интервала. Представление (26) является приближенным и лишь весьма ориентировочно может описать поведение

---

*) Если $\mathbf{u}_\alpha = \widetilde{\mathbf{u}}_\alpha$, $N_\alpha = \langle N_\alpha\rangle + \widetilde{N}$, где $\langle N_\alpha\rangle$ — среднее значение N_α, то при $q = \alpha' = 0$ уравнение (3) для частиц сорта α примет вид

$$\frac{\partial \widetilde{N}_\alpha}{\partial t} + \left(\widetilde{\mathbf{u}}_\alpha \nabla\right)\langle N_\alpha\rangle + \langle N_\alpha\rangle \operatorname{div} \widetilde{\mathbf{u}}_\alpha + \operatorname{div} \widetilde{N}_\alpha \widetilde{\mathbf{u}}_\alpha = 0. \tag{1.1.3a}$$

неоднородностей ионосферы в области малых волновых чисел. Однако именно при малых $\varkappa$ трехмерная форма спектра флуктуаций плазмы в ионосфере известна недостаточно хорошо. Тем не менее можно считать установленным, что на высотах $z \lesssim 100$ км, во всяком случае в области $\varkappa H_n \lesssim 1$, турбулентность атмосферы резко анизотропна, будучи вытянутой в горизонтальной плоскости. В области больших волновых чисел (масштабов $l \lesssim 600$ м) на $z < 90$ км турбулентность, по-видимому, изотропна и $\Phi_N(\varkappa)$ описывается хорошо (27) с $p \simeq 11/3$ при $\varkappa_{0x} = \varkappa_{0y} = \varkappa_{0z}$ и $\varkappa_{mx} = \varkappa_{my} = \varkappa_{mz}$, где l_m уменьшается с уменьшением z и по порядку величины на $z \sim 70$—90 км составляет 10—30 м [23].

В F-слое ионосферы в области масштабов $l \lesssim 5$—20 км неоднородности плазмы сильно вытянуты вдоль силовых линий геомагнитного поля. Ввиду этого в экспериментах по исследованию $\Phi_N(\varkappa)$, в которых в силу своей специфики можно измерять либо одномерную (например, $\Phi_N(\varkappa_y) = \int \Phi_N(\varkappa)\, d\varkappa_x d\varkappa_z$), либо двумерную (проинтегрированную по одной из величин $\varkappa_j$) форму спектра, как правило, в области малых масштабов определяют форму спектра в направлении, ортогональном $\mathbf{h}$ (гл. 11).

Характерный вид одномерной спектральной плотности $\Phi_N(\varkappa_y)$ в F-слое (см. [22]) приведен на рис. 1.13. Можно видеть, что в инерционном интервале показатель p_1 одномерного спектра примерно равен 1,5—2, а в области малых $\varkappa$ спектральная плотность $\Phi_N(\varkappa_y)$ близка по форме к (26). Однако

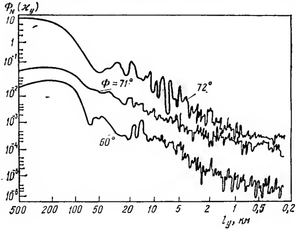

Рис. 1.13. Характерный вид спектральной плотности $\Phi_N(\varkappa_y)$ на разных широтах в F-слое ионосферы ($l_y = 2\pi/\varkappa_y$).

на рис. 1.13 хорошо виден и излом спектра в области $l \sim 5$—20 км, который обнаруживался уже в ранних исследованиях спектральных характеристик неоднородностей верхней ионосферы [25].

О величине внутреннего масштаба $l_{m\perp}$ в плоскости, ортогональной $\mathbf{h}$, можно сказать следующее. В условиях развитой турбулентности ионосферной плазмы этот масштаб составляет всего несколько метров [19, 24]. Вместе с тем иногда в условиях спокойного среднеширотного F-слоя он может достигать 1—2 км [25]. Характерный внутренний масштаб l_{mh} турбулентности плазмы F-слоя вдоль направления силовых линий геомагнитного поля, по-видимому, существенно превышает $l_{m\perp}$. Во всяком случае в условиях высокоширотного F-слоя (в зоне полярных сияний) в области масштабов $0{,}1 < l_\perp < 1$ км $\Phi_N(\varkappa)$ может быть в первом приближении

представлена в виде

$$\Phi_N(\varkappa) \propto \varkappa_\perp^{-p} \exp\{-\varkappa_h^2 l_{mh}^2/4\}, \qquad (1.1.28)$$

где $p \simeq 2{,}5$—$2{,}7$, а $l_{mh} \simeq 5$—15 км, т. е. в области указанных масштабов турбулентность носит ярко выраженный двумерный характер ([19, 26], гл. 11).

Ионосферные неоднородности наблюдаются вплоть до высот $z \gtrsim 1000$ км [24, 26, 27], хотя масштабы l_{mh} и $l_{m\perp}$, по-видимому, увеличиваются с ростом высоты [25].

Мелкомасштабные ($l_\perp \lesssim 10$ км) неоднородности (МН) плазмы верхней ионосферы имеют явно выраженную зависимость от широты и времени суток. В дневные часы МН почти не наблюдаются на экваториальных широтах. На средних широтах их интенсивность возрастает, но наиболее интенсивны они в высокоширотной ионосфере *). В ночное время суток имеется две наиболее ярко выраженные зоны интенсивных МН: одна из них расположена в районе геомагнитного экватора, другая — в зоне полярных сияний. В этих зонах величины δN достигают значений единиц и десятков процентов. В зоне сияний наблюдаются неоднородности с $l \sim 10$ км с относительными вариациями концентрации, большими 100% [1]. Регистрируется также в ночные часы повышенный уровень МН вблизи среднеширотного провала концентрации [19]. На средних широтах величина δN в F-слое в среднем составляет $(1$—$3) \cdot 10^{-3}$ [25]. Переход от средних к высоким широтам характеризуется часто резким (иногда в широтном интервале $\sim 2°$) возрастанием уровня МН. Последнее видно из рис. 1.14, на котором схематически (в координатах геомагнитная широта — время суток) изображено положение зоны высокоширотных интенсивных МН, а также зон появления некоторых других особенностей ионосферы высоких широт. В периоды геомагнитных возмущений — бурь и суббурь (п. 1.2, [16, 28—30]) — зона интенсивных МН расширяется, охватывая иногда геомагнитные широты $\Phi \sim 40$—$50°$. В зоне сияний интенсивные МН наблюдаются от высот 100 до нескольких тысяч километров (более подробно о высотном распределении МН на разных широтах см. в [19]). Указанная зона является источником распространяющихся к низким широтам крупномасштабных ($l \gtrsim 100$ км) волновых возмущений в верхней ионосфере [31], которые в периоды суббурь могут иметь вид уединенных нелинейных волн — солитонов [32]. В верхней ионосфере МН перемещаются вместе с «фоновой» плазмой. Их скорости в плоскости, ортогональной $\mathbf{h}$, определяются дрейфом в скрещенных электрическом и магнитном полях [19]. На средних широтах u_E по порядку величины равна 50—100 м/с, увеличиваясь до 300—500 м/с в периоды геомагнитных возмущений. В зоне сияний величина u_E может

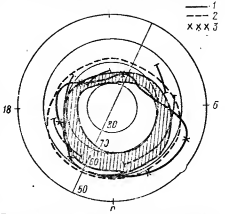

Рис. 1.14. Схематическое изображение в координатах: геомагнитная широта — время суток: положение зоны интенсивных мелкомасштабных неоднородностей (1), зоны полярных сияний (штриховка), границы мерцаний (2), границы электростатической турбулентности (3).

*) Интенсивность ионосферных МН часто характеризуют величиной

$$(\delta N)^2 = \langle \tilde{N}^2 \rangle / \langle N \rangle^2 \Big|_{l_\perp \simeq 1\,\text{км}}.$$

составлять 1—5 км/с. На геомагнитном экваторе имеется существенная вертикальная составляющая скорости u_E.

Со скоростью u_E связано одно из интересных явлений, регулярно наблюдаемых вблизи геомагнитного экватора. Как следует из (16) и (17), неоднородности концентрации во внешнем электрическом поле могут поляризоваться. При этом возникающее поляризационное поле имеет максимальную величину $E_п \simeq -\tilde{N}E_в/\langle N\rangle$ и при $\tilde{N} < 0$ направлено в ту же сторону, что и поле $E_в$ *). В результате крупные «обедненные» плазмой неоднородности с $|\tilde{N}| \sim \langle N\rangle$ будут двигаться с существенно большей скоростью u_E (см. (19)), чем окружающая плазма. Это обстоятельство приводит к тому, что на геомагнитном экваторе при направленной вдоль оси z скорости u_E такие неоднородности, которые часто именуют «пузырями», будут всплывать вверх, причем их скорость может достигать 100—300 м/с. Поскольку указанные образования обычно содержат развитую мелкомасштабную турбулентность, с этим явлением связывают, в частности, появление на больших высотах ионосферы в экваториальной зоне МН [19, 24].

К особому классу явлений относится наблюдаемая на высотах $z \simeq \simeq 100$ км в районах экваториальной токовой струи и токовых струй в зоне сияний развитая мелкомасштабная (до $l_\perp \simeq 1$—3 м) турбулентность, которая обычно связывается с разновидностями токовой неустойчивости в ионосфере ([20, 21] и гл. 6). Такие неоднородности ответственны, в частности, за ракурсное рассеяние радиоволн в высокоширотной ионосфере (радиоотражения от полярных сияний).

Неоднородная структура ионосферной плазмы может возбуждаться искусственно при различного рода воздействиях на ионосферу (включая инжекцию химически активных веществ). Об одном виде такого воздействия — возмущении ионосферы мощными пучками радиоволн — пойдет речь в гл. 10 и 11.

1.2. Магнитосферная плазма и солнечный ветер

Магнитосфера Земли является самой внешней и самой протяженной оболочкой Земли, свойства которой определяются взаимодействием геомагнитного поля с обтекающими Землю потоками солнечной плазмы — солнечным ветром. Плазма солнечного ветра (СВ) состоит преимущественно из электронов и протонов, кинетические температуры которых достаточно высоки: температура электронов в СВ составляет 10^5 К, а температура протонов $T_i \approx 4 \cdot 10^4$ К. Концентрация плазмы СВ убывает примерно пропорционально квадрату расстояния от Солнца и вблизи орбиты Земли составляет 5—10 см$^{-3}$. При таких параметрах плазмы СВ частота столкновений $\nu_{ei} \sim 5 \cdot 10^{-6}$ с$^{-1}$, а длина свободного пробега электронов $2 \cdot 10^{13}$ см, т. е. приблизительно равна расстоянию от Земли до Солнца ($R_\odot = 1{,}5 \cdot 10^{13}$ см $= 1$ а. е.). Радиус Дебая в СВ колеблется от нескольких метров (около Солнца) до 10—20 м (у орбиты Земли). Ветер истекает из Солнца примерно в радиальном направлении, но, так как Солнце совершает вращение вокруг своей оси с периодом 27 суток, испускаемые Солнцем частицы распределяются по спирали. Скорость солнечного

*) Аналогичный эффект связан с током, возникающим из-за силы тяжести (17). Подробно вопросы движения неоднородностей в скрещенных электрическом и магнитном полях изложены в [15, 33, 34]. С вопросами движения в атмосфере на ионосферных высотах можно познакомиться в [35], с волновыми возмущениями в ионосфере — в [36].

ветра вблизи Земли обычно составляет $u_{св} \approx 300-400$ км/с, однако иногда она увеличивается до 700—800 км/с (высокоскоростные потоки). Плотность энергии СВ для таких $u_{св}$ по порядку величины равна $W_{св} \approx NMu_{св}^2/2 \sim 10^{-7}-10^{-8}$ эрг/см³. Эта величина в 50 раз больше плотности кинетической энергии электронов, в 120 раз больше плотности кинетической энергии протонов и в 70 раз превышает плотность $W_н$ магнитной энергии СВ. Магнитное поле СВ в силу большой проводимости плазмы и условия $W_н = H^2/8\pi \ll W_{св}$ является вмороженным в плазму, переносится вместе с ней и вследствие этого имеет тождественную СВ спиральную структуру. Вблизи орбиты Земли напряженность магнитного поля СВ примерно равна $5 \cdot 10^{-5}$ Гс. Движение в СВ является сверхзвуковым. На расстояниях от Солнца $R \sim 1$ а. е. число Маха $M_c = u_{св}/c_s \geqslant 10$, $c_s \approx \approx \sqrt{\varkappa(T_e+T_i)/M}$. Альвеновская скорость $v_A = H/\sqrt{4\pi MN}$ в СВ также меньше $u_{св}$. Альвеновское число Маха $M_A = u_{св}/v_A \geqslant 6$.

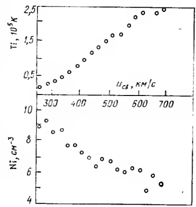

Рис. 1.15. Характерные зависимости температуры и концентрации ионов от скорости солнечного ветра [16].

Кинетические температуры частиц в СВ имеют заметную анизотропию: для протонов температура вдоль направления $\mathbf{u}_{св}$ примерно в два раза превышает значение их температуры в плоскости, ортогональной $\mathbf{u}_{св}$. Для электронов такое превышение составляет около 10%.

Параметры плазмы солнечного ветра зависят от его скорости. Последнее можно видеть из рис. 1.15, на котором показаны характерные зависимости T_i и N_i от $u_{св}$ на $R = 1$ а. е. Температура T_e в значительно меньшей степени зависит от $u_{св}$, чем T_i. Поэтому отношение T_e/T_i в спокойном СВ больше ($2 \leqslant T_e/T_i \leqslant 10$), чем в скоростных потоках. Когда сверхзвуковая плазма СВ «сталкивается» при своем движении с магнитным полем Земли, образуется ударная волна, которая носит название *головной* (*изогнутой*) *ударной волны* (рис. 1.16). Расстояние до фронта ударной волны составляет 10—20 R_E (обычно около 14 R_E). Фронт ударной волны представляет собой внешнюю границу *переходной области*. Здесь скорость СВ из сверхальвеновской и сверхзвуковой уменьшается до значений, близких к альвеновской и звуковой. Переходная область характеризуется развитой «турбулентной» структурой. Переходная область граничит с *магнитопаузой* — внешней границей магнитосферы Земли. На границе магнитосферы давление СВ примерно равно давлению геомагнит-

пого поля, измененного присутствием плазмы СВ. Если пренебречь влиянием межпланетного магнитного поля, переносимого СВ, то расстояние до границы магнитосферы (магнитопаузы) можно оценить следующим образом.

Движение солнечной плазмы в неоднородном геомагнитном поле приводит вследствие градиентного дрейфа (1.2.7) к образованию тока, протекающего с утренней стороны на вечернюю.

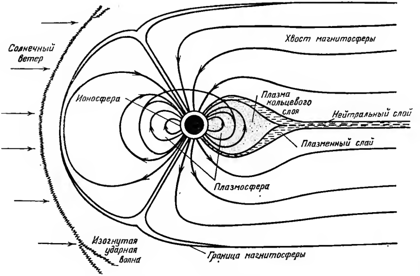

Рис. 1.16. Структура магнитосферы Земли.

Этот ток вызывает магнитное поле $\mathbf{H}'$, которое усиливает геомагнитное поле во внутренних областях магнитосферы и уменьшает его до нуля в магнитопаузе. Величину H' нетрудно оценить из (1.2.7) и (2.1.23)

$$H' \sim \sqrt{2\pi M N u^2_{\text{св}\perp}},$$

где $u_{\text{св}\perp}$ — ортогональная $\mathbf{H}$ компонента скорости СВ. Учитывая, что на границе магнитосферы H' примерно равно $H(z) = H(R_E)R_E^3/(R+R_E)^3 (H(R_E)$ — поле на поверхности Земли), получаем, что расстояние до магнитопаузы на дневной стороне Земли вблизи «лобовой» точки

$$R_{\text{мп}} \infty (H^2(R_E)/2\pi M N u^2_{\text{св}\perp})^{1/6} R_E.$$

Это расстояние примерно составляет 10 R_E. Севернее и южнее «лобовой» точки силовые линии $\mathbf{H}$ могут увлекаться плазмой СВ. Поэтому граница магнитосферы здесь начинает вытягиваться к ночной стороне. В отличие от ситуации на «солнечной» стороне магнитосферы *область замкнутых силовых линий* на ее ночной

стороне занимает лишь небольшой участок по сравнению *с областью разомкнутых силовых линий*, в которой эти линии не возвращаются на Землю. Эта область часто носит название *магнитного хвоста*. Хвост разделен на две части *нейтральным слоем* (токовым слоем с аномально малым значением H внутри слоя и обращением знака $\mathbf{H}$ на его границах), примерно расположенным в экваториальной плоскости. Протяженность магнитного хвоста трудно определить ввиду того, что он постепенно соединяется с магнитным полем СВ. Однако он еще существует на расстояниях до $1000\ R_E$, хотя при таком удалении от Земли хвост уже состоит из многочисленных переменных волокон, содержащих каждое свои собственные нейтральные слои. Толщина хвоста на расстоянии $20\,R_E \approx 40\,R_E$ в направлении север — юг и $50\ R_E$ — в направлении восток — запад. Эта оценка толщины хвоста получается из баланса давлений в хвосте, если считать, что давление геомагнитного поля равно $H^2_{\text{св}}/8\pi + N_{\text{св}}\varkappa\,(T_e + T_i)_{\text{св}}$.

Примечательными в геомагнитной карте магнитосферы являются *полярные каспы* — области, содержащие пучок разомкнутых силовых линий, расположенные на дневной стороне при угловом удалении от геомагнитных полюсов на 10—16°. Через дневные каспы «горячая» плазма солнечного ветра может беспрепятственно проникать в ионосферу на геомагнитные широты $\Phi \sim 75$—$80°$, вызывая нагрев высокоширотной ионосферы.

Если области магнитосферы классифицировать в соответствии со свойствами заполняющей ее плазмы, то обычно выделяют следующие из них: *плазмосферу*, которая расположена непосредственно над ионосферой в области замкнутых силовых линий и ограничена снаружи *плазмопаузой*, *область кольцевого тока* и *плазменный слой*. Расстояние до плазмопаузы в среднем составляет около $4\,R_E$. Плазменный слой на ночной стороне Земли начинается с $R \geqslant 5\,R_E$, имеет толщину около $10\,R_E$ и тянется вдоль хвоста, заключая в себя нейтральный слой (его толщина здесь около $10\,R_E$). На утренней и вечерней сторонах плазменный слой соединяется с зонами полярных сияний. Плазменный слой представляет собой основной резервуар частиц, инжектируемых в ионосферу в периоды возмущений (явление суббурь). Вне плазменного слоя находится плазма полярных областей и хвоста. Кольцевой ток расположен на расстояниях $(4$—$7)\,R_E$ и связан преимущественно с заполнением во время магнитных бурь области, примыкающей к плазмопаузе, потоками электронов (несколько кэВ), плотность энергии которых сравнима с плотностью энергии геомагнитного поля на этих высотах.

Основная концентрация «холодной» плазмы ($T_e \approx 10^3 - 10^4$ К) сосредоточена в плазмосфере и плавно убывает от значения 10^4 см$^{-3}$ на границе ионосферы до $N \simeq 100$ см$^{-3}$ на границе с плазмопаузой, где имеет место резкое уменьшение концентрации до $N \sim 1$ см$^{-3}$. Потоки низкотемпературной плазмы могут иметь место в высокоширотной области хвоста магнитосферы, где не существует особых препятствий утечке газа из верхних слоев

ионосферы. Такой ускоренный поток тепловых частиц носит название полярного ветра.

В остальных частях магнитосферы плазма более энергична. В плазменном слое хвоста электроны и ионы, концентрация которых составляет 0,5 см$^{-3}$, обладают энергией, соответственно равной 0,6 и 5 кэВ ($T_e = 7 \cdot 10^6$ К, $T_i = 6 \cdot 10^7$ К). Вне плазменного слоя в хвосте $N < 0{,}1$ см$^{-1}$, при этом $T_e < 10^6$ К, а $T_i < 10^7$ К. В дневных каспах параметры плазмы примерно соответствуют ее параметрам в переходном слое, что свидетельствует о доступе частиц солнечного ветра в эти области. Направленный поток протонов в каспах составляет по порядку величины $2 \cdot 10^7$ см$^{-2} \cdot$ $\cdot$ с$^{-1} \cdot$ ср$^{-1}$ при средней энергии $\mathscr{E} \sim 0{,}3$ кэВ на расстоянии $7\,R_E$.

Энергичная компонента заряженных частиц имеется, конечно, и в областях плазмосферы и кольцевого тока. Эти области, которые ранее делили на внутренний ($R \sim 1{,}5\,R_E$) и внешний ($R \sim 3{,}5\,R_E$) радиационный пояса, содержат энергичные протоны, альфа-частицы, а также в малом количестве и тяжелые ядра. Наиболее высокоэнергичные протоны (с энергией до 10^3 МэВ) регистрируются вблизи Земли на $R \sim 1{,}3$—$3\,R_E$ высотах внутреннего радиационного пояса и достаточно стабильны во времени. Поток J для $\mathscr{E} \sim 100$ МэВ составляет 10^6 см$^{-2} \cdot$ с$^{-1}$. Протоны с энергиями от нескольких сотен эВ до сотен кэВ заполняют области магнитосферы до 5—$10\,R_E$, причем в более удаленных областях магнитосферы в энергетическом спектре протонов преобладают менее энергичные частицы. На $R \sim 5\,R_E$ $J(\mathscr{E}_i \sim 1$ кэВ$) \approx$ $\approx 5 \cdot 10^5$ см$^{-2} \cdot$ с$^{-1} \cdot$ ср$^{-1}$. Аналогичным образом ведут себя и энергичные электроны: наиболее энергичные электроны с $\mathscr{E} > 5$ МэВ расположены преимущественно на высотах внутреннего пояса (основная их часть, подобно высокоэнергичным протонам, по-видимому, связана с распадом альбедо нейтронов). Однако высотное распределение электронов меньших энергий ($\mathscr{E} \sim 2$ МэВ) уже близко к тому, которое группами Вернова в СССР и Ван Аллена в США, впервые открывшими и исследовавшими радиационные пояса, первоначально рассматривалось как внешний радиационный пояс. Поток электронов во внешнем поясе отличается от потоков высокоэнергичных протонов достаточно сильной зависимостью их интенсивности от уровня возмущенности магнитосферы. В среднем для $\mathscr{E} > 0{,}5$ МэВ на $R \sim (2$—$3)\,R_E$ $J \sim 10^8$ см$^{-2} \cdot$с$^{-1}$. Электроны с энергией меньше 40 кэВ заполняют области магнитосферы до $R \sim 10\,R_E$.

Характер движения частиц в магнитосфере. При $\nu_e = \nu_i = 0$ движение частицы в нерелятивистском ($v/c \ll 1$) приближении описывается уравнением

$$m_\alpha \frac{d\mathbf{v}_\alpha}{dt} = \frac{e_\alpha}{c}\,[\mathbf{v}_\alpha \mathbf{H}] + \mathbf{F}_\alpha, \tag{1.2.1}$$

где $\mathbf{F}_\alpha$ — суммарная сила, действующая на частицу, а $\mathbf{H} = \mathbf{H}(\mathbf{r})$. Как известно, в однородном магнитном поле $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0$ и при $\mathbf{F}_\alpha = 0$ частица совершает периодическое ларморовское движение с частотой $\omega_{\alpha H} = e_\alpha H / m_\alpha c$ и

гирорадиусом $r_{\alpha H} = v_{\alpha\perp}/\omega_{\alpha H}$ (гл. 2), и среднее за период $\omega_{\alpha H}^{-1}$ ускорение будет равно нулю. В неоднородном, но достаточно плавно изменяющемся магнитном поле (характерный масштаб неоднородности $L \simeq |\mathbf{H}|/|\partial \mathbf{H}/\partial \mathbf{r}|$ много больше $r_{\alpha H}$)

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}_{\mathbf{r}=0} + \{(\mathbf{r}\partial/\partial \mathbf{r})\, \mathbf{H}\}_{\mathbf{r}=0} + \dots, \qquad (1.2.2)$$

Из (1) и (2) видно, что наличие неоднородности $\mathbf{H}$ эквивалентно появлению некоторой силы, действующей на частицу аддитивно с $\mathbf{F}_\alpha$ (фактически же частица смещается за счет небольшого изменения ларморовского радиуса в неоднородном поле $\mathbf{H}$). Следуя [16], найдем систему координат, в которой движение частицы при $\mathbf{H} \neq \mathbf{H}_0$ и $\mathbf{F}_\alpha \neq 0$ в первом приближении остается периодическим. Предположим, что такая система существует, и обозначим через $\mathbf{u}_д$ скорость перемещения этой системы координат относительно неподвижной системы, к которой относится уравнение (1) ($\mathbf{u}_д$ по определению есть скорость дрейфа частицы). Тогда скорость $\mathbf{v}'_\alpha$ частицы в новой системе связана со скоростью $\mathbf{u}_д$ соотношением $\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{v}'_\alpha + \mathbf{u}_д$. Подставляя это соотношение в (1), имеем

$$m_\alpha \frac{d\mathbf{v}'_\alpha}{dt} + m_\alpha \{(\mathbf{u}_д\nabla)\, \mathbf{v}'_\alpha + (\mathbf{v}'_\alpha\nabla)\, \mathbf{u}_д\} = \\ = \frac{e_\alpha}{c}[\mathbf{v}'_\alpha\mathbf{H}] + \frac{e_\alpha}{c}[\mathbf{u}_д\mathbf{H}] + \mathbf{F}_\alpha - m_\alpha \frac{d\mathbf{u}_д}{dt}. \qquad (1.2.3)$$

После усреднения (3) за время $t \gg \omega_{\alpha H}^{-1}$ ($\sim$ — знак усреднения) левая часть (3) обращается в нуль, а первый член в правой части с учетом (2) и $|\mathbf{r}| \simeq r_{\alpha H}$

$$\widetilde{[\mathbf{v}'_\alpha\mathbf{H}]} = [\widetilde{\mathbf{v}'_\alpha(\mathbf{r}\nabla)\,\mathbf{H}}] = -(\mathbf{v}_{\alpha\perp}/2)\, r_{\alpha H}(\nabla H), \qquad (1.2.4)$$

где $v_{\alpha\perp}$ — модуль ортогональной $\mathbf{h}$ компоненты v'_α. Действительно, пусть $H \simeq H_z$ ($H_{x,y} \ll H$) и $v_{\alpha z} \ll v_{\alpha\perp}$ ($r_{\alpha z} \ll r_{\alpha H}$), $r_{\alpha x} = r_{\alpha H} \sin \omega_H t$, $r_{\alpha y} = r_{\alpha H} \cos \omega_H t$, а $v_\alpha = dr_\alpha/dt$. Тогда используя уравнение $\operatorname{div} \vec{H} = 0$ (для исключения $\partial H_x/\partial x + \partial H_y/\partial y$) и учитывая, что $\widetilde{v_{\alpha x} r_{\alpha x}} = \widetilde{v_{\alpha y} r_{\alpha y}} = 0$, а $\widetilde{v_{\alpha x} r_{\alpha y}} = -\widetilde{v_{\alpha y} r_{\alpha x}} = v_{\alpha\perp} r_{\alpha H}/2$, получаем (4)

$$\frac{e_\alpha}{c}[\mathbf{u}_д\mathbf{H}_0] + \mathbf{F}_\alpha - \bar{\mu}_\alpha(\nabla H) - m_\alpha \frac{d\mathbf{u}_д}{dt} = 0, \qquad (1.2.5)$$

где $\bar{\mu}_\alpha = m_\alpha v_{\alpha\perp}^2/2H$, $H_0 = H\,(r=0)$. Умножим (5) скалярно и векторно на $\mathbf{h}$. Тогда

$$m_\alpha(du_{дh}/dt) = (F_\alpha - \bar{\mu}_\alpha \nabla H)_h, \qquad (1.2.6)$$

$$u_{д\perp} = -c\,[\mathbf{H}\mathbf{F}_э]/e_\alpha H^2, \qquad \mathbf{F}_э = \mathbf{F}_\alpha - \bar{\mu}_\alpha \nabla H - m_\alpha d\mathbf{u}_д/dt. \qquad (1.2.7)$$

Как правило, инерционный член $d\mathbf{u}_д/dt$ в (7) можно опустить. Однако в некоторых случаях пренебрегать им нельзя. Наибольший вклад в условиях магнитосферы в инерционный член $d\mathbf{u}_д/dt = \partial\mathbf{u}_д/\partial t + (\mathbf{u}_д\nabla)\mathbf{u}_д$ вносит компонента $(u_{дh}\nabla)u_{дh}$, связанная с кривизной силовой линии. В этом случае для $u_{дh}(\mathbf{r}) = \text{const}(u_{дh}\nabla)\, u_{дh} \simeq v_{\alpha h}^2(\mathbf{h}\nabla)\,\mathbf{h} = -v_{\alpha h}^2[\mathbf{h}\,]\nabla\mathbf{h}]]$ ($\nabla h^2 = 0$ по определению). С другой стороны, $[\nabla\mathbf{h}] = [\nabla\mathbf{H}/H] = -(\nabla H)_\perp/H - [\mathbf{H}[\nabla\mathbf{H}]]/H^2$. Таким образом, инерционный член в (7) можно представить в виде

$$m_\alpha \frac{d\mathbf{u}_д}{dt} \simeq 2\bar{\mu}_\alpha \frac{v_{\alpha h}^2}{v_\perp^2}\left\{\frac{(\nabla H)_\perp}{H} + \frac{[\mathbf{H}\operatorname{rot}\mathbf{H}]}{H^2}\right\}, \qquad (1.2.8)$$

который описывает центробежный дрейф частиц. Полагая $\mathrm{rot}\,\mathbf{H} = 0$, мы видим, что

$$\bar{\mu}_\alpha (\nabla H)_\perp + m_\alpha \frac{du_д}{dt} \simeq \bar{\mu}_\alpha \left(1 + \frac{2v_h^2}{v_\perp^2}\right)(\nabla H)_\perp. \tag{1.2.9}$$

Из (7) видно, что дрейф частиц в неоднородном поле пропорционален энергии частицы. Для достаточно низкоэнергичных частиц основным в ионосфере и магнитосфере является дрейф в скрещенных электрических и магнитных полях, направление которого одинаково для электронов и ионов. Считая электрическое поле потенциальным $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$, с помощью (7) нетрудно установить, что дрейфовые траектории частиц в этом случае совпадают с эквипотенциальными поверхностями. Учет градиентного дрейфа приводит к тому, что частица дрейфует вдоль эквипотенциальных линий с эффективным потенциалом $\Phi_{эф} = \Phi + (\mu_\alpha/e_\alpha)H$.

В случае, когда энергии частиц достаточно велики, при этом дрейфом в скрещенных полях можно пренебречь по сравнению с градиентным, частицы в магнитосфере совершают движения вдоль силовых линий и участвуют в поперечном к $\mathbf{h}$ азимутальном дрейфе, вызванном ∇H. Период азимутального дрейфа легко оценить из (7) и (9). Для частиц на экваторе при $v_R = 0$

$$T_д \approx (2\pi/3)\, eR^2/c\bar{\mu}_\alpha. \tag{1.2.10}$$

Движение частицы вдоль $\mathbf{R}$ описывается (6). При $F_{\alpha R} = 0$ и адиабатически медленном (плавном) изменении H должны сохраниться угловой момент частицы $mv_{\alpha\perp}r_{\alpha H}$:

$$v_{\alpha\perp}^2/2H = v_\alpha^2 \sin^2\alpha/2H = \mathrm{const} \tag{1.2.11}$$

(α — угол между векторами $\mathbf{v}_\alpha$ и $\mathbf{H}$) и ее кинетическая энергия $mv_\alpha^2 = \mathrm{const}$. Из (11) следует, что при движении частицы в область более сильного магнитного поля существует точка, где $\sin^2\alpha$ может стать равным единице и частица отражается в обратном направлении (при этом $H_{отр} = H_0/\sin^2\alpha$). Таким образом, области сильного магнитного поля могут играть для заряженных частиц роль магнитных зеркал, через которые пройдут только частицы с малым начальным углом α. Физически этот механизм связан с действием диамагнитной силы $\bar{\mu}_\alpha\nabla H$, выталкивающей частицы в сторону более слабого поля.

Токи в магнитосфере. Особенности движения заряженных частиц в неоднородном магнитном поле порождают токи в магнитосфере и создают ортогональные магнитному полю электрические поля $E_\perp$ индукционного и поляризационного происхождения. Эти поля в силу высокой проводимости плазмы в направлении силовых линий геомагнитного поля переносятся в ионосферу без особых искажений и создают в ионосфере на высотах $z \sim 100$ км ионосферную систему токов — токи замыкания.

Среди токовых систем в магнитосфере обычно выделяют токи обтекания, т. е. токи на границе магнитосферы. Эти токи сильно изменяются по значению и направлению во времени, однако в среднем вблизи экваториальной плоскости на дневной стороне ток направлен от утренней области к вечерней (этот ток замыкается, по-видимому, на южной и северной частях магнитопаузы, хотя точно это не установлено). Другая токовая система расположена в нейтральном слое. Здесь токи также направлены с утренней на вечернюю сторону, и с этими токами связаны особенности распределения геомагнитного поля в хвосте магнитосферы. Замыкание токов нейтрального слоя, по-видимому, осуществляется через южную и северную части хвоста. С наличием в хвосте восточно-западного электрического поля связано движение плазмы в плазменном слое по направлению к Земле, обусловленное скрещенными электрическим и магнитным полями.

Третьей системой является кольцевой ток, который имеет вид кольца, расположенного вокруг экватора. Кольцевой ток протекает на расстоянии 4—7 $R_З$ от центра Земли и направлен на запад. Кольцевой ток особенно

интенсивен в периоды магнитных суббурь, когда происходит заполнение области замкнутых силовых линий энергичной солнечной плазмой. Наконец, четвертая токовая система магнитосферы связана с токами в зоне полярных сияний (авроральные электроджеты) посредством продольных (вдоль силовых линий геомагнитного поля) токов.

Неоднородности межпланетной плазмы. Характерным свойством солнечного ветра является его тонкая структура: неоднородности СВ имеют масштабы от 10^{12}—10^{13} см (внешний масштаб) до 10^5—10^7 см (внутренний масштаб). Спектр флуктуаций межпланетной плазмы в указанном интервале масштабов имеет степенной вид с показателем одномерного спектра $P \simeq 1{,}5$—2. Последнее можно видеть из рис. 1.17, на котором приведены ре-

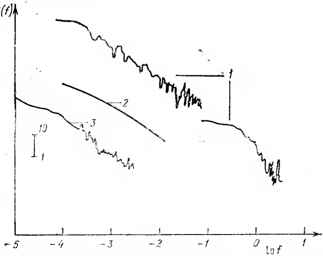

Рис. 1.17. Иллюстрация степенного характера спектров флуктуаций в межпланетной плазме ($P(f) \sim f^{-p}$): *1* — электронной концентрации, $p = 1{,}5$—1,6; *2* — плотности протонов, $p = 1{,}2$—1,6; *3* — магнитного поля, $p = 1{,}5$—2.

зультаты измерений, полученные различными методами. Масштаб l_m изменяется от сотни километров вблизи орбиты Земли до $l_m \lesssim 10^5$ км на $R \sim 10R_\odot$ от центра Солнца и по порядку величины совпадает с гирорадиусом ионов. Вблизи орбиты Земли в области масштабов $l \sim 100$ км относительные флуктуации концентрации плазмы δN составляют примерно 10^{-2}. Интенсивность мелкомасштабных неоднородностей СВ изменяется во времени и связана с активностью Солнца. Более подробно с данными о тонкой структуре межпланетной плазмы можно познакомиться, например, в обзорах [49, 50].

1.3. Солнечная плазма

На рис. 1.18 изображена схема структуры Солнца и его атмосферы. Сведения о параметрах внутренних слоев Солнца основаны на модельных представлениях, которые в основном соответствуют наблюдаемым характеристикам солнечной поверхности. Сведения о структуре атмосферы Солнца получены из непосредственных наблюдений в широком диапазоне электромагнитных радиоволн от рентгеновского до радиодиапазона, включая преци-

зионные измерения на космической лаборатории «Скайлэб» [37, 38].

Источником солнечной энергии является ядро Солнца, где энергия освобождается в результате термоядерных реакций. Энергетический режим переходного слоя определяется переносом этой энергии с помощью излучения. На внешней границе переходного слоя, однако, прозрачность среды для излучения начинает уменьшаться. Это связано с образованием (за счет рекомбинации электронов и ядер) ионов, которые могут поглощать

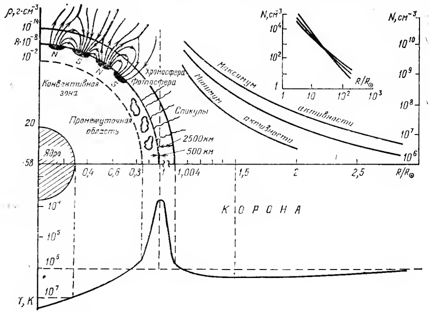

Рис. 1.18. Структура внутренних слоев Солнца и его атмосфера.

фотоны в процессах фотоионизации и свободно-свободных переходов [38]. В результате появляется большой отрицательный градиент температуры, который приводит к конвективной неустойчивости среды: горячие элементы среды, будучи менее плотными, начинают «всплывать» к поверхностным слоям, а их место занимают перемещающиеся внутрь более плотные холодные элементы. Перенос энергии за счет конвекции в конвективной зоне менее эффективен, чем в случае излучения, поэтому температура подфотосферных слоев Солнца более чем на два порядка меньше, чем в его центральных областях. В тонком слое фотосферы и внутренних слоях хромосферы излучение снова проходит среду без заметного поглощения, что приводит к выравниванию температуры. Минимальное ее значение 4200 К имеет место вблизи внутренней границы хромосферы. В более внешних слоях хромосферы температура увеличивается, причем особенно

большие градиенты температуры наблюдаются на границе хромосферы и короны, где $T \geqslant 10^6$ К. Считают, что этот рост обусловлен диссипацией волн, генерируемых в подфотосферных слоях конвекционными структурами *). Температура короны максимальна в интервале $1,5 \leqslant R/R_{\odot} \leqslant 2$, где она составляет $2,5 \cdot 10^6$ К. Температура короны медленно убывает с ростом R, имея значение 10^6 К на $R = 4R_{\odot}$.

О распределении концентрации плазмы в солнечной атмосфере можно судить на основе рис. 1.18. Во внутренних слоях хромосферы солнечная плазма является частично ионизированной (на высоте около $1,5 \cdot 10^3$ км над поверхностью фотосферы концентрация нейтрального водорода составляет $10^{11} - 10^{12}$ см$^{-3}$). В солнечной короне плазма (за исключением случаев появления в нижней короне особых слабо ионизированных образований — протуберанцев) полностью ионизована.

На рис. 1.18 мы отобразили усредненное распределение параметров солнечной плазмы. В действительности плазма солнечной хромосферы и короны сильно неоднородна даже при отсутствии ярко выраженных активных областей солнечных пятен, хромосферных вспышек и т. д. Примером такой неоднородности могут служить спикулы. Это нитевидные короткоживущие (4—5 мин) струи вещества ($N_n \sim (10^{11} - 10^{12})$ см$^{-3}$, $N_e \sim 10^{11}$ см$^{-3}$) хромосферы, выбрасываемые из областей, которые носят название хромосферной сетки (последняя, по-видимому, родственна супергрануляции в фотосфере). Диаметры спикул составляют всего 1000 км, их скорости примерно равны 20—40 км/с, а высоты, которых они достигают, $(1-1,5) \cdot 10^4$ км. Наблюдается и ряд других тонких структур в хромосфере. Существенно неоднородны и солнечные магнитные поля, особенно на уровне фотосферы. Общее магнитное поле Солнца ($H \sim 1$ Гс) является усредненной по поверхности величиной. В действительности оно состоит из многочисленных узлов, напряженность поля в которых на уровне фотосферы превышает 10^3 Гс, а структура поля существенно изменяется уже на масштабах порядка нескольких сотен километров [39].

К числу более крупномасштабных структур относятся солнечные протуберанцы — наиболее заметные образования в нижних

*) Тонкая структура фотосферы характеризуется наличием ярко выраженных ячеек — гранул с характерным размером на поверхности фотосферы $(0,5-1) \cdot 10^3$ км, колебанием температуры 300 К и временем жизни 5—10 мин. Вертикальная скорость движения газа гранул в фотосфере 0,5—2 км/с. Одновременно на Солнце можно наблюдать до миллиона гранул. Имеется и когерентная компонента скоростей грануляции — вертикальные колебания газа происходят когерентно с периодом ~ 300 с и скоростью 0,5 км/с. Горизонтальный размер области, в пределах которой эти вертикальные колебания когерентны, составляют от 10^3 до $5 \cdot 10^4$ км [38]. Полагают, что такие колебания представляют собой стоячие акустико-гравитационные волны низкой частоты. На поверхности фотосферы наблюдается и структура с горизонтальными размерами $3 \cdot 10^4$ км и временем жизни порядка суток (супергрануляция).

слоях короны Солнца. Спокойные протуберанцы часто представляют собой облака плотного холодного газа ($T_n \sim (6-8) \cdot 10^3$ К, $N_n \sim (1-5) \cdot 10^{10}$ см$^{-3}$, степень ионизации невелика), протяженность которых по высоте достигает $5 \cdot 10^4$ км и сравнима с высотой их расположения. Активные протуберанцы отличаются от спокойных прежде всего истечением из них потоков газа и движением (часто с внезапным началом) отдельных их частей или всего образования «вверх» со скоростями до 100—400 км/с (эруптивные протуберанцы). Напряженность магнитных полей в спокойных протуберанцах может составлять 3—30 Гс, в активных протуберанцах могут наблюдаться магнитные поля с $H \approx \approx 200-300$ Гс.

Более внешние области короны также характеризуются наличием многочисленных крупномасштабных структур, к числу которых относятся плотные корональные лучи (с концентрацией N_e, почти на порядок превышающей среднюю концентрацию), а также ряд замкнутых и разомкнутых структур, свидетельствующих об удержании веществ короны магнитным полем или о выносе магнитных полей за пределы короны. Наиболее интересными особенностями солнечной короны являются корональные дыры — обширные области пониженной концентрации. Температура короны над дырами уменьшена до 10^6 К, толщина переходного слоя между хромосферой и короной в дырах примерно в три раза больше, чем для спокойного Солнца. Данные, полученные в последнее время, указывают на то, что высокоскоростные потоки солнечного ветра истекают главным образом из областей, где находятся дыры. Корональные дыры, расположенные на низких широтах Солнца, ответственны, по-видимому, за потоки солнечного ветра, пересекающие орбиту Земли (геоактивные потоки). Корональные дыры, наблюдаемые в высоких широтах Солнца, имеют большие размеры и времена жизни по сравнению с низкоширотными. Размеры и факт постоянного присутствия полярных дыр говорят о наличии сильного полярного солнечного ветра (гл. 8). Солнечной короне свойственна также ярко выраженная мелкомасштабная структура плазмы. Измерения на $R \sim (2-5)R_\odot$ показывают, что в солнечной плазме могут наблюдаться неоднородности вплоть до масштабов $l \sim 1-10$ км (п. 1.2). Ряд косвенных данных, основанных на изучении характеристик солнечного радиоизлучения (гл. 8), данные радиолокации солнечной короны, по-видимому, свидетельствуют о наличии в солнечной короне развитой ионно-звуковой турбулентности с масштабами в несколько метров (гл. 11).

За активные области (АО) на Солнце принимают области сильных магнитных полей, которые нарастают и распадаются за время от суток до месяцев (обычно центр активности достигает максимальной стадии развития через 10—15 дней). Размеры АО колеблются от 10^4 км до $(1-5) \cdot 10^5$ км. Центры активности в хромосфере и короне появляются над фотосферными пятнами — локальными или групповыми системами магнитного поля уни-

полярного или двуполярного (мультиполярного) характера. Напряженность магнитного поля в пятнах достигает 3 кГс, а градиенты H — нескольких Гс/км. В хромосфере АО называют часто факелами или флоккулами, температура короны над центрами активности больше (примерно на $0{,}5 \cdot 10^6$ К), чем в других местах, и интенсивно излучает в рентгеновском диапазоне, обнаруживая при этом структуру с $l \sim 10^3$ км. К числу АО в короне относятся корональные конденсации, имеющие вид петлеобразных структур, повторяющих структуру магнитного поля над пятном.

Наиболее интересное (и важное с геофизической точки зрения) явление, которое имеет место в АО, заключается в возможности преобразования значительного количества энергии (10^{32}—10^{33} эрг) за время $\sim 2 \cdot 10^3$ с, которая освобождается в виде интенсивных излучений в оптическом и других диапазонах волн и сопровождается генерацией ударных волн, ускорением заряженных частиц (до релятивистских энергий), «выбрасыванием» облаков плазмы в корону и за ее пределы. Это явление носит название (по своему оптическому проявлению) солнечной вспышки, хотя иногда его называют солнечной бурей [28]. В гл. 8 будет показано, что с АО, в том числе со вспышками, связаны многочисленные типы радиоизлучения Солнца (подробнее см. [40]).

1.4. Галактическая плазма

Наша Галактика принадлежит к числу спиральных галактик. Она насчитывает примерно 10^{11} звезд и имеет массу $M \sim 10^{44}$ г. Основная масса вещества сосредоточена в плоском диске толщиной в несколько сотен парсек (1 пс $= 3 \cdot 10^{18}$ см), имеющем размеры около 30 кпс. Спиральная структура Галактики связана с распространением в ней волн плотности [41]. Галактика состоит из звезд и межзвездного пространства, содержащего газ с небольшой примесью пылевых частиц. Масса межзвездного газа в Галактике составляет несколько процентов от суммарной массы звезд. Его химический состав близок к составу звезд и в основном состоит из водорода (70% массы газа) и гелия (28%). Распределение плотности газа в межзвездной среде характеризуется сильной неоднородной облачной структурой. Неоднородным является и распределение температуры, хотя давление $P = N\varkappa T$ в различных областях межзвездного газа одного порядка величины. Наиболее холодные и плотные области наблюдаются вблизи плоскости Галактики и обычно связаны с областями звездообразования [42]. Последнее обусловлено тем, что в таких холодных облаках силы давления не могут препятствовать гравитационным силам сжатия. Такие области имеют повышенную концентрацию молекулярных компонент, вызывающих радиоизлучение в линиях, что является способом их диагностики.

Менее плотными являются HI облака, имеющие размеры порядка 10 пс и содержащие слабо ионизированную водородную плазму ($N_n \sim 10$ см$^{-3}$, $T_n \sim 60$—80 K, $N_e \lesssim 4 \cdot 10^{-2}$ см$^{-3}$). Наряду с такими существуют и облака сильно ионизированного водорода — области HII. Наиболее яркие из этих областей окружают горячие звезды, волновое излучение которых ответственно за ионизацию областей HII. В областях HII плазма сильно ионизирована. Ее температура составляет $(7—12) \cdot 10^3$ K [42], а концентрация — $10^{-1} \leqslant N_e \leqslant 10^2$ см$^{-3}$. Размеры HII областей составляют доли и единицы парсека, но могут значительно превышать указанные значения. Вокруг звезд часто наблюдаются связанные с ними околозвездные туманности с размерами, достигающими 10—15 пс. Концентрация плазмы для наиболее изученных туманностей колеблется в пределах $10^2 - 2 \cdot 10^3$ см$^{-1}$, а кинетическая температура составляет $(3—9) \cdot 10^3$ K [38, 42]. Наконец, часть галактической плазмы сосредоточена в оболочках, окружающих остатки сверхновых звезд [44—46], которые в настоящее время отождествляют с нейтронными звездами. Ярким примером такой оболочки является Крабовидная туманность [46]. Особое место по своим параметрам занимает плотная релятивистская плазма магнитосфер пульсаров (источников импульсного излучения — вращающихся нейтронных звезд) и аккрецирующая плазма двойных систем, а также плазма ядра Галактики. Параметры межоблачной плазмы известны хуже, чем плазмы галактических облаков. По измерениям группового запаздывания импульсного радиоизлучения пульсаров (гл. 11) можно, оценивая из независимых измерений расстояние до этих объектов, судить о средней на луче зрения концентрации [45]. Результаты показывают, что $\langle N_e \rangle \lesssim 3 \cdot 10^{-2}$ см$^{-3}$ в плоскости галактического диска и убывает, по-видимому, экспоненциально при удалении от нее ($\langle N_e \rangle = 3 \cdot 10^{-2} \exp\{-|z|/z_0\}$, $z_0 \simeq 1$ кпс, z — расстояние от плоскости диска).

Кроме отмеченной выше крупномасштабной неоднородности галактической плазмы, она характеризуется наличием в HII областях, оболочках сверхновых и других активных образованиях мелкомасштабной турбулентности плазмы [45, 47, 48]. Размеры неоднородностей могут быть порядка (и меньше в активных областях) $10^{10}—10^{11}$ см. Относительные вариации концентрации плазмы в области таких масштабов, по-видимому, составляют $(0{,}5—1) \cdot 10^{-2}$. Наблюдаются в межзвездной среде неоднородности и крупных масштабов ($l \sim 10^{12}—10^{14}$ см), которые могут характеризовать «излом» в спектре турбулентности плазмы (п. 1.1). В настоящее время не известно точно, имеются ли мелкомасштабные ($l \sim 10^{10}—10^{11}$ см) неоднородности в невозмущенном межоблачном пространстве. Возможно, что неоднородность определенных частей межзвездной среды вызвана потоками плазмы из активных областей Галактики, которые по аналогии с солнечным ветром можно назвать звездным ветром. Мелкомасштабные неоднородности галактической плазмы оказывают существенное

влияние на характеристики проходящего через межзвездную среду радиоизлучения галактических и внегалактических дискретных источников (гл. 8). Сведения о магнитных полях Галактики ранее извлекались из результатов наблюдений частичной поляризации [43, 45] и спектра [45] космического радиоизлучения, а позднее из измерений фарадеевского вращения радиоизлучения внегалактических космических источников и сильно поляризованного излучения пульсаров. Магнитное поле Галактики вблизи ее плоскости составляет примерно 10^{-6} Гс. Оно направлено вдоль спирального рукава Галактики. Наблюдаются, однако, очень большие флуктуации поля с $\tilde{H} \sim 3 \cdot 10^{-6}$. Характерный размер крупномасштабных флуктуаций поля составляет 100—150 пс, однако имеют место и более мелкие флуктуации H.

В некоторых плотных холодных облаках величина H достигает $(2{,}5—7) \cdot 10^{-5}$ Гс. Еще большие значения H наблюдаются в оболочках сверхновых ($H \sim 10^{-3}$ Гс). Вблизи поверхности пульсаров напряженность магнитного поля, по-видимому, близка к $10^{12}—10^{13}$ Гс.

Галактическая среда характеризуется наличием в ней высокоэнергичных космических лучей, о которых уже упоминалось в п. 1.1. Полный поток частиц космических лучей с $\mathscr{E} > 2{,}5$ ГэВ на орбите Земли составляет $0{,}44$ см$^{-2} \cdot$ с$^{-1}$ [42]. С учетом более низкоэнергичной компоненты можно считать, что средняя концентрация релятивистских протонов в межзвездной среде порядка $10^{-10}—10^{-11}$ см$^{-3}$. Вблизи Земли поток космических электронов составляет всего процент от полного потока космических частиц. Вместе с тем именно релятивистские электроны определяют интенсивность и спектральные характеристики синхротронного радиоизлучения Галактики ([43] и § 7.1). Для области диска концентрация релятивистских электронов, генерирующих синхротронное излучение Галактики, N_p ($\mathscr{E} > 1$ ГэВ) $\sim 5 \cdot 10^{-13}$ см$^{-3}$.

ГЛАВА 2

МЕТОДЫ ОПИСАНИЯ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССОВ В ПЛАЗМЕ

2.1. Основные уравнения

При исследовании волновых явлений в околоземной и космической плазме приходится рассматривать процессы в весьма разнообразных по своим свойствам плазменных средах. Это с очевидностью вытекает из содержания гл. 1. Например, на ионосферных высотах температуры заряженных частиц составляют 300—1000 K, а в солнечной короне 10^6 K.

Для сильно нагретой плазмы при анализе многих физических вопросов большой интерес могут представлять медленные волны, т. е. волны с фазовыми скоростями $v_ф \ll c$. Для их описания необходим тщательный учет теплового движения частиц. В резонансных условиях такое положение возникает и для волн с $v_ф \sim \sim c$. Последовательно этот учет, а также анализ процесса столкновений можно провести на основе метода *кинетического уравнения Больцмана*, опираясь либо на это уравнение, либо на его современные модификации [1—6].

Рассматривая изменения состояния плазмы, очень часто нужно считаться со сложностью ее состава (электроны, ионы различных сортов и нейтральные частицы). Далее, если не будут сделаны соответствующие оговорки, считаем, что в плазме имеется только один сорт положительных ионов.

При кинетическом подходе поведение какого-либо из сортов частиц α описывается функцией распределения $f_\alpha(\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{r}, t)$, зависящей от скорости $\mathbf{v}_\alpha$, радиус-вектора $\mathbf{r}$ и времени t. По определению функция $f_\alpha(\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{r}, t)$ характеризует число частиц в интервале от $\mathbf{v}_\alpha$ до $\mathbf{v}_\alpha + d\mathbf{v}_\alpha$ и от $\mathbf{r}$ до $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$ (в декартовых координатах $d\mathbf{r} = dx\,dy\,dz$ и $d\mathbf{v} = dv_x\,dv_y\,dv_z$).

Если взаимодействие частиц обусловлено короткодействующими силами и применима модель парных соударений, то функция f_α удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v}_\alpha \nabla_\mathbf{r} f_\alpha + \frac{\mathbf{F}_\alpha}{m_\alpha} \nabla_{\mathbf{v}_\alpha} f_\alpha = \sum_\beta \left(S_\beta^\alpha + S_\alpha^\beta\right), \qquad (2.1.1)$$

где $\mathbf{F}_\alpha$ — сила, действующая на частицу, и m_α — масса частицы. В правой части (1) содержатся слагаемые, входящие в *интеграл столкновений*. Суммирование проводится по всем сортам частиц β (включая и сорт α). В интеграле столкновений имеются части, соответствующие входу из-за столкновений частиц сорта α в ин-

тервал $d\mathbf{v}_\alpha d\mathbf{r}$ (слагаемые с S^α_β) и выходу частиц из него (слагаемые с S^β_α).

В уравнении (1) учтены не все возможные процессы, приводящие к изменению распределения числа частиц выбранного сорта. Так, например, в ионосферной плазме осуществляется цепь фотохимических процессов (п. 1, гл. 1). При их учете нужно дополнить (1) и записать

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v}_\alpha \nabla_\mathbf{r} f_\alpha + \frac{\mathbf{F}_\alpha}{m_\alpha} \nabla_{\mathbf{v}_\alpha} f_\alpha = \sum_\beta (S^\alpha_\beta + S^\beta_\alpha) + \sum_\gamma (\Gamma^\alpha_\gamma + \Gamma^\gamma_\alpha), \quad (2.1.2)$$

где Γ^α_γ и Γ^γ_α — операторы химических процессов, приводящих к исчезновению или появлению частиц сорта α в интервале $d\mathbf{v}_\alpha d\mathbf{r}$.

Левая часть кинетического уравнения может быть записана в форме закона сохранения f_α, так что без учета столкновений и химических процессов

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div}_\mathbf{r} (\mathbf{v}_\alpha f_\alpha) + \operatorname{div}_{\mathbf{v}_\alpha} \left(\frac{\mathbf{F}_\alpha}{m_\alpha} f_\alpha \right) = 0. \quad (2.1.3)$$

Это уравнение имеет вид условия непрерывности. Изменение за время dt числа частиц в элементе $d\mathbf{v}_\alpha d\mathbf{r}$ определяется членом $\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} d\mathbf{v}_\alpha d\mathbf{r} dt$ и связано как с выходом (входом) частиц из элемента $d\mathbf{v}_\alpha d\mathbf{r}$ при изменении их положения (координат x, y, z), так и их скоростей (компонент v_x, v_y, v_z). При этом нужно иметь в виду, что за время dt частицы смещаются в обычном пространстве на расстояние $\mathbf{v}_\alpha\, dt$ и на $(\mathbf{F}_\alpha/m_\alpha)dt$ — в пространстве скоростей. Естественно, что полное число частиц во всем 6-мерном пространстве x, y, z, v_x, v_y, v_z согласно (3) измениться не может.

Возможность записи левой части (1) в виде (3) очевидна. Проще всего исходить из (3). В силу независимости переменных x, y, z и v_x, v_y, v_z имеем $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$. Тогда $\operatorname{div}_\mathbf{r} (\mathbf{v}_\alpha f_\alpha) = \mathbf{v}_\alpha \nabla_\mathbf{r} f_\alpha$.

Формулировка левой части (1) в виде (3) исключает необходимость каких-либо дополнительных пояснений. Остается «только» дать расшифровку интеграла столкновений. Отметим, что при записи (3) отражен вклад только относительно крупномасштабных сил $\mathbf{F}_\alpha$, которые, как правило, рассматриваются как внешние.

Для учета вклада короткодействующих внутренних сил, определяющих столкновительное взаимодействие между частицами, нужно обосновать и детализировать вид правой части в уравнении (1). Для этого можно использовать классическую схему, примененную самим Больцманом [1]. Рассмотрим столкновения частиц сорта α с частицами сорта β. Частным случаем могут быть столкновения между одинаковыми частицами. Будем учитывать только парные, принимая во внимание, что в неплотных средах вероятность тройных столкновений значительно меньше. Традиционным образом принимается, что внешние поля не столь ве-

лики, чтобы влиять на характер самого акта столкновения. В конечном счете для простоты ограничимся случаем упругих ударов.

Остановимся сначала на вкладе члена S_α^β, который ответствен за изменения из-за столкновений скорости частицы α, по крайней мере по направлению, с выходом из интервала $d\mathbf{v}_\alpha$. За малое время dt в интервале $d\mathbf{r}$ число таких частиц будет равно $S_\alpha^\beta d\mathbf{v}_\alpha d\mathbf{r}\, dt$. После столкновения частиц α из интервала $d\mathbf{v}_\alpha$ с частицами β из интервала $d\mathbf{v}_\beta$ имеется определенная вероятность попадания первых в $d\mathbf{v}_\alpha'$, а вторых — в $d\mathbf{v}_\beta'$. Из-за кратковременности ударного взаимодействия частицы обоих сортов как до удара, так и после него нужно относить к одному интервалу $d\mathbf{r}$, так как изменением положения частицы можно пренебречь.

Если в пространстве скоростей $\mathbf{v}_\alpha$ ввести полярные углы θ и φ, то для элемента $d\mathbf{v}_\alpha$ можно написать

$$d\mathbf{v}_\alpha = v_\alpha^2 dv_\alpha d\Omega, \qquad d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

и аналогично $d\mathbf{v}_\alpha' = (v_\alpha')^2 dv_\alpha' d\Omega'$.

Вероятность dW_α^β частицы сорта α испытать в единицу времени в единице объема столкновения с частицами сорта β из интервала $d\mathbf{v}_\beta$ пропорциональна концентрации «рассеивателей» $f_\beta(\mathbf{v}_\beta)d\mathbf{v}_\beta$ и относительной скорости сталкивающихся частиц $v_{\alpha\beta} = |\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta|$. Коэффициент пропорциональности здесь должен иметь размерность площади, так что

$$dW_\alpha^\beta = q_{\alpha\beta}(v_{\alpha\beta}, \theta)\, v_{\alpha\beta} f_\beta(\mathbf{v}_\beta)\, d\mathbf{v}_\beta d\Omega'. \tag{2.1.4}$$

В (4) введено дифференциальное эффективное сечение $q_{\alpha\beta}$, зависящее от $v_{\alpha\beta}$ и угла θ между скоростями $\mathbf{v}_\alpha$ и $\mathbf{v}_\alpha'$. При записи (4) принято во внимание, что рассматривается уход частиц сорта α в элемент $d\mathbf{v}_\alpha'$. В силу этого в (4) входит комбинация $q_{\alpha\beta}(v_{\alpha\beta}, \theta)d\Omega'$, характеризующая эффективность рассеяния частиц сорта α после удара в элемент телесного угла $d\Omega'$.

Чтобы найти полное число столкновений в единицу времени в единице объема с выходом из фиксированного элемента $d\mathbf{v}_\alpha$, нужно умножить (4) на $f_\alpha(\mathbf{v}_\alpha)d\mathbf{v}_\alpha$ и проинтегрировать по $d\mathbf{v}_\beta$ и $d\Omega'$, так что

$$S_\alpha^\beta = -\int\int q_{\alpha\beta}(v_{\alpha\beta}, \theta)\, v_{\alpha\beta} f_\beta f_\alpha d\mathbf{v}_\beta d\Omega'. \tag{2.1.5}$$

Знак минус в (5) поставлен в связи с тем, что член S_α^β определяет уход частиц из $d\mathbf{v}_\alpha$.

Столкновения с частицами сорта β приводят не только к выходу частиц сорта α из $d\mathbf{v}_\alpha$, но и к входу в этот интервал, что отражено в (1), (2) наличием частей с S_β^α. Пусть частица сорта α со скоростью $\mathbf{v}_\alpha'$, направление которой обеспечивает попадание в телесный угол $d\Omega'$, сталкивается с частицами сорта β из интервала $d\mathbf{v}_\beta'$ таким образом, что оказывается в интервале $d\mathbf{v}_\alpha$

(внутри $d\Omega$). Вероятность такого процесса

$$dW_\beta^\alpha = q_{\alpha\beta}\left(v'_{\alpha\beta}, \theta\right) v'_{\alpha\beta} f_\beta\left(\mathbf{v}'_\beta\right) d\mathbf{v}'_\beta d\Omega. \qquad (2.1.6)$$

Чтобы найти полное число столкновений в единицу времени в единице объема, умножим (6) на $f\left(\mathbf{v}'_\alpha\right) d\mathbf{v}'_\alpha$ и проинтегрируем полученное выражение по $d\mathbf{v}'_\alpha$ и $d\mathbf{v}'_\beta$. При переходе к формуле для S_β^α нужно провести сокращение на $d\mathbf{v}_\alpha$. Если при этом учесть, что $d\mathbf{v}_\alpha = v_\alpha^2 dv_\alpha d\Omega$, то легко прийти к равенству

$$S_\beta^\alpha v_\alpha^2 dv_\alpha = \int\int q_{\alpha\beta}\left(v'_{\alpha\beta}, \theta\right) v'_{\alpha\beta} f_\alpha\left(\mathbf{v}'_\alpha\right) f_\beta\left(\mathbf{v}'_\beta\right) d\mathbf{v}'_\alpha d\mathbf{v}'_\beta. \qquad (2.1.7)$$

При переходе к (7) учтено, что $\theta = -\theta'$ и что дифференциальные сечения симметричны относительно угла θ. Эта симметрия носит общий характер и далее считается существующей во всех рассматриваемых примерах.

При определении полного эффекта, выраженного суммой $S_\beta^\alpha + S_\alpha^\beta$, нужно учесть следствия принципа детального равновесия [2, 3], согласно которому вероятности прямого и обратного процессов равны:

$$v_{\alpha\beta} q_{\alpha\beta}\left(v_{\alpha\beta}, \theta\right) d\Omega' = v'_{\alpha\beta} q_{\alpha\beta}\left(v'_{\alpha\beta}, \theta\right) d\Omega. \qquad (2.1.8)$$

Для центрального взаимодействия двух частиц равенство (8) вытекает из законов сохранения энергии и импульса при столкновениях [2, 3, 8]. При таком взаимодействии равенство (8) сохраняется и в квантовой теории.

Далее, следует учесть, что

$$d\mathbf{v}'_\alpha d\mathbf{v}'_\beta = d\mathbf{v}_\alpha d\mathbf{v}_\beta. \qquad (2.1.9)$$

При доказательстве (9) используется наличие линейной связи между $\mathbf{v}_\alpha$, $\mathbf{v}_\beta$ и $\mathbf{v}'_\alpha$, $\mathbf{v}'_\beta$. В силу этого дифференциальные элементы $d\mathbf{v}'_\alpha d\mathbf{v}'_\beta$ и $d\mathbf{v}_\alpha d\mathbf{v}_\beta$ связаны соотношением

$$J d\mathbf{v}_\alpha d\mathbf{v}_\beta = d\mathbf{v}'_\alpha d\mathbf{v}'_\beta, \qquad (2.1.10)$$

где

$$J = \frac{\partial\left(v'_{\alpha x}, v'_{\alpha y}, v'_{\alpha z}, v'_{\beta x}, v'_{\beta y}, v'_{\beta z}\right)}{\partial\left(v_{\alpha x}, v_{\alpha y}, v_{\alpha z}, v_{\beta x}, v_{\beta y}, v_{\beta z}\right)}$$

— якобиан соответствующего преобразования. С другой стороны, если рассмотреть обратное преобразование, то оно будет отличаться лишь заменой штрихованных величин на нештрихованные. Поэтому якобиан

$$J' = \frac{\partial\left(v_{\alpha x}, v_{\alpha y}, v_{\alpha z}, v_{\beta x}, v_{\beta y}, v_{\beta z}\right)}{\partial\left(v'_{\alpha x}, v'_{\alpha y}, v'_{\alpha z}, v'_{\beta x}, v'_{\beta y}, v'_{\beta z}\right)}$$

также должен равняться J $(J = J')$. Но из-за тождественности двойного преобразования $JJ' = 1$. Так как в число возможных

преобразований входит и тождественное, то $J=1$. Тогда из (10) приходим к (9).

Учитывая (8), (9), можно сумму $S_\beta^\alpha + S_\alpha^\beta$ записать в виде

$$S_\beta^\alpha + S_\alpha^\beta = \int\int \left[f_\alpha(\mathbf{v}'_\alpha) f_\beta(\mathbf{v}'_\beta) - f_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) f_\beta(\mathbf{v}_\beta)\right] q_{\alpha\beta}(v_{\alpha\beta}, \theta)\, d\mathbf{v}_\beta d\Omega'.$$

Таким образом, в пренебрежении химическими процессами кинетическое уравнение Больцмана для частиц сорта α имеет вид

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \mathbf{v}_\alpha \nabla_{\mathbf{r}} f_\alpha + \frac{\mathbf{F}_\alpha}{m_\alpha} \nabla_{\mathbf{v}_\alpha} f_\alpha =$$

$$= \int\int \left[f_\alpha(\mathbf{v}'_\alpha) f_\beta(\mathbf{v}'_\beta) - f_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) f_\beta(\mathbf{v}_\beta)\right] v_{\alpha\beta} q_{\alpha\beta}(v_{\alpha\beta}, \theta)\, d\mathbf{v}_\beta d\Omega'. \quad (2.1.11)$$

Вернемся к выводу интеграла столкновений, который находится в правой части (11), и сформулируем использованные предположения. Уже отмечалось, что учитывались только парные столкновения, а влияние внешних сил на динамику соударения во внимание не принималось. И, наконец, мы воспользовались положением, получившим название гипотезы о молекулярном хаосе. Дело в том, что предположение, что вероятность входа и выхода частиц из элемента $d\mathbf{v}_\alpha$ пропорциональна $f_\alpha(\mathbf{v}'_\alpha) f_\beta(\mathbf{v}'_\beta)$ и $f_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) f_\beta(\mathbf{v}_\beta)$, основано на пренебрежении корреляцией между скоростями частиц. Это допущение неправомерно для конденсированных сред. Для разреженных газов, наоборот, его приближенно можно считать справедливым. Его обоснование для плазмы вытекает из работ, где проведен учет указанной корреляции [5—8]. Одновременно нужно отметить принципиальную важность гипотезы о молекулярном хаосе, так, именно в этом пункте в кинетическую теорию вводится необратимость.

Естественно, что равновесное распределение $f_0(v)$ должно удовлетворять уравнению (11). В отсутствие внешних сил, когда функция распределения однородна, и при ее стационарности левая часть (11) обращается в нуль, что делает необходимым обращение в нуль и правой части. Тогда при любом характере взаимодействия между частицами уравнение (11) будет удовлетворено, если

$$f_\alpha(\mathbf{v}'_\alpha) f_\beta(\mathbf{v}'_\beta) = f_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) f_\beta(\mathbf{v}_\beta).$$

Логарифмируя, получаем

$$\ln f_\alpha(\mathbf{v}'_\alpha) + \ln f_\beta(\mathbf{v}'_\beta) = \ln f_\alpha(\mathbf{v}_\alpha) + \ln f_\beta(\mathbf{v}_\beta). \quad (2.1.12)$$

Равенство (12) означает, что функция $\ln f$ является аддитивным инвариантом столкновений. Такими инвариантами называют функции $\mathbf{v}_\alpha$ и $\mathbf{v}_\beta$, суммы которых для частиц α и β, участвующих в столкновении, не изменяются.

Такими свойствами из реальных характеристик движения частиц обладают импульс и энергия (при упругих ударах). Дейст-

вительно, при соударениях справедливы законы сохранения:

$$m_\alpha \mathbf{v}'_\alpha + m_\beta \mathbf{v}'_\beta = m_\alpha \mathbf{v}_\alpha + m_\beta \mathbf{v}_\beta, \qquad (2.1.13)$$

$$m_\alpha (v'_\alpha)^2 + m_\beta (v'_\beta)^2 = m_\alpha v_\alpha^2 + m_\beta v_\beta^2. \qquad (2.1.14)$$

Аддитивность рассматриваемых инвариантов позволяет при использовании аналогичности связей (12)—(14) записать общее соотношение, справедливое как для частиц сорта α, так и сорта β, а именно,

$$\ln f(\mathbf{v}) = a_1 + \mathbf{a}_2 m\mathbf{v} - a_3 mv^2/2, \qquad (2.1.15)$$

где a_1, $\mathbf{a}_2$ и a_3 — постоянные величины. Знак минус перед слагаемым с a_3 выбран с расчетом, чтобы получаемая функция распределения $f(\mathbf{v})$ оказалась нормируемой при $a_3 > 0$.

Формулу (15) можно записать в следующем виде:

$$\ln f = \ln a_0 - \frac{ma_3}{2}\left\{\left(v_x - \frac{a_{2x}}{a_3}\right)^2 + \left(v_y - \frac{a_{2y}}{a_3}\right)^2 + \left(v_z - \frac{a_{2z}}{a_3}\right)^2\right\}.$$

Вводя скорость $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{a}_2/a_3$, которая имеет смысл хаотической составляющей, приходим к соотношению, где функция $f(\mathbf{v})$ представлена в форме максвелловского распределения

$$f(w) = a_0 \exp\left(-\frac{m}{2} a_3 w^2\right). \qquad (2.1.16)$$

Коэффициенты a_1, $\mathbf{a}_2$ и a_3 можно выразить через концентрацию частиц $N(\mathbf{r}, t)$, упорядоченную скорость $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \overline{\mathbf{v}}$ (черта означает усреднение по скоростям с использованием распределения $f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$). Здесь и далее будем предполагать, что при усреднении по скоростям функция распределения нормирована на концентрацию N, так что

$$N(\mathbf{r}, t) = \int f(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)\, d\mathbf{v}. \qquad (2.1.17)$$

Тогда при использовании (16) для f с учетом того обстоятельства, что $d\mathbf{v} = dv_x\, dv_y\, dv_z = dw_x\, dw_y\, dw_z$, получаем *)

$$a_0 = N(ma_3/2\pi)^{3/2}.$$

Функция распределения (16) строго применима для однородных газов в стационарных условиях. Тогда концентрация N не зависит ни от $\mathbf{r}$, ни от t.

---

*) Здесь и ниже будет использоваться формула

$$\int_0^\infty e^{-px^2} x^{2a} dx = \frac{(2a-1)!}{2(2p)^a}\left(\frac{\pi}{p}\right)^{1/2}.$$

Отметим, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-px^2} dx = \sqrt{\pi/p}.$$

Определяя, например, компоненту скорости u_x, имеем

$$Nu_x = N\bar{v}_x = \int (w_x + a_{2x}/a_3) f(w^2)\, dw_x dw_y dw_z. \qquad (2.1.18)$$

Слагаемое с $\int w_x f d\mathbf{w}$ исчезает, и мы из (18) приходим к очевидному результату:

$$u_x = \bar{v}_x = a_{2x}/a_3,$$

что подтверждает заключение о хаотическом характере скорости $\mathbf{w}$ $(\mathbf{v} - \mathbf{u} = \mathbf{w})$.

Используя соотношение $(3/2)\varkappa T = (1/2)m\overline{w}^2$, которое для равновесных систем вытекает из закона равномерного распределения энергии по степеням свободы ($\varkappa$ — постоянная Больцмана, T — температура рассматриваемого сорта частиц), получаем, что $a_3 = (\varkappa T)^{-1}$.

В итоге приходим к *распределению Максвелла*

$$f(w) = N(m/2\pi\varkappa T)^{3/2} \exp(-mw^2/2\varkappa T). \qquad (2.1.19)$$

Приведенный способ получения распределения (19) никак нельзя считать единственным. Так, формула (19) получается из основных положений классической статистической механики и является прямым следствием распределения Гиббса [8, 9]. В силу этого при переходе к (19) не обращалось внимание на некоторые детали (например, на определение коэффициента a_3 из соотношения $\overline{w}^2 = 3\varkappa T/m$).

При анализе волновых явлений в плазме приходится опираться не только на кинетическое уравнение, но и на систему уравнений электродинамики. Используем уравнения для полей, усредненные по достаточно малым элементарным объемам, на которые можно разбить весь объем системы. Эти объемы должны быть значительно меньше объемов с характерными масштабами порядка длины волны λ. С другой стороны, в каждом из элементарных объемов должно находиться много заряженных частиц, чтобы сама операция усреднения имела смысл. Таким образом, мы приходим к необходимости выполнения требования

$$\lambda \gg \bar{r}, \qquad (2.1.20)$$

где $\bar{r}$ — среднее расстояние между частицами. Для газов, включая и плазму, $\bar{r} \approx N^{-1/3}$.

Можно отметить, что основным критерием применимости классической физики для описания плазмы будет

$$\lambda_e \ll \bar{r},$$

где λ_e — длина волны де Бройля для электронов. Очевидно, что при учете (20) с большим запасом $\lambda \gg \lambda_e$.

Если в качестве минимальных значений λ для безвихревых (электростатических) волн в плазме принять *дебаевский радиус*

r_D, играющий в физике плазмы роль некоторой фундаментальной длины [11—13],

$$r_D = (\varkappa T/4\pi e^2 N)^{1/2}, \tag{2.1.21}$$

где под T и N понимаются относящиеся к электронам значения, то условие (20) принимает вид

$$e^2/\varkappa T \ll N^{-1/3}. \tag{2.1.22}$$

Расстояние $e^2/\varkappa T$ порядка эффективного прицельного расстояния для кулоновских столкновений [11, 12]. Согласно (22) оно должно быть меньше $\bar{r}$. В то же время неравенство (22) можно записать как $e^2/\bar{r} \ll \varkappa T$. Оно означает, что средняя энергия теплового движения электронов намного больше средней энергии кулоновского взаимодействия. Отношение $e^2/\bar{r}\varkappa T$ называют *плазменным параметром*. Ограничение (22) определяет возможность использования для малых плазменных параметров газового приближения.

При $T = 10^3$—10^6 К расстояние $e^2/\varkappa T \approx 10^{-5}$—$10^{-8}$ см. В условиях приземной или космической плазмы, где обычно значения N не превышают $N = 10^{10}$ см$^{-3}$ неравенство (22) выполняется хорошо. Таким образом, в указанных условиях для электростатических волн важное требование (22) удовлетворено. То же относится и к электромагнитным волнам в радиодиапазоне, когда нужно ориентироваться на неравенство (20). Исключение могут составлять миллиметровые волны в межзвездной среде, когда $\lambda = 1$—10^{-1} см и $N \lesssim 1$ см$^{-3}$. Однако влияние этой среды на радиоволны столь высоких частот крайне незначительно (правда, иногда нужно принимать во внимание огромные пути распространения радиоволн в космическом пространстве).

Для статистически усредненных полей уравнения электродинамики, которые мы выпишем, как это делается для плазмы без учета различий между магнитным полем $\mathbf{H}$ и его индукцией $\mathbf{B}$, приобретают вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_t + \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}_{\text{стор}}, \tag{2.1.23}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \tag{2.1.24}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi(\rho_t + \rho_{\text{стор}}), \tag{2.1.25}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \tag{2.1.26}$$

где $\mathbf{E}$ — напряженность электрического поля, $\mathbf{j}_t$ и ρ_t — плотности усредненных полных тока и заряда, индуцируемых полями $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$. Явно выделены их части $\mathbf{j}_{\text{стор}}$ и $\rho_{\text{стор}}$, которые определяются исключительно внешними силами и являются заданными (от полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ не зависят).

Уравнения (23)—(26) можно рассматривать как усредненные уравнения электродинамики по Лоренцу для микроскопических

полей **e** и **h** [15, 16]:

$$\operatorname{rot} \mathbf{h} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}(\mathbf{j}_{tM} + \mathbf{j}_{\text{стор}}), \qquad (2.1.27)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{e} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t}, \qquad (2.1.28)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{e} = 4\pi(\rho_{tM} + \rho_{\text{стор}}), \qquad (2.1.29)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{h} = 0. \qquad (2.1.30)$$

При усреднении и отождествлении **B** с **H** имеем $\overline{\mathbf{h}} = \mathbf{H}$, $\overline{\mathbf{e}} = \mathbf{E}$, $\overline{\mathbf{j}}_{tM} = \mathbf{j}_t$, $\overline{\rho}_{tM} = \rho_t$. В итоге приходим к системе (23)—(26).

Сила Лоренца, действующая на заряд e, равна $e(\mathbf{e} + c^{-1}[\mathbf{vh}])$. В уравнения Больцмана в форме (11) мы должны при $\alpha = e$, i подставить усредненную силу $\mathbf{F}_{e,i} = \mp e(\mathbf{E} + c^{-1}[\mathbf{vH}])$. Фактически это означает законность использования среднего макроскопического поля **E** в качестве *действующего* (*эффективного*) *поля* $\mathbf{E}_д$. В применении к плазме вопрос о действующем поле подробно рассматривался [11], и было твердо установлено, что

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_д.$$

Для использования этого равенства сейчас имеются вполне достаточные теоретические и экспериментальные основания. Далее его справедливость обсуждаться не будет.

Теперь выпишем в отсутствие сторонних источников кинетические уравнения для электронов и ионов:

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \mathbf{v}_e\nabla_\mathbf{r} f_e - e(\mathbf{E} + c^{-1}[\mathbf{v}_e\mathbf{H}])\frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}_e} = J_{ee} + J_{ei} + J_{en}, \qquad (2.1.31)$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v}_i\nabla_\mathbf{r} f_i + e(\mathbf{E} + c^{-1}[\mathbf{v}_i\mathbf{H}])\frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{v}_i} = J_{ie} + J_{ii} + J_{in}. \qquad (2.1.32)$$

Напомним, что e — абсолютная величина заряда электрона. В (31), (32) учтены только электродинамические силы. При этом поля **E** и **H** самосогласованы с уравнениями электродинамики (23)—(26). Слагаемые с J в правых частях (31), (32) отражают вклад столкновений, включая и столкновения заряженных частиц с нейтральными.

В плазме, состоящей из электронов и из однократно ионизированных положительных ионов одного сорта для плотностей ρ_t и $\mathbf{j}_t$, имеем

$$\rho_t = e\left(\int f_i d\mathbf{v}_i - \int f_e d\mathbf{v}_e\right), \qquad (2.1.33)$$

$$\mathbf{j}_t = e\left(\int \mathbf{v}_i f_i d\mathbf{v}_i - \int \mathbf{v}_e f_e d\mathbf{v}_e\right). \qquad (2.1.34)$$

Уравнения (23)—(26) совместно с (31)—(34) представляют связанную систему, из которой определяются как f_e и f_i, так и поля **E** и **H**. Такие поля называют самосогласованными. Описание плазмы, находящейся под воздействием полей, в самосогласован-

ном приближении было впервые проведено Власовым в 1937 г. В бесстолкновительном случае указанная система уравнений для полей и функций f_e и f_i называется *уравнениями Власова.*

Для перехода от (23)—(26) к обычным макроскопическим уравнениям Максвелла нужно разбить ток $\mathbf{j}_t$ на ток поляризации $\mathbf{j}_p$ и ток проводимости $\mathbf{j}$, так что

$$\mathbf{j}_t = \mathbf{j}_p + \mathbf{j} = \partial \mathbf{P}/\partial t + \mathbf{j}, \tag{2.1.35}$$

где $\mathbf{P}$ — вектор поляризации. Ток намагничения при $\mathbf{B} = \mathbf{H}$ отсутствует. Заряд ρ_t нужно разделить на свободный с плотностью ρ и связанный с плотностью $\rho_p = -\operatorname{div} \mathbf{P}$. С учетом сделанных замечаний вместо (23)—(25) имеем

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} (\mathbf{j} + \mathbf{j}_{\text{стор}}), \tag{2.1.36}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi (\rho + \rho_{\text{стор}}), \tag{2.1.37}$$

где $\mathbf{D}$ — вектор индукции, определяемый соотношением $\mathbf{D} = \mathbf{E} + 4\pi \mathbf{P}$. Уравнения (24), (26) не выписаны, так как их запись не меняется.

В последнее время, особенно в электродинамике сред с пространственной дисперсией, вводят обобщенный вектор индукции $\mathbf{D}'$, полагая

$$\partial \mathbf{D}'/\partial t = \partial \mathbf{E}/\partial t + 4\pi \mathbf{j}_t. \tag{2.1.38}$$

Тогда при учете (38) уравнения (23) и (25) можно записать в виде

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}'}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}_{\text{стор}}, \tag{2.1.39}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D}' = 4\pi \rho_{\text{стор}}. \tag{2.1.40}$$

Совместная система кинетических уравнений и уравнений электродинамики дает возможность анализировать как линейные, так и нелинейные явления. Несмотря на важность нелинейных эффектов, линейное приближение продолжает играть очень существенную роль. При не очень сильных полях можно написать общую линейную связь между $\mathbf{D}'(\mathbf{r}, t)$ и $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$. Примем, однако, что свойства среды неизменны во времени t. Тогда

$$D'_j(\mathbf{r}, t) = \int_{-\infty}^{t} dt' \int \tilde{\varepsilon}_{jk} (t - t', \mathbf{r}, \mathbf{r}') E_k (\mathbf{r}', t) \, d\mathbf{r}', \tag{2.1.41}$$

где по повторяющимся индексам производится суммирование. Связь (41) не является мгновенной. Поле $\mathbf{D}'(t)$ зависит не только от значений $\mathbf{E}$ в момент времени t, но и в предшествующие моменты времени $t' < t$. При этом в (41) учтен принцип причинности. В силу неизменности во времени свойств среды ядро интегрального оператора $\tilde{\varepsilon}_{jk}$ зависит только от разности $t - t'$. Связь (41) нелокальна, так как поле $\mathbf{D}'(\mathbf{r}, t)$ зависит от поля $\mathbf{E}(\mathbf{r}', t)$ и при $\mathbf{r}' \neq \mathbf{r}$.

Для пространственно однородной или слабонеоднородной плазмы можно вместо (41), обозначая $\rho = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$ и $\tau = t - t'$, написать

$$D_j'(\mathbf{r},\, t) = \int\limits_0^\infty \int \widetilde{\varepsilon}_{jk}(\tau,\, \rho)\, E_k(t - \tau,\, \mathbf{r} - \rho)\, d\tau d\rho. \qquad (2.1.42)$$

Если, используя фурье-разложения, представить поле $\mathbf{D}'$ и поле $\mathbf{E}$ в виде совокупности плоских волн, когда все компоненты меняются по закону $\exp(i\omega t - i\mathbf{kr})$ (ω — циклическая частота и $\mathbf{k}$ — волновой вектор), то связь (42) приобретает вид

$$D_j' = \varepsilon_{jk}' E_k, \qquad (2.1.43)$$

где $\varepsilon_{jk}'(\omega,\, \mathbf{k})$ — *тензор комплексной диэлектрической проницаемости*,

$$\varepsilon_{jk}' = \int\limits_0^\infty d\tau \int \exp\left[-i(\omega\tau - \mathbf{k}\rho)\right] \widetilde{\varepsilon}_{jk}(\tau,\, \rho)\, d\rho. \qquad (2.1.44)$$

Нелокальность связи между $\mathbf{D}'$ и $\mathbf{E}$ получает свое выражение в том, что согласно (44) ε_{jk}' зависит не только от частоты ω, но и от волнового вектора $\mathbf{k}$. В таких случаях говорят о *пространственной дисперсии*, тогда как зависимость ε_{jk}' от ω определяет временную (частотную) дисперсию. Из определения (44) следует свойство тензора

$$\varepsilon_{jk}'(-\omega,\, -\mathbf{k}) = \varepsilon_{jk}'^{*}(\omega,\, \mathbf{k}). \qquad (2.1.45)$$

2.2. Интеграл столкновений. Столкновительная и бесстолкновительная плазма

Как уже указывалось, в приземной и космической плазме приходится иметь дело с разнообразными состояниями ионизированного газа. Из-за разной ионизации, температуры и частоты рассматриваемых волновых процессов возможны самые разные подходы при оценке роли столкновений. Значительный интерес представляют диаметрально противоположные случаи, когда либо столкновения играют доминирующую роль, либо их влиянием можно полностью пренебречь (бесстолкновительная плазма). В различных условиях могут появиться как столкновения с нейтральными частицами, так и кулоновские.

В конкретных условиях возможны те или иные упрощения или же использование приближенных представлений интеграла столкновений. Среди таких относительно простых случаев находится задача об упругих столкновениях электронов с тяжелыми частицами с массой $M \gg m$ (m — масса электрона). Доля энергии, передаваемой при одном столкновении, мала и составляет $2m/M \ll 1$. В первом приближении столкновения сводятся к рассеянию электронов по направлениям. Так, скорости тяжелых частиц по сравнению со скоростями электронов малы, первые

приближенно можно считать «холодными» и их функцию распределения представить в виде

$$f_{i,n} = N_{i,n}\delta(\mathbf{v}_{i,n}), \tag{2.2.1}$$

где δ — это дельта-функция Дирака. Индексы i и n характеризуют ионы и нейтральные частицы. Подставляя (1) в (2.1.11), приходим к кинетическому уравнению для электронов

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \mathbf{v}_e\nabla_{\mathbf{r}}f_e + \frac{\mathbf{F}_e}{m}\nabla_{\mathbf{v}_e}f_e = J_{ei} + J_{en} + J_{ee} \tag{2.2.2}$$

с парциальными интегралами столкновений

$$\begin{aligned} J_{ei} &= v_e N_i \int q_{ei}(v_e, \theta)\left[f_e(\mathbf{v}_e') - f(\mathbf{v}_e)\right] d\Omega, \\ J_{en} &= v_e N_n \int q_{en}(v_e, \theta)\left[f_e(\mathbf{v}_e') - f(\mathbf{v}_e)\right] d\Omega, \\ J_{ee} &= \int \left|\mathbf{v}_e' - \mathbf{v}_e\right| q_{ee}(v_{ee}, \theta)\left[f_e^2(\mathbf{v}_e') - f^2(\mathbf{v}_e)\right] d\Omega. \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

В соотношениях (3) произведена замена $d\Omega'$ на $d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$. Для J_{ei} и J_{en} ее справедливость очевидна, так как при столкновениях с неподвижными рассеивателями $\theta = -\theta'$, что вытекает из геометрии прямого и обратного столкновений. Для простоты можно взять пример удара частиц о неподвижную стенку. При $\theta = -\theta'$ $\sin\theta\, d\theta = \sin\theta'\, d\theta'$, как следствие, $d\Omega = d\Omega'$. Подобная замена имеет общий характер и является следствием используемой в статистической механике теоремы Лиувилля [17]. Поэтому аналогичное изменение записи сделано и для J_{ee}.

Для плазмы, находящейся во внешнем магнитном поле $\mathbf{H}_0$, относительно просто провести учет столкновений в линейном случае и при пространственной однородности среды. Получаемые при этом формулы имеют многочисленные применения. Кроме того, они полезны при сравнении с выводами, вытекающими из решения более сложных задач.

В несильных полях функцию распределения $f(\mathbf{v})$ можно представить в виде

$$f(\mathbf{v}) = f_0(v) + f_1(\mathbf{v}), \tag{2.2.4}$$

где $|f_1| \ll f_0$. В силу малости поля $\mathbf{E}$ функция $f_{e0}(v_e)$ считается максвелловской (2.1.19). При этом полагаем, что средняя тепловая скорость $\bar{v}_e$ много больше упорядоченной, так что

$$f_0(v_e) = N_e\left(\frac{m}{2\pi\varkappa T_e}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv_e^2}{2\varkappa T_e}\right). \tag{2.2.5}$$

Считая однородными в пространстве не только концентрацию, но и функцию распределения f_1, мы фактически пренебрегаем в кинетическом уравнении (2.1.11) членом $\mathbf{v}_e\nabla_{\mathbf{r}}f_{e1}$. При распространении плоских волн, когда все переменные изменяются по закону $\exp(i\omega t - i\mathbf{kr})$, такое пренебрежение возможно при

$$\omega \gg kv_{T_e}. \tag{2.2.6}$$

Условие (6) означает, что фазовая скорость $v_\Phi = \omega/k$ существенно больше скорости теплового движения v_{T_e}. Для получения условия (6) нужно сравнить по абсолютному значению первое слагаемое слева в (2.1.11) со вторым. Если доминирующую роль играют столкновения, то вместо критерия (6) используется требование о малости длины свободного пробега по сравнению с толщиной скин-слоя.

Максвелловская функция (5) изотропна в пространстве скоростей. В следующем приближении, когда вводится функция f_1, имеются отклонения от изотропности. Метод учета этих отклонений хорошо разработан (подробное его изложение можно найти, например, в [11]). Выберем сферическую систему координат в пространстве скоростей v, ϑ и Φ, направив полярную ось в направлении плотности тока $\mathbf{j}_{et}$. Функцию $f_e(\mathbf{v}_e, \mathbf{r}, t)$ можно представить в виде ряда по сферическим функциям $Y_{lm}(\vartheta, \Phi)$. Первый член ряда дает изотропное распределение, а член с Y_{10} простейшим образом учитывает наличие анизотропии. Оказывается, что малость отношения $\delta = 2m/M \ll 1$, представляющего долю энергии, теряемой в среднем при одном столкновении с тяжелой частицей, позволяет в первом приближении ограничиться функциями Y_{00} и Y_{10} [11, 14].

Сказанное означает, что приближенно функцию распределения по скоростям можно искать в виде

$$f_e(\mathbf{v}_e) = f_{e0}(v_e) + \mathbf{v}_e \boldsymbol{\varphi}_1(v_e)/v_e. \tag{2.2.7}$$

В связи со вторым слагаемым в (7) заметим, что $Y_{10} = \cos\vartheta$. С другой стороны, учтем, что полярная ось была направлена по плотности тока $\mathbf{j}_{et}$. Так как второй член в (7) представляет скалярное произведение, то можно заключить, что вектор $\boldsymbol{\varphi}_1(v_e)$ должен быть направлен по $\mathbf{j}_{et}$. Это будет далее подтверждено, хотя вывод о коллинеарности $\boldsymbol{\varphi}_1$ и $\mathbf{j}_{et}$ очевиден из соображений симметрии.

Приближенный характер описания с использованием (7) в какой-то степени предопределен теми упрощениями интегралов столкновений для электронов, которые были сделаны при переходе к (3) в связи с предположением о полной неподвижности тяжелых частиц. С помощью (7) можно удовлетворить кинетическому уравнению без члена $\mathbf{v}_e \nabla_{\mathbf{r}} f_e$ и найти функцию $\boldsymbol{\varphi}_1$.

В то же время исключение этого члена не всегда можно считать правомерным даже в слабых полях, поскольку имеется очень много задач физики плазмы, при которых детальный учет теплового движения электронов (пространственной дисперсии) абсолютно необходим (гл. 4).

Подставляя (7) в кинетическое уравнение (2) при пренебрежении межэлектронными столкновениями, а также слагаемым $\mathbf{v}_e \nabla_{\mathbf{r}} f_e$, после линеаризации получаем

$$\frac{\partial \boldsymbol{\varphi}_1}{\partial t} - \frac{e}{m} \mathbf{E} \frac{d f_{e0}}{d v_e} - \frac{e}{mc}[\mathbf{H}_0 \boldsymbol{\varphi}_1] + [\nu_{en}(v_e) + \nu_{ei}(v_e)]\, \boldsymbol{\varphi}_1 = 0, \tag{2.2.8}$$

где

$$\nu_{en}(v_e) = v_e N_n \int q_{en}(v_e, \theta)(1-\cos\theta)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi,$$
$$\nu_{ei}(v_e) = v_e N_i \int q_{ei}(v_e, \theta)(1-\cos\theta)\sin\theta\, d\theta\, d\varphi. \qquad (2.2.9)$$

Величины ν_{en} и ν_{ei} имеют размерность частоты и характеризуют частоты столкновений электронов с нейтральными частицами и ионами для различных скоростей v_e. Переход к уравнению (8), дополненному определениями (9), требует целого ряда пояснений.

При этом переходе использовано выражение для силы Лоренца $\mathbf{F}_e = -e(\mathbf{E} + c^{-1}[\mathbf{v}_e\mathbf{H}_0])$. Эта сила рассматривается как внешняя. Другие внешние силы неэлектромагнитного происхождения не учитываются. Далее нужно иметь в виду, что после подстановки (7) в (2) при $J_{ee} = 0$ и линеаризации все слагаемые записываются однотипным образом: в виде скалярных произведений с общим сомножителем $\mathbf{v}_e/v_e$. Так как полученное соотношение справедливо при любых $\mathbf{v}_e$, можно вынести этот множитель за скобку и перейти к уравнению для φ_1 в векторной форме.

При формулировке второго члена слева в (8) использовалось равенство $\mathbf{E}\nabla_{\mathbf{v}_e} f_{e0}(v_e) = \frac{\mathbf{v}_e\mathbf{E}}{v_e}\frac{df_{e0}}{dv_e}$, справедливое при любых изотропных функциях $f_0(v)$. Остановимся подробнее на обосновании правильности записи в (8) слагаемого $\frac{e}{mc}[\mathbf{H}_0\varphi_1]$. В связи с этим рассмотрим выражение

$$A_e = [\mathbf{v}_e\mathbf{H}_0]\,\nabla_{\mathbf{v}_e}(\mathbf{v}_e\varphi_1/v_e),$$

определяющее степень влияния поля $\mathbf{H}_0$ на функцию φ_1. Именно такой член появится в (2), если использовать приближение (7). Определяя градиент от функции $\mathbf{v}_e\varphi_1(v_e)/v_e$ в пространстве скоростей, получим

$$\nabla_{\mathbf{v}_e}\left(\frac{\mathbf{v}_e\varphi_1(v_e)}{v_e}\right) = \frac{\varphi_1(v_e)}{v_e} + \xi_e\mathbf{v}_e. \qquad (2.2.10)$$

Зависимость ξ_e от v_e в (10) несущественна, и поэтому мы ее здесь в явном виде раскрывать не будем. Существенно лишь, что второй вектор справа в (10) коллинеарен $\mathbf{v}_e$. Умножая каждый из членов (10) на $[\mathbf{v}_e\mathbf{H}_0]$, имеем

$$[\mathbf{v}_e\mathbf{H}_0]\,\nabla_{\mathbf{v}_e}\left(\frac{\mathbf{v}_e\varphi_1}{v_e}\right) = [\mathbf{v}_e\mathbf{H}_0]\frac{\varphi_1(v_e)}{v_e}.$$

Используя известное векторное тождество $([\mathbf{cb}]\mathbf{a}) = (\mathbf{c}[\mathbf{ba}])$, мы можем правую часть последнего равенства записать в виде $\frac{\mathbf{v}_e}{v_e}[\mathbf{H}_0\varphi_1]$, что делает очевидным появление члена $-\frac{e}{mc}[\mathbf{H}_0\varphi_1]$ в (8).

Столкновение электронов с нейтральными частицами. Получим теперь соотношения для интегралов J_{en} и J_{ei}, из которых следует возможность записи (9). Остановимся для определенности на интеграле J_{en}, который при учете (7) определяется формулой

$$J_{en} = N_n \varphi_1(v_e) \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} q_{en}(\theta, v_e)\left(\mathbf{v}_e' - \mathbf{v}_e\right) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi. \quad (2.2.11)$$

Рассмотрим рассеяние на неподвижном центре под углом θ и представим скорость после рассеяния $\mathbf{v}'$ в виде суммы двух составляющих (рис. 2.1), полагая $\mathbf{v}' = \mathbf{v}\cos\theta + \mathbf{v}_\perp'$ при $v' = v$. Угол θ показан на рис. 2.1, а угол φ — это азимутальный угол в системе, где полярная ось направлена по скорости $\mathbf{v}$. После интегрирования по углу φ в (11) составляющая $\mathbf{v}_\perp'$ выпадает. Тогда из (11) имеем

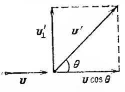

Рис. 2.1. Схема упругого рассеяния электрона на неподвижном центре.

$$J_{en} = v_e N_n \varphi_1(v_e) \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} (\cos\theta - 1)\, q_{en}(v_e, \theta) \times \sin\theta \, d\theta \, d\varphi,$$

откуда в соответствии с (9)

$$\nu_{en}(v_e) = 2\pi v_e N_n \int_0^{\pi} q_{en}(v_e, \theta)(1 - \cos\theta) \sin\theta \, d\theta. \quad (2.2.12)$$

Одной из главных характеристик рассеяния частиц является полное эффективное сечение, получаемое при усреднении дифференциального сечения по углам, так что

$$Q_{\text{полн}} = 2\pi \int_0^{\pi} q_{en}(v_e, \theta) \sin\theta \, d\theta. \quad (2.2.13)$$

Однако, как видно из (12), частота столкновений ν_{en} определяется не полным, а транспортным сечением

$$Q_{\text{тр}} = 2\pi \int_0^{\pi} q_{en}(v_e, \theta)(1 - \cos\theta) \sin\theta \, d\theta. \quad (2.2.14)$$

Если дифференциальное сечение от угла θ не зависит, то $Q_{\text{полн}} = Q_{\text{тр}}$. Различия между сечениями (13) и (14) при наличии зависимости q_e от θ связаны с тем, что уравнение (8), куда входят частоты столкновений ν_{en} и ν_{ei} с транспортным сечением, обеспечивает «в первую очередь» выполнение закона сохранения импульса. Фактор $(\cos\theta - 1)$ появляется в (11) из-за разности скоростей $\mathbf{v}_e' - \mathbf{v}_e$. Но именно величина $m\left(\mathbf{v}_e' - \mathbf{v}_e\right)$ и характеризует изменения импульса электрона при столкновении.

Определим величину полного усредненного тока, плотность которого $\mathbf{j}_{et}$ для электронов можно найти из соотношения

$$\mathbf{j}_{et} = -e \int \mathbf{v}_e f(\mathbf{v}_e)\, d\mathbf{v}_e. \qquad (2.2.15)$$

Для распределения (7) с учетом изотропности $f_{e0}(v_e)$, в силу чего $\int \mathbf{v}_e f_{e0}\, d\mathbf{v}_e = 0$, из (15) имеем

$$\mathbf{j}_{et} = -e \int [(\mathbf{v}_e \boldsymbol{\varphi}_1)\, \mathbf{v}_e / v_e]\, d\mathbf{v}_e. \qquad (2.2.16)$$

Из соображений симметрии очевидно, что отличаться от нуля будет только компонента $\mathbf{j}_{et}$, ориентированная вдоль вектора $\boldsymbol{\varphi}_1$. Определим ее, вводя в пространстве скоростей систему координат v_x, v_y и v_z. Направим $\boldsymbol{\varphi}_1$ вдоль оси v_z, как это показано на рис. 2.2. Заменим $d\mathbf{v} = dv_x dv_y dv_z$ на $v^2 dv \sin\tilde{\theta}\, d\tilde{\theta}\, d\tilde{\varphi}$ и для определенности будем считать, что скорость $\mathbf{v}$ лежит в плоскости v_x, v_z (это ограничение ничего не меняет). Тогда из (16) после интегрирования по углу $\tilde{\varphi}$

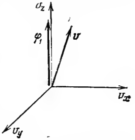

Рис. 2.2. Вспомогательная система координат, используемая при вычислении плотности тока.

$$j_{etx} = -2\pi e \int_0^{\pi}\int_0^{\infty} v^3 \varphi_1(v) \cos^2\tilde{\theta} \cos\tilde{\theta}\, d\tilde{\theta}\, dv.$$

Так как $\int_0^{\pi} \sin^2\tilde{\theta}\cos\tilde{\theta}\, d\tilde{\theta} = 0$, то компонента j_{etx} исчезает. Это относится и к j_{ety}. Для компоненты j_{etz} имеем

$$j_{etz} = -2\pi e \int_0^{\pi}\int_0^{\infty} v^3 \varphi_1(v) \sin^2\tilde{\theta} \sin\tilde{\theta}\, d\tilde{\theta}\, dv.$$

Учитывая, что $\int_0^{\pi} \cos^2\tilde{\theta} \sin\tilde{\theta}\, d\theta = 2/3$, и суммируя все сведения, окончательно имеем

$$\mathbf{j}_{et} = -\frac{4\pi e}{3} \int_0^{\infty} v^3 \boldsymbol{\varphi}_1(v)\, dv. \qquad (2.2.17)$$

Формула (17) подтверждает допущение о коллинеарности $\mathbf{j}_{et}$ и функции $\boldsymbol{\varphi}_1$.

Все проведенное рассмотрение можно применить и для кулоновских столкновений, заменив индекс n на i. Здесь различия между $Q_{\text{полн}}$ и $Q_{\text{тр}}$ имеют первостепенное значение. Особенности кулоновского взаимодействия еще будут подробно рассматриваться далее.

Для гармонических во времени процессов, когда $\boldsymbol{\varphi}_1 \propto \exp(i\omega t)$, из (8) получаем

$$(i\omega + \nu_e)\, \boldsymbol{\varphi}_1 + \omega_H [\boldsymbol{\varphi}_1 \mathbf{h}_0] = \frac{e}{m} \mathbf{E} \frac{df_{e0}}{dv_e}, \qquad (2.2.18)$$

где ω_H — гирочастота электронов, $\mathbf{h}_0$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{H}_0$, $\nu_e = \nu_{en} + \nu_{ei}$. Для определения $\boldsymbol{\varphi}_1$ в явном виде можно воспользоваться известным соотношением векторной алгебры. Пусть вектор $\mathbf{p}$ удовлетворяет уравнению $a\mathbf{p} + b[\mathbf{ph}_0] = \mathbf{c}$. Тогда, как легко убедиться,

$$\mathbf{p} = \frac{a}{a^2 + b^2}\left\{\mathbf{c} - \frac{b}{a}[\mathbf{ch}_0] + \frac{b^2}{c^2}\mathbf{h}_0(\mathbf{h}_0\mathbf{c})\right\}.$$

Используя эту формулу, из (18) получаем

$$\boldsymbol{\varphi}_1 = \frac{e}{m}\frac{df_{e0}}{dv_e}\frac{\nu_e + i\omega}{(\nu_e + i\omega)^2 + \omega_H^2} \times$$
$$\times \left\{\mathbf{E} - \frac{\omega_H}{i\omega + \nu_e}[\mathbf{Eh}_0] + \frac{\omega_H^2}{(\nu_e + i\omega)^2}\mathbf{h}_0(\mathbf{Eh}_0)\right\}. \qquad (2.2.19)$$

При произвольной ориентации полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}_0$ формулы для компонент тока довольно громоздки. Выбирая систему координат с осью z' вдоль направления $\mathbf{H}_0$, получим выражения для плотностей токов вдоль $\mathbf{H}_0$ и перпендикулярно к нему. Проектируя каждый из членов уравнения (19) на $\mathbf{H}_0$, имеем

$$\varphi_{1z'} = \frac{eE_{z'}}{m(\nu_e + i\omega)}\frac{df_{e0}}{dv_e}. \qquad (2.2.20)$$

Аналогичная формула получается и в отсутствие магнитного поля, когда

$$\boldsymbol{\varphi}_1 = \frac{e\mathbf{E}}{m(\nu_e + i\omega)}\frac{df_{e0}}{dv_e}. \qquad (2.2.20а)$$

При нахождении проекций $\varphi_{1x'}$ и $\varphi_{1y'}$ последнее слагаемое в фигурной скобке (19) вклада не дает. Здесь удобнее рассматривать комбинации $\varphi_{1x'} \pm i\varphi_{1y'}$, для которых получаем

$$\varphi_{1x'} \pm i\varphi_{1y'} = \frac{e(E_x \pm iE_y)}{m[i(\omega \mp \omega_H) + \nu_e]}\frac{df_{e0}}{dv_e}. \qquad (2.2.21)$$

После подстановки в (17) максвелловского распределения (5) и замены переменной $v_e = \sqrt{2\varkappa T_e/m}\, w$ приходим к формулам

$$j_{ez'} = \frac{8e^2N_eE_{z'}}{3\sqrt{\pi}m}\int_0^\infty \frac{w^4\exp(-w^2)}{i\omega + \nu_e(w)}\,dw = \frac{i\omega}{4\pi}\left(\varepsilon'_{z'z'} - 1\right)E_{z'}, \quad (2.2.22)$$

$$j_{ex'} \pm ij_{ey'} = \frac{8e^2N_e(E_{x'} \pm iE_{y'})}{3\sqrt{\pi}\,m}\int_0^\infty \frac{w^4\exp(-w^2)}{i(\omega \mp \omega_H) + \nu_e(w)}\,dw =$$
$$= \frac{i\omega}{4\pi}\left(\varepsilon'_{x'x'} - 1 \pm i\varepsilon'_{x'y'}\right)(E_{x'} \pm iE_{y'}). \quad (2.2.23)$$

Итак, в (22), (23) представлены компоненты тензора комплексной диэлектрической проницаемости столкновительной магнитоактивной плазмы за счет движения электронов без учета пространственной дисперсии. Согласно (2.1.38) и (2.1.43) $4\pi j_{tj} = (\varepsilon'_{jk} - 1) i\omega E_k$, что и использовано при записи (22), (23). Из (22), (23) получаем для компонент тензора

$$\varepsilon'_{z'z'} = 1 - \frac{32i\sqrt{\pi}\, e^2 N_e}{3m\omega} \int_0^\infty \frac{w^4 \exp(-w^2)\, dw}{i\omega + \nu_e(w)}, \qquad (2.2.24)$$

$$\varepsilon'_{x'x'} \pm i\varepsilon'_{x'y'} = \varepsilon'_{y'y'} \pm i\varepsilon_{y'x'} = 1 - \frac{32i\sqrt{\pi}\, e^2 N_e}{3m\omega} \int_0^\infty \frac{w^4 \exp(-w^2)\, dw}{i(\omega \mp \omega_H) + \nu_e(w)}.$$

Если частота столкновений $\nu_e(w)$ не зависит от v_e или эта зависимость малосущественна, то мы приходим к формулам так называемой элементарной теории *). Так как $\int_0^\infty \exp(-w^2)\, w^4 dw = 3\sqrt{\pi}/8$, находим

$$\varepsilon'_{x'x'} = \varepsilon'_{y'y'} = 1 - \frac{\omega_{e0}^2(\omega - i\nu_{\text{эф}})}{\omega\left[(\omega - i\nu_{\text{эф}})^2 - \omega_H^2\right]} = 1 - \frac{v_e(1 - is_e)}{(1 - is_e)^2 - u_e},$$

$$\varepsilon'_{x'y'} = -\varepsilon'_{y'x'} = -i\frac{\omega_{e0}^2\omega_H}{\omega\left[(\omega - i\nu_{\text{эф}})^2 - \omega_H^2\right]} = -i\frac{v_e\sqrt{u_e}}{(1 - is_e)^2 - u_e}, \qquad (2.2.25)$$

$$\varepsilon'_{z'z'} = 1 - \frac{\omega_{e0}^2}{\omega(\omega - i\nu_{\text{эф}})} = 1 - \frac{v_e}{1 - is_e},$$

где введены безразмерные переменные, часто используемые в теории распространения электромагнитных волн в плазме:

$$v_e = \omega_{e0}^2/\omega^2, \quad u_e = \omega_H^2/\omega^2, \quad s_e = \nu_{\text{эф}}/\omega,$$

где $\omega_{e0} = (4\pi e^2 N_e/m)^{1/2}$ — *электронная плазменная частота*. Напоминая, что соотношения (25) выписаны в системе, где внешнее магнитное поле $\mathbf{H}_0$ ориентировано по оси z', отметим, что даже в этой системе тензор ε'_{jk} не является диагональным.

Остановимся теперь более подробно на вопросе об эффективных числах столкновений для плазмы в отсутствие магнитного поля $\mathbf{H}_0$. Формулы здесь можно получить, опираясь на (20а)

---

*) В иностранной литературе ее иногда называют магнитоионной.

и (22). В результате имеем

$$\mathbf{j}_{et} = \frac{8e^2 N_e \mathbf{E}}{3\sqrt{\pi}\, m} \int_0^\infty \frac{w^4 \exp(-w^2)\, dw}{i\omega + \nu_e(w)} = \frac{i\omega}{4\pi}(\varepsilon' - 1)\,\mathbf{E}. \qquad (2.2.26)$$

Учитывая, что $\varepsilon' = \varepsilon - i4\pi\sigma/\omega$, и отделяя действительную и мнимую части, приходим к формулам

$$\varepsilon = 1 - \frac{32\sqrt{\pi}\, e^2 N_e}{3m} \int_0^\infty \frac{w^4 \exp(-w^2)}{\nu_e^2(w) + \omega^2}\, dw,$$
$$\sigma = \frac{8e^2 N_e}{3\sqrt{\pi}\, m} \int_0^\infty \frac{\nu_e(w) \exp(-w^2)}{\nu_e^2(w) + \omega^2}\, dw. \qquad (2.2.27)$$

Эффективная частота столкновений, по определению, вводится при сравнении соотношений (26) с формулами элементарной теории, когда

$$\varepsilon = 1 - \frac{4\pi e^2 N_e}{m\left(\omega^2 + \nu_{\text{эф}}^2\right)}, \quad \sigma = \frac{e^2 N_e \nu_{\text{эф}}}{m\left(\omega^2 + \nu_{\text{эф}}^2\right)}. \qquad (2.2.28)$$

Однозначное введение $\nu_{\text{эф}}$, таким образом, невозможно, что связано с зависимостью получаемых результатов для $\nu_{\text{эф}}$ от частоты ω. Однако эти отличия не очень велики [11]. Мы будем здесь при указанном сравнении опираться на высокочастотный случай

$$\omega^2 \gg \nu_{\text{эф}}^2, \qquad (2.2.29)$$

когда из сопоставления соотношений (27) и (28) для σ

$$\nu_{\text{эф}} = \frac{8}{3\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \nu_e(w)\, w^4 \exp(-w^2)\, dw. \qquad (2.2.30)$$

Для диэлектрической проницаемости ε в условиях (29) можно приближенно использовать формулу $\varepsilon = 1 - \omega_{e0}^2/\omega^2$, в которую ν_e не входит.

При столкновениях электронов с нейтральными частицами (атомами, молекулами), разумеется, имеется зависимость q_{en} от v_e, но она часто оказывается не очень резкой. Поэтому имеет смысл, особенно в отсутствие каких-то универсальных теоретических зависимостей для $q_{en}(v_e, \theta)$, использовать простейшую аппроксимацию, моделируя столкновение электрона с нейтральной частицей как столкновение точечной частицы с шариком радиуса a. Выбор a можно достаточно обоснованно осуществить не в любых условиях, а при фиксации какого-то определенного интервала температур (желательно более узкого), в котором находится плазма.

Тогда дифференциальное сечение логично взять в виде $q_{en} = a^2/4$, так что полное сечение $Q_{\text{полн}} = \pi a^2$. Транспортное сечение

при используемой идеализации совпадает с полным, тогда из (30)

$$\nu_{en}(v_e) = \pi a^2 v_e N_n. \tag{2.2.31}$$

Подставляя (31) в (30), делая замену переменной $v_e = \sqrt{2\varkappa T_e/m}w$ и учитывая, что $\int\limits_0^\infty w^5 \exp(-w^2)\,dw = 1$, имеем

$$\nu_{\text{эф}} = (8\sqrt{2}/3)\sqrt{\pi}\, a^2 v_{T_e} N_n, \tag{2.2.32}$$

где $v_{T_e} = \sqrt{\varkappa T_e/m}$. Часто при записи формулы типа (32) используется среднеарифметическая скорость $v_{Ae} = \sqrt{8\varkappa T_e/\pi m}$. Тогда (32) приобретает вид

$$\nu_{\text{эф}} = (4/3)\pi a^2 v_{Ae} N_n. \tag{2.2.32a}$$

Так как размер атомов (молекул) порядка 10^{-8} см, то сечение $\pi a^2 \approx 10^{-15}$—10^{-16} см^2.

Кулоновские столкновения. Несколько сложнее обстоит дело с кулоновскими столкновениями, когда сечение явно зависит как от v_e, так и угла θ. В силу существенного вклада далеких пролетов возникает даже вопрос о применимости в этом случае стандартной схемы, опирающейся на кинетическое уравнение Больцмана [6, 7, 20].

При столкновениях электронов с ионами дифференциальное сечение рассеяние определяется известной формулой Резерфорда [18]

$$q_{ei} = \frac{1}{4}\left(\frac{e^2}{mv_e^2}\right)^2\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-4}. \tag{2.2.33}$$

При подстановке его значения в (9) возникает расходимость при малых углах θ. Поэтому нужно интегрировать по θ до какого-то минимального угла $\theta_{\min}$. Определенному углу θ в кулоновском поле отвечает прицельное расстояние $\rho_e = (e^2/mv_e^2)\operatorname{ctg}(\theta/2)$ [18], а минимальному углу $\theta_{\min}$ — максимальное значение $\rho_{e\max} = (e^2/mv_e^2)\operatorname{ctg}\theta_{\min}$.

Подставив в (9) сечение (33), получим

$$\nu_{ei}(v_e) = \frac{\pi e^4 N_i}{2m^2 v_e^3}\int\limits_{\theta_{\min}}^{\pi}(1-\cos\theta)(\sin\theta/2)^{-4}\sin\theta\, d\theta. \tag{2.2.34}$$

Интегрирование можно провести с учетом всех деталей. Однако, как будет разъяснено, все рассмотрение применимо фактически только при $\theta_{\min} \ll 1$, $\rho_{e\max} \gg e^2/mv_e^2$. Поэтому можно в первом приближении разложить в подынтегральном выражении (34)

все функции угла θ в ряды вблизи $\theta=0$, что приводит к результату

$$\nu_{ei}=\frac{4\pi e^4 N_i}{m^2 v_e^3}\ln\theta_{\min}=\frac{4\pi e^4 N_i}{m^2 v_e^3}\ln\left(\rho_{e\max}\frac{mv_e^2}{e^2}\right). \qquad (2.2.35)$$

Выражение вида $\ln\left(\rho_{e\max}mv_e^2/e^2\right)$, которое входит в формулы для сечений и частот столкновений, называют *кулоновским логарифмом*. Появление масштаба $\rho_{e\,\max}$, как уже указывалось, объясняется расходимостью сечения $Q_{\text{тр}}$ при идеальном кулоновском взаимодействии. На самом деле идеальная картина не реализуется, так как поле «данного» иона экранируется другими электронами и ионами.

Рассмотрим простейший вариант такой экранировки в стационарных условиях. Поле выбранного положительного заряда с потенциалом $\varphi(r)$ (r — расстояние от этого иона) в сферически симметричном случае при учете окружающих электронов и ионов определяется из уравнения Лапласа

$$\Delta\varphi=\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d\varphi}{dr}=-4\pi e\delta(r)-4\pi(\rho_e+\rho_i)_{\text{экр}}, \qquad (2.2.36)$$

где первый член справа определяется зарядом центрального иона, а $\rho_{e\,\text{экр}}$ и $\rho_{i\,\text{экр}}$ представляют собой плотности экранирующих зарядов. Последние находятся из распределения Больцмана, которое может быть получено для системы слабовзаимодействующих зарядов во внешнем поле на основе общих положений классической статистической механики [8—10]. Отклонения от однородности определяются фактором $\exp(-\Delta E/\varkappa T)$, где ΔE — потенциальная энергия частицы во внешнем поле. Применяя формулу Больцмана, имеем

$$(\rho_e+\rho_i)_{\text{экр}}=e[N_i\exp(-e\varphi/\varkappa T)-N_e\exp(e\varphi/\varkappa T)],$$

где температуры электронов и ионов для простоты считаем одинаковыми. Считая, что в среднем справедлива квазинейтральность плазмы ($N_e\approx N_i=N$), получаем

$$(\rho_e+\rho_i)_{\text{экр}}=eN\{\exp(-e\varphi/\varkappa T)-\exp(e\varphi/\varkappa T)\}\approx-\frac{2e^2N}{\varkappa T}\varphi. \qquad (2.2.37)$$

Последний переход основан на условии $e\varphi\ll\varkappa T$, для чего есть все основания. В п. 1 гл. 2 подчеркивалось, что газовое приближение для плазмы справедливо при ограничении (2.1.22). Оно означает, что средняя энергия электростатического взаимодействия в плазме должна быть много меньше кинетической энергии. При упрощении (37) $e\varphi\ll\varkappa T$, если $\varphi\sim e/r\sim eN^{1/3}$, легко прийти к ограничению (2.1.22). Учитывая (37), приходим из (36) к уравнению

$$\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d\varphi}{dr}-\frac{8\pi e^2N}{\varkappa T}\varphi=-4\pi e\delta(r). \qquad (2.2.38)$$

Без учета экранирования оно определяет потенциал $\varphi = e/r$ точечного заряда e в свободном пространстве. Учет экранировки, как можно убедиться прямой подстановкой, приводит к модификации

$$\varphi = (e/r)\exp(-r/\tilde{r}_D), \qquad (2.2.39)$$

где $\tilde{r}_D$ — дебаевский радиус, $\tilde{r}_D = (\varkappa T/8\pi e^2 N)^{1/2}$. Он определяет характерный масштаб экранирования. При $r \gg \tilde{r}_D$ поле заряда полностью экранировано. Ранее уже фигурировало расстояние $r_D = (\varkappa T/4\pi e^2 N)^{1/2}$ в связи с упоминанием о распространении продольных волн. Так как $\tilde{r}_D = r_D/\sqrt{2}$, то оба расстояния мы будем называть одинаково — дебаевским радиусом. Заметим, что в неизотермической плазме

$$\tilde{r}_D = [\varkappa T_i T_e/4\pi e^2 (T_e + T_i) N]^{1/2}$$

и при $T_e \gg T_i$ $\tilde{r}_D = (\varkappa T_i/4\pi e^2 N)^{1/2}$.

Учитывая резкий характер обрезания φ согласно (39) и тот факт, что величина $(e^2/mv_e^2)^{-1}\rho_{e\,\max}$ входит в (35) под знаком ln, можно принять

$$\rho_{e\,\max} = \tilde{r}_D = (\varkappa T/8\pi e^2 N)^{1/2}. \qquad (2.2.40)$$

Для обеспечения хорошей точности необходимо, чтобы под знаком логарифма в (35) стояло большое число. Оценивая величину $(e^2/mv_e^2)^{-1}\rho_{e\,\max}$ при $v_e^2 = v_{T_e}^2 = \varkappa T/m$ и используя (40), имеем

$$\tilde{r}_D \gg r_{\text{неэкр}}, \qquad (2.2.41)$$

где $r_{\text{неэкр}} = e^2/\varkappa T$ — *неэкранированный радиус кулоновского взаимодействия*. Ограничение (41) означает, что экранировка не является сильной (иначе мы имели бы $\tilde{r}_D \sim r_{\text{неэкр}}$). С другой стороны, условие (41) можно записать в виде $8\pi e^4 N^{2/3} \ll \varkappa^2 T^2$, что эквивалентно для плазмы использованию газового приближения (2.1.22). Более того, само введение дебаевского радиуса, основанное на статистическом подходе, предполагает наличие большого числа частиц в дебаевской сфере $(4/3)\pi r_D^3$. Отсюда вытекает требование $(4/3)\pi r_D^3 \gg N^{-1}$, поскольку N^{-1} составляет средний объем, приходящийся на одну частицу. Используя (40), мы вновь приходим к условию (2.1.22), что говорит о его важности. Действительно, это условие обеспечивает саму возможность использования схемы с дебаевским экранированием. Само ограничение (2.1.22) можно записать также в виде $r_{\text{неэкр}} \ll N^{-1/3}$. Итак, мы приходим к следующей последовательности характерных для плазмы масштабов:

$$r_{\text{неэкр}} \ll \bar{r} \ll \tilde{r}_D \ll L, \qquad (2.2.42)$$

где предполагается, что $\bar{r} \sim N^{-1/3}$. Под L понимается макромасштаб (длина волны, характерный масштаб течений и т. п.). При несоблюдении иерархии масштабов (42) обычные способы теоре-

тического исследования процессов в плазме становятся неправомерными и требуется специальное рассмотрение.

Используя (35) и условие экранировки (40), можно получить соотношение для эффективной частоты соударений $\nu_{эф}$. Применяя стандартную замену переменных в (35), при учете (30) имеем

$$\nu_{эф} = \frac{8\sqrt{2\pi}}{3}\frac{e^4}{m^2}\left(\frac{m}{\varkappa T}\right)^{3/2}\int_0^\infty w \ln(\xi w^2)\exp(-w^2)\,dw,$$

где обозначено $\xi = 2\tilde{r}_D \varkappa T/e^2$. Эта величина порядка $\tilde{r}_D/r_{неэкр}$ и согласно (42) можно всегда считать $\xi \gg 1$. После замены переменной интегрирования $\xi w^2 = x$ из последней формулы имеем

$$\nu_{эф} = \frac{4\sqrt{2\pi}}{3}\frac{e^2}{m^2}\left(\frac{m}{\varkappa T}\right)^{3/2}\xi^{-1}\int_0^\infty \exp(-x/\xi)\ln x\,dx.$$

Используя соотношение $\int\limits_0^\infty \exp(-px)\ln x\,dx = -(2p)^{-1}(C + \ln p)$,

где $C = 0{,}577$ — постоянная Эйлера, получаем известную формулу, имеющую многочисленные применения, а именно,

$$\nu_{эф} = \frac{4\sqrt{2\pi}}{3}\frac{e^4}{\varkappa^2 T^2}N_i\left(\frac{\varkappa T}{m}\right)^{1/2}\ln\frac{2\tilde{r}_D \varkappa T}{1{,}78 e^2}. \qquad (2.2.43)$$

Если не считаться с фактором 1,78 под знаком логарифма, учет которого не имеет радикального значения при больших параметрах ξ, то формула (43) может быть получена при упрощении процесса интегрирования, когда

$$\int_0^\infty w\ln(\xi w^2)\exp(-w^2)\,dw \simeq \ln\xi\int_0^\infty w\exp(-w^2)\,dw = \ln\xi/2.$$

В связи с многочисленными применениями (43) используют соотношение, где частота столкновений $\nu_{эф}$ выражена в численном виде (в $с^{-1}$). Подставляя значение постоянных $\varkappa$ и e, имеем при $N_e = N_i = N$

$$\nu_{эф} = 5{,}5 T^{-3/2} N \ln(220 T N^{-1/3}), \qquad (2.2.44)$$

где концентрация N задана в $см^{-3}$, а температура T — в кельвинах. Особенно примечательной является зависимость $\nu_{эф} \propto T^{-3/2}$ (логарифмический рост $\nu_{эф}$ с увеличением T менее существен). Из нее следует, что при прочих равных условиях значения $\nu_{эф}$ меньше для высокотемпературной плазмы, чем для низкотемпературной. Такое «нестандартное» поведение $\nu_{эф}$ предопределено видом дифференциального сечения для кулоновских столкновений (33), которое уменьшается с ростом энергии электронов.

Кратко остановимся на межэлектронных столкновениях, представленных в (2.1.31) членом J_{ee}. Роль этих соударений по сравнению со столкновениями электронов с ионами при $\omega^2 \gg \nu_{эф}$ (29)

малосущественна. В основе этого утверждения лежит тот факт, что электрон-электронные столкновения сами по себе среднего тока изменить не могут. Это можно понять на примере элементарного акта столкновений электронов 1 и 2 при прямом ударе (вдоль оси x). Учитывая одинаковую массу частиц, из законов сохранения (2.1.1) в системе, где частица 2 до удара покоилась, имеем $v_{e1x} = v'_{e1x} + v'_{e2x}$ и $v^2_{e1x} = (v'_{e1x})^2 + (v'_{e2x})^2$. Отсюда следует, что $v'_{e1x} = 0$ и $v_{e1x} = v'_{e2x}$. Таким образом, отличная от нуля компонента тока $- ev_{e1x}$ после удара не изменяется. Переход к косому удару, когда появляются, например, компоненты скорости после удара $v'_{e1y} \neq 0$ и $v_{e2y} \neq 0$, вывода о неизменности тока не меняет, так как из сохранения y-компоненты импульса $v'_{e1y} = - v'_{e2y}$.

Эта особенность межэлектронных столкновений приводит к выводу, что о каком-то вкладе этих столкновений можно говорить только при наличии соударений, характеризуемых частотами ν_{ei} и ν_{en}. Если сделать предположение, подтверждаемое существующими расчетами, что характерная частота межэлектронных столкновений ν_{ee} не больше частоты ν_{ei}, то возникает следующая ситуация. Обратимся к уравнению (8). Без учета влияния магнитного поля, но при учете рассматриваемых столкновений, это уравнение можно написать в виде

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial t} + \nu_e \varphi_1 + \widehat{L}_{ee}\varphi_1 = \frac{e}{m}\mathbf{E}\frac{df_{e0}(v_e)}{dv_e}, \qquad (2.2.45)$$

где $\widehat{L}_{ee}$ — некоторый линейный оператор. При этом $|\widehat{L}_{ee}\varphi_1| < \nu_{ei}\varphi_1$. При сделанных оговорках решение (45), если $\omega^2 \gg \nu^2_{эф}$, определяется в первом приближении формулой $\varphi_1 = -\frac{e\mathbf{E}}{i\omega m}\frac{df_{e0}(v_e)}{dv_e}$, в которую столкновения вообще не входят. При таких φ_1 в силу общих свойств межэлектронных столкновений $\widehat{L}_{ee}\varphi_1 = 0$. Поправки появляются по мере учета частоты ν_e. Согласно расчетам [19] в столкновительной плазме при $\omega^2 \ll \nu^2_{эф}$ учет члена $\widehat{L}_{ee}\varphi_1$ приводит к приближенному увеличению $\nu_{эф}$ в 1,73 раза. В целом же учет межэлектронных столкновений в последовательной форме на основе использования интеграла J_{ee} (3) приводит к очень сильному усложнению расчетов. Особенно это относится к магнитоактивной плазме.

Замечания о малосущественности столкновений одинаковых частиц при $\mathbf{H}_0 = 0$ можно использовать и для взаимодействия ионов с ионами (для одинаковых ионов). Из-за невозможности использовать упрощения, характерные для рассеяния легких частиц на тяжелых, последовательное рассмотрение межионных столкновений является очень сложным.

Несмотря на обоснованность вывода формул (43), (44) и их частое использование (по крайней мере как приближенные зависимости), имеется значительная литература, где более подробно учитывается специфический характер кулоновских столкновений.

Специфика связана с медленным убыванием потенциала взаимодействия, что в отсутствие экранировки приводит к расходимости интеграла столновений. То обстоятельство, что при учете дебаевского экранирования мы вправе использовать неравенство $\tilde{r}_D \gg r_{\text{неэкр}}$ (41), свидетельствует о существенном вкладе пролетов с большими прицельными расстояниями ($\rho_e \gg r_{\text{неэкр}}$; $\rho_e \leqslant r_D$). При таких пролетах рассеяние сопровождается относительно небольшими изменениями импульсов, что позволяет рассматривать процесс столкновений (по крайней мере частично) как диффузию в пространстве скоростей. Оказывается возможным представление интеграла столкновений в виде

$$J_{\alpha\beta} = S_\alpha^\beta + S_\beta^\alpha = -\operatorname{div}_{\mathbf{v}} \mathbf{j}_\alpha^\beta. \tag{2.2.46}$$

По форме записи (46) аналогично слагаемому, описывающему в кинетическом уравнении влияние внешних сил и которое можно записать в виде $\operatorname{div}_{\mathbf{v}}(\mathbf{F}m^{-1}f)$ (2.1.3). Этот член в уравнении Больцмана обычно стоит в левой части, тогда как слагаемое (46) принято писать в правой части.

Запись (46) не является общей. Она возможна только при кулоновском взаимодействии со слабой экранировкой (41). Форма интеграла столкновений (46) была впервые найдена Ландау еще в 1936 г. Его результат получил многочисленные обобщения, которые представляют интерес, например, в применении к процессам в сильно неравновесной плазме. Эти обобщения важны для обоснования простых подходов, один из которых привел нас к известной формуле (43). Для квазиравновесной плазмы более глубокий анализ процесса кулоновских соударений, выходящий иногда за рамки кинетического уравнения Больцмана, не приводит к существенному изменению полученных ранее результатов.

Представление интеграла $J_{\alpha\beta}$ через поток (46) возможно после некоторых упрощений столкновительного члена в (2.1.11). При этом удобнее временно (только в этом параграфе) использовать при кинетическом подходе в качестве аргументов не скорости $\mathbf{v}_\alpha$ и $\mathbf{v}_\beta$, а импульсы $\mathbf{p}_\alpha = m_\alpha \mathbf{v}_\alpha$ и $\mathbf{p}_\beta = m_\beta \mathbf{v}_\beta$. Одновременно изменим условие нормировки: вместо используемого ранее $\int f_\alpha(\mathbf{v}_\alpha)\,d\mathbf{v}_\alpha = N_\alpha$ далее в данном параграфе считаем, что $\int f_\alpha(\mathbf{p}_\alpha)\,d\mathbf{p}_\alpha = N_\alpha$. При этом замечании интеграл столкновений в (2.1.11) можно записать в виде

$$J_{\alpha\beta} = \int\int \left[f_\alpha(\mathbf{p}'_\alpha) f_\beta(\mathbf{p}'_\beta) - f_\alpha(\mathbf{p}_\alpha) f_\beta(\mathbf{p}_\beta)\right] v_{\alpha\beta} q_{\alpha\beta}(v_{\alpha\beta}, \theta)\, d\mathbf{p}_\beta d\Omega'. \tag{2.2.47}$$

При взаимодействии электрона с однократным ионом формула Резерфорда для дифференциального сечения уже была приведена (33). В более общем случае

$$q_{\alpha\beta} = \left(\frac{e_\alpha e_\beta}{\mu_{\alpha\beta} v_{\alpha\beta}^2}\right)^2 \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{-4}, \tag{2.2.48}$$

где $\mu_{\alpha\beta} = m_\alpha m_\beta/(m_\alpha + m_\beta)$ — приведенная масса сталкивающихся частиц и $v_{\alpha\beta} = |\mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta|$ ($\mathbf{v}_{\alpha\beta} = \mathbf{v}_\alpha - \mathbf{v}_\beta$ — относительная скорость частиц). При рассматриваемых упругих ударах величина $\mathbf{v}_{\alpha\beta}$ одна и та же до и после столкновения. Все основные соотношения, связывающие скорости и импульсы до удара и после него в разных системах отсчета, приведены в [18]. Мы далее будем их использовать без детальных ссылок.

В условиях, когда интегрально энергия взаимодействия меньше кинетической энергии частиц, рассеяние происходит преимущественно на малые углы θ и можно принять, что относительные изменения импульса $\Delta\mathbf{p}$ при столкновениях малы. В силу сохранения импульса

$$\mathbf{p}'_\alpha - \mathbf{p}_\alpha = \Delta\mathbf{p} = -\mathbf{p}'_\beta + \mathbf{p}_\beta. \qquad (2.2.49)$$

Найдем зависимость $|\Delta\mathbf{p}| = \Delta p$ от угла θ при столкновениях частиц α и β, считая последнюю покоящейся. Это не снижает общности получаемых формул, но упрощает выводы. При только что сделанной оговорке из (49) следует, что $\Delta\mathbf{p} = -\mathbf{p}'_\beta$. Далее, воспользуемся при $\mathbf{v}_\beta = 0$ известной формулой теории упругого удара

$$\mathbf{v}'_\beta = -\frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta} v_{\alpha\beta}\mathbf{n}_0 + \frac{m_\alpha}{m_\alpha + m_\beta}\mathbf{v}_\alpha, \qquad (2.2.50)$$

где $\mathbf{n}_0$ — единичный вектор в направлении частиц α после столкновения. Вводя это обозначение, заметим, что $\cos\theta = \mathbf{v}_\alpha\mathbf{n}_0/v_\alpha$. Умножая (50) на m_β, после возведения в квадрат правой и левой частей имеем $(p'_\beta)^2 = \mu^2_{\alpha\beta}(v^2_{\alpha\beta} + v^2_\alpha - 2v^2_\alpha\cos\theta)$. Так как было принято $\mathbf{v}_\beta = 0$ и указано на инвариантность $\mathbf{v}_{\alpha\beta}$, то это дает возможность прийти к результату $(p'_\beta)^2 = 2\mu^2_{\alpha\beta}v^2_{\alpha\beta}(1 - \cos\theta)$, так что окончательно

$$\Delta p = 2\mu_{\alpha\beta}v_{\alpha\beta}\sin(\theta/2). \qquad (2.2.51)$$

Откуда для сечения (48)

$$q_{\alpha\beta} = 4e^2_\alpha e^2_\beta\mu^2_{\alpha\beta}/(\Delta p)^4. \qquad (2.2.52)$$

В силу малости передаваемого импульса разложим с учетом (49) входящее в интеграл столкновений выражение

$$f_\alpha(\mathbf{p}'_\alpha) f_\beta(\mathbf{p}'_\beta) - f_\alpha(\mathbf{p}_\alpha) f_\beta(\mathbf{p}_\beta)$$

по степеням Δp до квадратичных членов включительно:

$$f_\alpha(\mathbf{p}'_\alpha) f_\beta(\mathbf{p}'_\beta) - f_\alpha(\mathbf{p}_\alpha) f_\beta(\mathbf{p}_\beta) = \Delta p_i\left(\frac{\partial}{\partial p_{\alpha i}} - \frac{\partial}{\partial p_{\beta i}}\right) f_\alpha(\mathbf{p}_\alpha) f_\beta(\mathbf{p}_\beta) +$$

$$+ \frac{1}{2}\Delta p_i \Delta p_j\left(\frac{\partial}{\partial p_{\alpha i}} - \frac{\partial}{\partial p_{\beta i}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial p_{\alpha j}} - \frac{\partial}{\partial p_{\beta j}}\right) f_\alpha(\mathbf{p}_\alpha) f_\beta(\mathbf{p}_\beta). \qquad (2.2.53)$$

Подставляя разложение (53) и соотношение (52) в (47) и опуская у функций f_α и f_β при их записи аргументы, что не должно привести к недоразумениям, получаем с учетом того, что индек-

сы i и j являются «немыми» (их можно взаимно менять местами)

$$J_{\alpha\beta} = 4e_\alpha^2 e_\beta^2 \mu_{\alpha\beta} \int\int \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial p_{\alpha i}} - \frac{\partial}{\partial p_{\beta i}} \right) \left[\frac{\Delta p_i \Delta p_j}{2(\Delta p)^4} v_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial}{\partial p_{\alpha j}} - \frac{\partial}{\partial p_{\beta j}} \right) f_\alpha f_\beta \right] + \right.$$
$$\left. + \left[\frac{v_{\alpha\beta}\Delta p_i}{(\Delta p)^4} - \left(\frac{\partial}{\partial p_{\alpha j}} - \frac{\partial}{\partial p_{\beta j}} \right) \frac{v_{\alpha\beta}\Delta p_i \Delta p_j}{2(\Delta p)^4} \right] \left(\frac{\partial}{\partial p_{\alpha i}} - \frac{\partial}{\partial p_{\beta i}} \right) f_\alpha f_\beta \right\} d\mathbf{p}_\beta d\Omega'. \tag{2.2.54}$$

Дальнейшие преобразования интеграла (54) довольно громоздки. Некоторые упрощения приносит использование формул, учитывающих свойства δ-функции Дирака. Методика расчетов опирается на § 35 монографии [20].

Подынтегральное выражение в (54) содержит сумму величин в двух квадратных скобках. Как будет установлено ниже, интегрирование по $d\Omega'$ второй скобки приводит к результату

$$\frac{1}{\mu_{\alpha\beta}} \int \left\{ \frac{v_{\alpha\beta}\Delta p_i}{(\Delta p)^4} - \left(\frac{\partial}{\partial p_{\alpha j}} - \frac{\partial}{\partial p_{\beta j}} \right) \frac{v_{\alpha\beta}\Delta p_i \Delta p_j}{2(\Delta p)^4} \right\} d\Omega' = 0. \tag{2.2.55}$$

Прежде чем перейти к подтверждению (55), получим вспомогательные соотношения [20], справедливые при малых Δp, а именно,

$$B_{\alpha\beta} = \int \delta(\Delta\mathbf{p} - \mu_{\alpha\beta}[v_{\alpha\beta}\mathbf{n}_0 - \mathbf{v}_{\alpha\beta}])\, d\Omega' \approx$$
$$\approx \frac{1}{\mu_{\alpha\beta}^2 v_{\alpha\beta}} \left\{ \delta(\mathbf{v}_{\alpha\beta}\Delta\mathbf{p}) + \frac{[\mathbf{v}_{\alpha\beta}\Delta\mathbf{p}]^2}{2\mu_{\alpha\beta}v_{\alpha\beta}^2} \delta'(\mathbf{v}_{\alpha\beta}\Delta\mathbf{p}) \right\}. \tag{2.2.56}$$

Появление дельта-функции с аргументом, представленным в (56), вытекает из закона сохранения импульса при ударе $\Delta\mathbf{p} = \mu_{\alpha\beta}[v_{\alpha\beta}\mathbf{n}_0 - \mathbf{v}_{\alpha\beta}]$, следующего из (50), когда формально принято $\mathbf{v}_\beta = 0$, и согласующегося с (51). Далее используем полярную систему координат с углами θ и φ. Поскольку речь идет только о вычислении интеграла, мы не будем вводить какие-то новые обозначения для углов. Направление полярной оси определяется вектором $\mathbf{v}_{\alpha\beta}$, вдоль которого направлен единичный вектор $\mathbf{n}_0$. Одновременно введем декартову систему координат, направив ось z по $v_{\alpha\beta}$, а ось x — перпендикулярно вектору $\Delta\mathbf{p}$. Тогда, используя четность δ-функции, имеем

$$B_{\alpha\beta} = \int d\Omega' \delta(\Delta\mathbf{p} - \mu_{\alpha\beta}[v_{\alpha\beta}\mathbf{n}_0 - \mathbf{v}_{\alpha\beta}]) = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \delta(\mu_{\alpha\beta}v_{\alpha\beta}\sin\theta\cos\varphi) \times$$
$$\times \delta(\Delta p_y - \mu_{\alpha\beta}v_{\alpha\beta}\sin\theta\sin\varphi)\, \delta[\Delta p_z + \mu_{\alpha\beta}v_{\alpha\beta}(1-\cos\theta)] \sin\theta\, d\theta\, d\varphi. \tag{2.2.57}$$

При интегрировании по углу φ определяющее значение имеет содержащаяся в подынтегральном выражении функция $\delta(\mu_{\alpha\beta}v_{\alpha\beta}\sin\theta\cos\varphi)$. Ее аргумент в интервале φ от 0 до 2π обращается в нуль при $\varphi_1 = \pi/2$ и при $\varphi_2 = 3\pi/2$. Учитывая эти обстоятельства, получаем

$$B_{\alpha\beta} = (\mu_{\alpha\beta}v_{\alpha\beta})^{-1} \int_0^{\pi} \delta[\Delta p_z + \mu_{\alpha\beta}v_{\alpha\beta}(1-\cos\theta)] \times$$
$$\times [\delta(\Delta p_y - \mu_{\alpha\beta}v_{\alpha\beta}\sin\theta) + \delta(\Delta p_y + \mu_{\alpha\beta}v_{\alpha\beta}\sin\theta)]\, d\theta. \tag{2.2.58}$$

Слабые изменения импульса в соответствии с (51) характеризуются малыми углами рассеяния. Также малыми можно считать и введенные при оп-

ределении (57), (58) углы θ. Разлагая подынтегральные выражения по степеням θ и ограничиваясь членами до квадратичных включительно, имеем

$$B_{\alpha\beta} = (\mu_{\alpha\beta} v_{\alpha\beta})^{-1} \int_0^\pi \delta\left(\Delta p_z + \mu_{\alpha\beta} v_{\alpha\beta} \theta^2/2\right) \times$$
$$\times [\delta(\Delta p_y - \mu_{\alpha\beta} v_{\alpha\beta}\theta) + \delta(\Delta p_y + \mu_{\alpha\beta} v_{\alpha\beta}\theta)]\, d\theta =$$
$$= \left(\mu_{\alpha\beta}^2 v_{\alpha\beta}^2\right)^{-1} \delta\left(\Delta p_z + (\Delta p_y)^2/2\mu_{\alpha\beta} v_{\alpha\beta}\right).$$

Учитывая, что $\Delta p_z = \mathbf{v}_{\alpha\beta}\Delta\mathbf{p}/v_{\alpha\beta}$ и $(\Delta p_y)^2 = [\mathbf{v}_{\alpha\beta}\Delta\mathbf{p}]^2/v_{\alpha\beta}^2$, оставляем только квадратичные члены из этого соотношения и приходим к приближенной формуле (56).

Располагая этой формулой, можно доказать в первую очередь правильность результата (55). При преобразованиях будем использовать новое интегрирование по $d(\Delta\mathbf{p})$, меняя порядок интегрирования по $d(\Delta\mathbf{p})$ и $d\Omega'$. Введение дифференциала $d(\Delta\mathbf{p})$, упрощающего в конечном счете проведение расчетов, основано на использовании соотношения

$$\int \delta\left[\Delta\mathbf{p} - \mu_{\alpha\beta}(v_{\alpha\beta}\mathbf{n}_0 - \mathbf{v}_{\alpha\beta})\right] d(\Delta\mathbf{p}) = 1.$$

С учетом последнего и сделанных замечаний можно преобразовать интеграл от первого слагаемого в левой части (55) следующим образом:

$$v_{\alpha\beta}\int d\Omega' \frac{\Delta p_i}{(\Delta p)^4} = v_{\alpha\beta}\int\int d\Omega' d(\Delta\mathbf{p})\, \delta\left[\Delta\mathbf{p} - \mu_{\alpha\beta}(v_{\alpha\beta}\mathbf{n}_0 - \mathbf{v}_{\alpha\beta})\right] \frac{\Delta p_i}{(\Delta p)^4} =$$
$$= \frac{1}{\mu_{\alpha\beta}^2}\int d(\Delta\mathbf{p}) \frac{\Delta p_i}{(\Delta p)^4}\left\{\delta(\mathbf{v}_{\alpha\beta}\Delta\mathbf{p}) + \frac{[\mathbf{v}_{\alpha\beta}\Delta\mathbf{p}]^4}{2\mu_{\alpha\beta} v_{\alpha\beta}^2}\delta'(\mathbf{v}_{\alpha\beta}\Delta\mathbf{p})\right\}.$$

Первый интеграл $\int d(\Delta\mathbf{p}) \frac{\Delta p_i}{(\Delta p)^4}\delta(v_{\alpha\beta}\Delta\mathbf{p}) = 0$ исчезает. Из-за наличия множителя $\delta(\mathbf{v}_{\alpha\beta}\Delta\mathbf{p})$ нужно считать $\Delta p_z = 0$. Интегрирование по Δp_y дает нуль из соображений симметрии. Второй интеграл выпишем с учетом равенства $\delta'(\mathbf{v}\Delta\mathbf{p}) = (\Delta p)^{-2}\Delta\mathbf{p}\partial\delta(\Delta\mathbf{p}\mathbf{v})/\partial\mathbf{v}$, представляя в виде

$$\frac{1}{\mu_{\alpha\beta}^3}\left(\frac{\partial}{\partial\mathbf{v}_{\alpha\beta}}\right)_j \int d(\Delta\mathbf{p}) \frac{\Delta p_i \Delta p_j}{(\Delta p)^4}\delta(\mathbf{v}_{\alpha\beta}\Delta\mathbf{p}).$$

Эта формулировка интеграла $v_{\alpha\beta}\int d\Omega'(\Delta p)^{-4}\Delta p_i$ и будет окончательной. Нужно лишь отметить следующее. Наличие фактора $\delta(\mathbf{v}_{\alpha\beta}\Delta\mathbf{p})$ в подынтегральном выражении означает исчезновение Δp_z. Система декартовых координат была выбрана ранее таким образом, что всегда $\Delta p_x = 0$. Таким образом, при наличии функции $\delta(\mathbf{v}_{\alpha\beta}\Delta\mathbf{p})$ можно заменять $[\mathbf{v}_{\alpha\beta}\Delta\mathbf{p}]^2/v_{\alpha\beta}^2 = (\Delta p_y)^2$ на $(\Delta p)^2$, производя далее допустимые сокращения.

Второй член слева в равенстве (55)

$$-\int\left(\frac{\partial}{\partial p_{\alpha j}} - \frac{\partial}{\partial p_{\beta j}}\right)\frac{v_{\alpha\beta}\Delta p_i \Delta p_j}{2(\Delta p)^4}\, d\Omega'$$

при учете только первого слагаемого в (56) *) сводится к следующему:

$$-\frac{1}{\mu_{\alpha\beta}^2}\int\frac{\Delta p_i \Delta p_j}{(\Delta p)^4}\left(\frac{\partial}{\partial p_{\alpha j}} - \frac{\partial}{\partial p_{\beta j}}\right)\delta(\mathbf{v}_{\alpha\beta}\Delta\mathbf{p}).$$

*) Интеграл в этом приближении не исчезает, и следующее по степени малости слагаемое можно не учитывать.

Для того чтобы удовлетворить требованиям, вытекающим из (55), необходимо выполнение соотношения

$$\frac{\partial}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial}{\partial p_\beta} = \frac{1}{\mu_{\alpha\beta}} \frac{\partial}{\partial v_{\alpha\beta}}. \qquad (2.2.59)$$

В правильности равенства (59) несложно убедиться. Так, например, можно написать, что

$$\frac{\partial}{\partial p_{\alpha x}} = \frac{\partial}{\partial (v_{\alpha x} - v_{\beta x})} m_\alpha^{-1} \text{ и } \frac{\partial}{\partial p_{\beta x}} = -\frac{\partial}{\partial (v_{\alpha x} - v_{\beta x})} m_\beta^{-1}.$$

Вычитая левые и правые части равенств, мы приходим к подтверждению (59). Таким образом, правильность (55) можно считать доказанной.

При учете (55) и применении использованного ранее приема вычисления интегралов из (54) имеем

$$J_{\alpha\beta} = 2e_\alpha^2 e_\beta^2 \int\int \left(\frac{\partial}{\partial p_{\alpha i}} - \frac{\partial}{\partial p_{\beta i}}\right) \frac{\Delta p_i \Delta p_j}{(\Delta p)^4} \times$$

$$\times \delta(\mathbf{v}_{\alpha\beta} \Delta \mathbf{p}) \left(\frac{\partial}{\partial p_{\alpha j}} - \frac{\partial}{\partial p_{\beta j}}\right) f_\alpha f_\beta d(\Delta \mathbf{p})\, d\mathbf{p}_\beta. \quad (2.2.60)$$

Рассмотрим представленный в тензорной форме интеграл $\int d(\Delta \mathbf{p}) \dfrac{\Delta p_i \Delta p_j}{(\Delta p)^4} \delta(\mathbf{v}_{\alpha\beta} \Delta \mathbf{p})$. Все недиагональные элементы интеграла здесь обращаются в нуль. Одна диагональная компонента («по направлению» скорости $\mathbf{v}_{\alpha\beta}$) тоже исчезает. Две неисчезающие компоненты тензора, отвечающие поперечным к $\mathbf{v}_{\alpha\beta}$ направлениям, одинаковы. Если выбрать за полярную ось направление $\mathbf{v}_{\alpha\beta}$, то при интегрировании по углу в цилиндрической системе координат появляется множитель π $\left(\int\limits_0^{2\pi} \cos^2 \varphi \, d\varphi = \pi;\right.$ $\left.\int\limits_0^{2\pi} \sin^2 \varphi \, d\varphi = \pi\right)$. В результате можно записать

$$\int d(\Delta \mathbf{p}) \frac{\Delta p_i \Delta p_j}{(\Delta p)^4} \delta(\mathbf{v}_{\alpha\beta} \Delta \mathbf{p}) = \pi \frac{\delta_{ij} v_{\alpha\beta}^2 - v_{\alpha\beta i} v_{\alpha\beta j}}{v_{\alpha\beta}^3} \int \frac{d(\Delta p)}{\Delta p}. \qquad (2.2.61)$$

Этот интеграл расходится при малых Δp, что связано с основной особенностью кулоновского взаимодействия (медленным убыванием потенциала). Как это было сделано ранее, нужно ограничить интегрирование прицельными расстояниями, равными радиусу дебаевской экранировки $\rho_{\max} = \tilde{r}_D$.

Кроме того, в интеграле (58) имеется расходимость и на малых расстояниях (больших Δp). Эта расходимость связана с использованием подхода, основанного на малости Δp, что нарушается на прицельных расстояниях порядка неэкранированного радиуса кулоновского взаимодействия $r_{\text{неэкр}} = e^2/\varkappa T$. Поэтому здесь можно ввести кулоновский логарифм

$$L_k = \int \frac{d(\Delta p)}{p} = \ln \frac{\tilde{r}_D}{r_{\text{неэкр}}}. \qquad (2.2.62)$$

Фактор (62), учитывающий дебаевское экранирование, слабо отличается от величины, введенной при определении эффективной частоты столкновений $\nu_{\text{эф}}$ (43).

Определяя значения интеграла в (61) в соответствии с (62), из (60) приходим к интегралу столкновений в форме Ландау

$$J_{\alpha\beta}(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta) = $$

$$= 2\pi e_\alpha^2 e_\beta^2 L_k \frac{\partial}{\partial p_{\alpha i}} \int d\mathbf{p}_\beta \frac{v_{\alpha\beta}^2 \delta_{ij} - v_{\alpha\beta i} v_{\alpha\beta j}}{v_{\alpha\beta}^3} \left(f_\beta \frac{\partial f_\alpha}{\partial p_{\alpha j}} - f_\alpha \frac{\partial f_\beta}{\partial p_{\beta j}} \right). \quad (2.2.63)$$

Формула (63) содержит в качестве аргументов функции f_α и f_β импульсы $\mathbf{p}_\alpha$ и $\mathbf{p}_\beta$. Имея в виду, что в этой книге будет отдаваться предпочтение при кинетическом описании плазмы не импульсам, а скоростям $\mathbf{v}_\alpha$, $\mathbf{v}_\beta$, выпишем выражение для интеграла столкновений при использовании переменных $\mathbf{v}_\alpha$ и $\mathbf{v}_\beta$, а именно,

$$J_{\alpha\beta}(\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta) = $$

$$= \frac{2\pi e_\alpha^2 e_\beta^2}{m_\alpha} L_k \frac{\partial}{\partial v_{\alpha i}} \int \frac{\delta_{ij} v_{\alpha\beta}^2 - v_{\alpha\beta i} v_{\alpha\beta j}}{v_{\alpha\beta}^3} \left\{ \frac{f_\beta(\mathbf{v}_\beta)}{m_\alpha} \frac{\partial f_\alpha(\mathbf{v}_\alpha)}{\partial v_{\alpha j}} - \frac{f_\alpha(\mathbf{v}_\alpha)}{m_\beta} \frac{\partial f(\mathbf{v}_\beta)}{\partial v_{\beta j}} \right\} d\mathbf{v}_\beta. \quad (2.2.64)$$

Интегралы $J_{\alpha\beta}$ при использовании разных переменных были определены таким образом, что они отличаются друг от друга. В связи с этим переменные указаны в качестве аргументов. Интегралы $J_{\alpha\beta}(\mathbf{p}_\alpha, \mathbf{p}_\beta)$ и $J_{\alpha\beta}(\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta)$ имеют даже разную размерность.

Из (64) видно, что этот интеграл столкновений представлен в дивергентной форме (46). Сопоставляя (46) и (64), для компонент $\mathbf{j}_\alpha^\beta$-потока в пространстве скоростей $\mathbf{v}_\alpha$ получаем

$$j_{\alpha i}^\beta = \frac{2\pi e_\alpha^2 e_\beta^2}{m_\alpha} L_k \int \frac{\delta_{ij} v_{\alpha\beta}^2 - v_{\alpha\beta i} v_{\alpha\beta j}}{v_{\alpha\beta}^3} \times$$

$$\times \left\{ \frac{f_\alpha(\mathbf{v}_\alpha)}{m_\beta} \frac{\partial f_\beta(\mathbf{v}_\beta)}{\partial v_{\beta j}} - \frac{f_\beta(\mathbf{v}_\beta)}{m_\alpha} \frac{\partial f_\alpha(\mathbf{v}_\alpha)}{\partial v_{\alpha j}} \right\} d\mathbf{v}_\beta. \quad (2.2.65)$$

Если сравнивать разные способы записи потока (65), встречающиеся в различных источниках, то полезно знать следующее равенство:

$$U_{\alpha ij}^\beta = \frac{\delta_{ij} v_{\alpha\beta}^2 - v_{\alpha\beta i} v_{\alpha\beta j}}{v_{\alpha\beta}^3} = \frac{\partial^2 |v_{\alpha\beta}|}{\partial v_{\alpha\beta i} \partial v_{\alpha\beta j}}. \quad (2.2.66)$$

Интеграл $J_{\alpha\beta}(v_\alpha, v_\beta)$ легко представить в виде

$$J_{\alpha\beta}(\mathbf{v}_\alpha, \mathbf{v}_\beta) = \frac{\partial}{\partial v_{\alpha i}} \left[D_{\alpha ij}^\beta \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_{\alpha j}} \right] - \frac{\partial}{\partial v_{\alpha i}} [F_{\alpha i} f_\alpha], \quad (2.2.67)$$

где

$$D_{\alpha ij}^\beta = 2 \frac{e_\alpha^2 e_\beta^2}{m_\alpha^2} L_k \int U_{\alpha ij}^\beta f_\beta(\mathbf{v}_\beta) d\mathbf{v}_\beta, \quad (2.2.68)$$

$$F_{\alpha i}^\beta = 2 \frac{e_\alpha^2 e_\beta^2}{m_\beta^2} L_k \int U_{\alpha ij}^\beta \frac{\partial f_\beta}{\partial v_{\beta j}} d\mathbf{v}_\beta, \quad (2.2.69)$$

а для потока $j_{\alpha i}^\beta$ имеем

$$j_{\alpha i}^\beta = -D_{\alpha ij}^\beta \frac{\partial f_\alpha}{\partial v_{\alpha j}} + F_{\alpha i}^\beta f_\alpha. \quad (2.2.70)$$

Кинетическое уравнение

$$\frac{\partial f_\alpha}{\partial t} + \operatorname{div}_{\mathbf{r}}(v_\alpha f_\alpha) + \operatorname{div}_{\mathbf{v}}(g f_\alpha) + \operatorname{div}_{\mathbf{v}} \mathbf{j}_\alpha^\beta = 0$$

с $\mathbf{j}_\alpha^\beta$ в соответствии с (70) можно отнести к уравнениям типа Фоккера — Планка. Такое наименование подобных уравнений возникло в связи с решением задачи о движении броуновских частиц в среде. Тензор $D_{\alpha ij}^\beta$ называют тензором диффузии в пространстве скоростей. Член в (70) с $D_{\alpha ij}^\beta$ пропорционален градиенту функции распределения f_α. Заметим, что обычный диффузионный поток, характеризуемый коэффициентом D, равен $\mathbf{j}_D = -D\nabla\rho$, где ρ — плотность диффундирующего газа. Член $F_{\alpha i}^\beta f_\alpha$ в (70) с «силой» $\mathbf{F}_\alpha^\beta$ (69) обычно называют динамическим трением. Необходимость существования такого слагаемого связана с тем простым фактом, что равномерное распределение частиц по скоростям нельзя считать равновесным. Оно должно перейти в процессе релаксации в распределение Максвелла — Больцмана. Поэтому помимо диффузионного члена $\infty\nabla_{\mathbf{v}} f(\mathbf{v})$ должен присутствовать член, пропорциональный $f(\mathbf{v})$.

Получим теперь из (65)—(67) выражение для интеграла J_{ei}. Рассматривая столкновения электронов с неподвижными ионами, что связано с неравенством $M_i \gg m$, и используя для функции распределения ионов аппроксимацию (2.2.1) при $\mathbf{v}_{ei} \simeq \mathbf{v}_e$, приходим к формуле

$$J_{ei}(v_e) = \frac{2\pi e^4 N_i L_k}{m^2} \frac{\partial}{\partial v_{ej}} \left(U_{ejk}^i \frac{\partial f_e}{\partial v_{ek}} \right), \tag{2.2.71}$$

где $U_{ejk}^i = v_e^{-3}\left(v_e^2 \delta_{jk} - v_{ej} v_{ek}\right)$.

При максвелловском распределении $f_e = f_{e0}(v_e)$, естественно, $J_{ei}(v_e) = 0$. Неравные нулю J_{ei} получаются за счет отклонений от этого распределения. Полагая для слабых отклонений, что при $f_e = f_{e0} + f_1$ $(|f_1| \ll f_{e0})$, и грубо считая $v_e \sim \sqrt{\varkappa T_e/m}$, приходим приближенно к выводу о том, что $v_{ei}^* \sim (e^2/\varkappa T)^2 \sqrt{\varkappa T_e/m} L_k N_i$, $J_{ei} \simeq -v_{ei}^* f_1$. Из этой прикидки ясно, что на основе (71) можно получать значения v_{ei}, близкие к уже установленным нами ранее (31).

Итак, в этом параграфе были указаны некоторые способы учета столкновений и приведены характерные соотношения, из которых можно определить (или хотя бы оценить) эффективность подобных взаимодействий. На одной модельной схеме учета столкновений мы еще остановимся ниже, что целесообразно сделать после рассмотрения перехода к квазигидродинамическому приближению.

Несмотря на то, что столкновения играют важную роль в физической кинетике, существуют явления, на характер которых соударения не оказывают существенного влияния. В задачах бесстолкновительной плазмы условия пренебрежения соударени-

ями часто зависят не только от параметров плазмы, а также и от тех вопросов, на которые нужно получить ответ.

Для задач колебательного (волнового) характера предпосылкой для использования идеализации бесстолкновительной плазмы является ограничение $\omega^2 \gg \nu_{эф}^2$ (29). Прежде всего это относится к случаям, когда на первом плане стоят вопросы непосредственно распространения волн (а, скажем, не определения их потерь при распространении). Другим условием может быть превышение длины свободного пробега $l_{св} = \bar{v}/\nu_{эф}$ над характерными масштабами L, которое можно записать в виде

$$\nu_{эф} \ll \bar{v}/L, \qquad (2.2.72)$$

где $\bar{v}$ — средняя тепловая скорость.

При распространении волн в качестве L нужно взять λ (λ — длина волны), а в случае непрозрачности плазмы — глубину проникновения волнового поля.

2.3. Переход к квазигидродинамическому приближению. Уравнения магнитной гидродинамики

Анализ динамических процессов в плазме на основе прямого использования метода кинетического уравнения часто оказывается довольно сложным. Особенно громоздкими становятся расчеты при рассмотрении процессов в многокомпонентной плазме, представляющей смесь различных частиц (электроны, ионы нескольких сортов, нейтральные частицы).

Вместе с тем имеется много явлений, для описания которых достаточно использовать квазигидродинамический подход, базирующийся на получаемых из (2.1.11) уравнениях переноса. Для перехода к квазигидродинамическим уравнениям следует применить операцию усреднения по скоростям. Этот переход детально рассматривался [4, 8, 11—14, 20—23].

Вместо непосредственного отыскания функций распределения f при квазигидродинамическом подходе обращаются к системе уравнений для интегральных величин — моментов. Моментом n-го порядка называется величина

$$M_{jkl\ldots}^{(n)} = \int (v_j v_k v_l \ldots) f \, d\mathbf{v}, \qquad (2.3.1)$$

где в левой части имеется n индексов (j, k, l ...), а в подынтегральное выражение в (1) входит такое же количество сомножителей. До тех пор пока не выписываются соотношения для смесей газов и сорт частиц не конкретизируется, мы не будем снабжать все величины индексами, характеризующими вид частиц.

Моменты зависят только от координат и времени t, т. е. от меньшего числа переменных, чем функция распределения f. Вместе с тем система уравнений для моментов не является, вообще говоря, замкнутой. Если первые из моментов имеют ясный

физический смысл, то по мере увеличения n простота и наглядность интерпретации теряется и возникает вопрос о нецелесообразности привлечения уравнений с большими n. В силу этого значения n всегда ограничивают и анализируют усеченную систему уравнений. Подобная операция основана обычно на физических предпосылках. Естественно, что укороченная система должна удовлетворять требованию разрешимости.

Нулевой момент

$$M^{(0)} = \int f\, d\mathbf{v} = N \tag{2.3.2}$$

и первые моменты

$$M_j^{(1)} = \int v_j f\, d\mathbf{v} = N u_j \tag{2.3.3}$$

выбирают равными концентрации частиц (см. (2.1.17)) и компонентам потока частиц $N\mathbf{u}$. Вектор $\mathbf{u}$, который уже вводился в этой главе, представляет упорядоченную (регулярную) скорость. Как уже отмечалось, часто имеет смысл вводить хаотическую (пекулярную) скорость

$$\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u}. \tag{2.3.4}$$

Так как $\mathbf{u} = N^{-1}\int \mathbf{v} f\, d\mathbf{v}$, то $\int \mathbf{w}\, f(\mathbf{v})\, d\mathbf{v} = \int \mathbf{w} f(\mathbf{w})\, d\mathbf{w} = 0$. Записывая выражение для вторых моментов

$$M_{jk}^{(2)} = \int v_j v_k f\, d\mathbf{v}$$

и учитывая (2)—(4), получим

$$M_{jk}^{(2)} = N u_j u_k + \int w_j w_k f\, d\mathbf{v}. \tag{2.3.5}$$

Полагая массу рассматриваемого сорта равной m, введем тензор давлений

$$P_{jk} = m \int w_j w_k f\, d\mathbf{w}. \tag{2.3.6}$$

Иногда вводится и скалярное давление

$$p = (1/3)\, m \int w^2 f\, d\mathbf{w}. \tag{2.3.7}$$

Тензор $p_{jk} = P_{jk} - p\delta_{jk}$ в области применимости гидродинамического приближения называют тензором вязких напряжений.

Для моментов третьего порядка $M_{jkl}^{(3)}$, имея в виду (2)—(6), получаем

$$M_{jkl}^{(3)} = \int v_j v_k v_l f\, d\mathbf{v} =$$
$$= N u_j u_k u_l + u_j \frac{P_{kl}}{m} + u_k \frac{P_{jl}}{m} + u_l \frac{P_{jk}}{m} + \frac{Q_{jkl}}{m}, \tag{2.3.8}$$

где тензор $Q_{jkl} = m\int w_j w_k w_l f(\mathbf{w})\, d\mathbf{w}$ характеризует перенос тепла

(тензор потока тепла). При переходе к (8) учтен факт обращения в нуль интегралов вида $\int w_i f\, d\mathbf{w}$.

Далее, умножим кинетическое уравнение слева на 1, mv_j, $m(v_i v_j - \varkappa T m^{-1}\delta_{ij})$ и проинтегрируем по скоростям $\mathbf{v}$ (или по хаотическим скоростям $\mathbf{w}$), получая совокупность законов сохранения для N, $N\mathbf{u}$, $P_{ij}\ldots$ Будем обозначать указанные сомножители $A^{(n)}$ (n определяется рангом тензора, составляющей которого будет $A^{(n)}$).

После умножения каждого из слагаемых в уравнении Больцмана (2.1.2) для частиц сорта α на $A^{(n)}$ и интегрирования в пространстве скоростей по неограниченному объему сохраним индекс α только для слагаемых, связанных со столкновениями и химическими процессами. Обозначая усреднение по скоростям чертой, получаем *)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(NA^{(n)}\right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(N\overline{v_j A^{(n)}}\right) - \frac{N}{m}\overline{\frac{\partial\left(F_j A^{(n)}\right)}{\partial v_j}} = I_\alpha\left(A^{(n)}\right), \quad (2.3.9)$$

где

$$I_\alpha\left(A^{(n)}\right) = \int\Big[\sum_\beta\left(S_\alpha^\beta + S_\beta^\alpha\right) + \sum_\gamma\left(\Gamma_\gamma^\alpha + \Gamma_\alpha^\gamma\right)\Big]A^{(n)}.$$

Использовалось определение средних, которое уже применялось ранее в отдельных случаях, а именно,

$$\overline{Q(\mathbf{r}, t)} = \frac{1}{N}\int Q(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)\, f(\mathbf{v})\, d\mathbf{v} = \frac{1}{N}\int Q(\mathbf{w}, \mathbf{r}, t)\, f(\mathbf{w})\, d\mathbf{w}. \quad (2.3.10)$$

При записи величины $I_\alpha(A^{(n)})$ в (9) принимается во внимание, наряду со столкновениями, и влияние химических процессов, приводящих к возникновению (и исчезновению) частиц сорта α.

Появление в (9) слагаемого $-\frac{N}{m}\overline{\frac{\partial\left(F_j A^{(n)}\right)}{\partial v_j}}$ понятно при учете следующих преобразований с использованием интегрирования по частям:

$$\frac{1}{m}\int A^{(n)} F_j \frac{\partial f}{\partial v_j}\, dv =$$

$$= \frac{1}{m}\Big|_{-\infty}^{\infty} F_j A^{(n)} f(v) - \frac{1}{m}\int \frac{\partial\left(F_j A^{(n)}\right)}{\partial v_j} f\, dv = -\frac{N}{m}\overline{\frac{\partial\left(F_j A^{(n)}\right)}{\partial v_j}}.$$

Выбор множителей $A^{(n)}$ при $n = 2, 3, \ldots$ не всегда однозначен. До перехода к выводу следствий из (9) при $n = 2, 3$ остановимся на вполне определенных результатах в случаях, когда $n = 0, 1$

*) В этом параграфе по повторяющимся индексам предполагается проведение суммирования. Дополнительные указания о суммировании имеются для индексов с греческими буквами, характеризующими сорта частиц. Здесь на суммирование указано явным образом — символом Σ.

$(A^{(n)}=1,\ A_j^{(1)}=mv_j)$. При $A^{(0)}=1$ нужно проинтегрировать кинетическое уравнение по скоростям. Тогда получается соотношение непрерывности для частиц сорта α:

$$\partial N_\alpha/\partial t + \operatorname{div} N_\alpha \mathbf{u}_\alpha = I_\alpha(A^{(0)}). \tag{2.3.11}$$

Из самой природы ударного взаимодействия следует, что концентрация N_α при столкновениях изменяться не может (частицы не возникают и не исчезают). Тогда

$$I_\alpha(A^{(0)}) = \int \sum_\gamma (\Gamma_\gamma^\alpha + \Gamma_\alpha^\gamma)\, d\mathbf{v}_\alpha, \quad \int (S_\alpha^\beta + S_\beta^\alpha)\, d\mathbf{v}_\alpha = \int J_{\alpha\beta} d\mathbf{v}_\alpha = 0. \tag{2.3.12}$$

Величина $I_\alpha(A^{(0)})$ существенна в тех случаях, когда заметное влияние на баланс частиц оказывают процессы ионизации (включая фотоионизацию), рекомбинации, прилипания и отлипания, а также реакции перезарядки. Такие процессы очень важны при образовании ионосферной плазмы и проявляются в ее динамике (см. гл. 1, а также [23]).

Используя в (9) в качестве $A^{(n)}$ множитель $A_j^{(1)}=mv_j$ и учитывая соотношения (2)—(7), получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho_\alpha u_{\alpha j}) + \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho_\alpha u_{\alpha j} u_{\alpha k} + p_\alpha \delta_{ij} + p_{\alpha jk}) - \frac{F_{\alpha j}}{m_\alpha}\rho_\alpha = I_\alpha(A_j^{(1)}), \tag{2.3.13}$$

где $\rho_\alpha = m_\alpha N_\alpha$ — плотность частиц сорта α.

Воспользуемся, далее, уравнением непрерывности без учета слагаемых, учитывающих изменения состава. Эти изменения могут быть существенными в уравнениях непрерывности, но в то же время слабо влиять на импульс системы, что и предполагается далее. Преобразуем левую часть (13), используя векторное тождество

$$\operatorname{div}(\rho u_j \mathbf{u}) - u_j \operatorname{div}(\rho \mathbf{u}) = \rho \mathbf{u} \nabla u_j.$$

Тогда из (11) и (13) имеем

$$\rho_\alpha \frac{\partial u_{\alpha j}}{\partial t} + \rho_\alpha \left(u_{\alpha k} \frac{\partial u_{\alpha j}}{\partial x_k} \right) = -\frac{\partial p_\alpha}{\partial x_j} - \frac{\partial p_{\alpha jk}}{\partial x_k} + \rho_\alpha \frac{F_{\alpha j}}{m_\alpha} + I_\alpha(A_j^{(1)}). \tag{2.3.14}$$

При максвелловском распределении частиц сорта α по скоростям (2.1.19) приходим к уравнению состояния для идеального газа:

$$p_\alpha = \frac{4}{3} m_\alpha (m_\alpha/2\pi\varkappa T_\alpha)^{3/2} \int_0^\infty w^4 \exp(-m_\alpha w^2/2\varkappa T_\alpha)\, d\mathbf{w} = N_\alpha \varkappa T_\alpha.$$

Уравнение (14) можно записать в форме, употребляющейся более часто. Это мы сделаем, понимая под силой F_α электромагнит-

ную силу. Тогда

$$\rho_\alpha\left\{\frac{\partial \mathbf{u}_\alpha}{\partial t}+(\mathbf{u}_\alpha\nabla)\,\mathbf{u}_\alpha\right\}=e_\alpha N_\alpha\left(\mathbf{E}+\frac{1}{c}\,[\mathbf{u}_\alpha\mathbf{H}_0]\right)-\frac{\partial}{\partial x_k}\,\mathbf{\Pi}_{k\alpha}+\mathbf{R}_\alpha, \tag{2.3.15}$$

где

$$\mathbf{\Pi}_{k\alpha}=m_\alpha\int w_k\mathbf{w}f\,d\mathbf{w}=m_\alpha N_\alpha\overline{w_k\mathbf{w}},$$
$$\mathbf{R}_\alpha=-\,m_\alpha\sum_\beta\int \mathbf{v}J_{\alpha\beta}\,d\mathbf{v}=-\,m_\alpha\sum_\beta\int \mathbf{w}J_{\alpha\beta}\,d\mathbf{w}.$$

Последний член характеризует взаимодействие типа трения из-за столкновений между частицами сорта α и частицами других сортов. Второе равенство в определении $\mathbf{R}_\alpha$ выписано при использовании свойства интеграла столкновений $J_{\alpha\beta}$ (12).

Ранее в п. 2.2 этой главы отмечалось, что межэлектронные столкновения, взятые изолированно, несущественны из-за сохранения импульса даже при единичном акте соударений. Такие соударения в ту часть силы $\mathbf{R}_e$, которая обязана наличию интеграла столкновений J_{ee}, вклада не вносят. О сохранении импульса мы говорим здесь потому, что само уравнение (15) может рассматриваться как закон изменения импульса частиц сорта α. При применении к электронам в правую часть (15) и войдет упомянутая сила $\mathbf{R}_e$.

Формулируя высказанные соображения в более общей форме, можно сделать утверждение об отсутствии между частицами одного и того же сорта силы «самотрения»

$$\int \mathbf{v}J_{\alpha\alpha}\,d\mathbf{v}=\int \mathbf{w}J_{\alpha\alpha}\,d\mathbf{w}=0. \tag{2.3.16}$$

Перейдем теперь к уравнениям переноса при $n=2$. Здесь нет единообразия в выборе множителя $A^{(2)}$. В итоге получаются уравнения, аналогичные по своей сущности, но все-таки отличающиеся по форме записи. Можно выделить ту формулировку, которая в наиболее явном виде отражает выполнимость закона сохранения энергии. К ней мы сейчас и перейдем, что вовсе не избавляет от необходимости привести в этом параграфе и иные способы записи гидродинамических уравнений. Для частиц сорта α используем сначала квадратичный по величине скорости $\mathbf{v}_\alpha$ множитель $A^{(2)}$, представленный в скалярной форме. Конкретно выберем сначала $A^{(2)}=\varepsilon_\alpha$, где ε_α — энергия частицы сорта α. Тогда из (9) имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}(N_\alpha\overline{\varepsilon}_\alpha)+\frac{\partial}{\partial x_j}(N_\alpha\overline{\varepsilon_\alpha v_{\alpha j}})=\frac{N_\alpha}{m_\alpha}\left(\overline{F_j\frac{\partial\varepsilon_\alpha}{\partial v_j}}\right)+\int\varepsilon_\alpha J_{\alpha\beta}\,d\mathbf{v}_\alpha. \tag{2.3.17}$$

Если рассматривать частицы только одного сорта, то столкновения не могут привести к изменению энергии системы, так что

$$\int\varepsilon_\alpha J_{\alpha\alpha}\,d\mathbf{v}_\alpha=0. \tag{2.3.18}$$

Если же имеется смесь газов, то, конечно, может происходить передача энергии от одного сорта к другому (например, в плазме при различных температурах электронов и ионов). Однако при упругих столкновениях легких частиц с тяжелыми передаваемая энергия относительно невелика, что также дает основания опустить в (17) столкновительное слагаемое. Если столкновения здесь не учитывать, то уравнение (17) можно представить в виде

$$\partial \mathscr{E}_\alpha / \partial t + \operatorname{div} \mathbf{Q}_\alpha = N_\alpha (\mathbf{F} \mathbf{u}_\alpha), \tag{2.3.19}$$

где учтено, что $\varepsilon_\alpha = m_\alpha v_\alpha^2/2$ (для ионов возбуждением внутренних степеней свободы пренебрегаем), и используется соотношение (3). Для перехода к (19) достаточно, чтобы сила $\mathbf{F}$ не зависела от скорости $\mathbf{v}$. Если же такая зависимость имеется (например, для силы Лоренца), то необходимо, чтобы векторы $\mathbf{F}$ и $\mathbf{v}$ были перпендикулярны. Для плотности энергии

$$\mathscr{E}_\alpha = \frac{m_\alpha N_\alpha}{2} \int v_\alpha^2 f \, d\mathbf{v}_\alpha$$

после подстановки $\mathbf{v} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ приходим к очевидному результату:

$$\mathscr{E}_\alpha = \frac{m_\alpha N_\alpha \overline{w_\alpha^2}}{2} + \frac{m_\alpha N_\alpha}{2} u_\alpha^2. \tag{2.3.20}$$

Согласно (20) плотность энергии частиц складывается из кинетических энергий, связанных с тепловым движением частиц, и их упорядоченным движением. Слагаемое справа в (19) характеризует работу в единицу времени внешних сил (в их число входят и самосогласованные электромагнитные поля).

Далее, получим выражение для потока $\mathbf{Q}_\alpha$ в (19), определяемого соотношением

$$\mathbf{Q}_\alpha = \frac{m_\alpha}{2} \int v_\alpha^2 \mathbf{v}_\alpha f_\alpha \, d\mathbf{v}_\alpha.$$

Подставляя $\mathbf{v}_\alpha = \mathbf{u}_\alpha + \mathbf{w}_\alpha$, получаем

$$\mathbf{Q}_\alpha = \frac{\rho_\alpha u_\alpha^2}{2} \mathbf{u}_\alpha + N_\alpha \frac{m_\alpha \overline{w_\alpha^2}}{2} \mathbf{u}_\alpha + m_\alpha \int (\mathbf{w}_\alpha \mathbf{u}_\alpha) \mathbf{w}_\alpha f_\alpha \, d\mathbf{w}_\alpha. \tag{2.3.21}$$

Легко убедиться, что в (21) при изотропных в пространстве скоростей функциях f_α отлична от нуля только проекция интеграла $\int (\mathbf{w}_\alpha \mathbf{u}_\alpha) \mathbf{w}_\alpha f_\alpha d\mathbf{w}_\alpha$ на скорость $\mathbf{u}_\alpha$. Для вычисления этой проекции можно направить одну из осей декартовой системы координат по $\mathbf{u}_\alpha$ и воспользоваться формулой (7), после чего из (21) получаем

$$\mathbf{Q}_\alpha = \mathbf{u}_\alpha \left(\frac{\rho_\alpha u_\alpha^2}{2} + \frac{\rho_\alpha \overline{w_\alpha^2}}{2} + p_\alpha \right). \tag{2.3.22}$$

Этот вывод интересен в том плане, что мы получили формулу для $\mathbf{Q}_\alpha$, отличающуюся от потока энергии $\mathbf{u}_\alpha \left(\frac{\rho_\alpha u_\alpha^2}{2} + \frac{\rho_\alpha \overline{w_\alpha^2}}{2} \right) =$

$= \mathbf{u}_\alpha \mathscr{E}_\alpha$. Это отличие не является очевидным, если учесть наличие в (19) слагаемого $\overline{\partial \mathscr{E}_\alpha/\partial t}$. Если ввести плотность внутренней энергии $\mathscr{E}_{\alpha\,\text{внутр}} = \rho_\alpha \overline{w_\alpha^2}/2$, то сумма $\mathscr{E}_{\alpha\,\text{внутр}} + p_\alpha = i_\alpha$ представляет удельную (отнесенную к единице объема) энтальпию i_α. Таким образом,

$$\mathbf{Q}_\alpha = \mathbf{u}_\alpha \left(\rho_\alpha u_\alpha^2/2 + i_\alpha\right). \tag{2.3.23}$$

Появление в (23) вместо $\mathscr{E}_{\alpha\,\text{внутр}}$ энтальпии связано с тем, что при записи потока $\mathbf{Q}_\alpha$ косвенным образом учтена работа сил давления. Сила давления, как внешняя сила, в само уравнение Больцмана, естественно, не входит. Она «выявляется» при переходе к гидродинамическому приближению, что и было показано выше в процессе перехода к соотношениям (22), (23).

Будучи следствием кинетического уравнения Больцмана, соотношение (19), дополненное (20), отражает требования закона сохранения энергии для системы частиц. Правда, результаты в представленной здесь форме получены в предположении об изотропности функции распределения по скоростям, что ведет и к изотропности давления. В то же время следует отметить, что уравнение (19) применимо и в более общих условиях (без указанных выше ограничений, накладываемых на функцию распределения).

При выводе и обосновании уравнений газодинамики (даже в их стандартном оформлении в качестве уравнений механики сплошных сред) часто сразу же идут по более сложному пути, используя не скалярный, а тензорный множитель $A^{(2)}$. При этом получается вместо одного уравнения (17) более громоздкая совокупность уравнений, в которую входят не только моменты первого и второго, но и третьего порядков.

Выберем в качестве множителя $A^{(2)}$ в (9) $A_{jk}^{(2)} = m_\alpha \left(v_{\alpha j} v_{\alpha k} - \dfrac{\varkappa T_\alpha}{m_\alpha} \delta_{jk} \right)$
После подстановки последнего в это уравнение с учетом (8) получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho_\alpha u_{\alpha j} u_{\alpha k} + p_\alpha \delta_{jk} + p_{\alpha jk}\right) + \frac{\partial}{\partial x_l}\big[\rho_\alpha u_{\alpha l} u_{\alpha j} u_{\alpha k} + \\ + p_\alpha \left(u_k \delta_{lj} + u_j \delta_{lk} + u_l \delta_{jk}\right) + u_k p_{lj} + u_j p_{lk} + u_l p_{jk}\big] + \\ + \frac{\partial Q_{ljk}}{\partial x_l} - \frac{\rho_\alpha}{m_\alpha}\left(F_{\alpha k} u_{\alpha j} + F_{\alpha j} u_{\alpha k}\right) + \frac{e_\alpha H_{0t}}{m_\alpha c}\left(e_{jst} p_{ks} - e_{kst} p_{js}\right) - \\ - \frac{\varkappa T_\alpha}{m_\alpha}\left\{\frac{\partial N_\alpha}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_l}\left(u_{\alpha l} N_\alpha\right)\right\}\delta_{jk} = I_\alpha\left(A_{jk}^{(2)}\right),\end{aligned} \tag{2.3.24}$$

где e_{jst} — единичный псевдотензор 3-го ранга, у которого отличны от нуля только компоненты при $j \neq s \neq t$ ($e_{123} = 1$; остальные равны -1 при нечетном числе перестановок чисел j, s, t и 1 — при четном).

Если воспользоваться уравнением непрерывности (11), то можно опустить последнее слагаемое в левой части (24), а правую часть записать в виде $I_\alpha\left(A_{jk}^{(2)}\right) + \left(\varkappa T_\alpha/m_\alpha\right) I_\alpha\left(A^{(0)}\right)$. Имея в виду эту оговорку, дифференцируя и группируя слагаемые в (24) с идеей использовать далее

уравнения (11), (12), получаем

$$u_{\alpha j}u_{\alpha k}\left\{\frac{\partial\rho_\alpha}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x_l}(\rho_\alpha u_l)\right\}+u_{\alpha k}\left\{\rho_\alpha\left(\frac{\partial u_{\alpha j}}{\partial t}+u_{\alpha l}\frac{\partial u_{\alpha j}}{\partial x_l}\right)+\frac{\partial p_\alpha}{\partial x_j}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial p_{\alpha lj}}{\partial x_l}-\frac{\rho_\alpha}{m_\alpha}F_{\alpha j}\right\}+u_{\alpha j}\left\{\rho_\alpha\left(\frac{\partial u_{\alpha k}}{\partial t}+u_{\alpha l}\frac{\partial u_{\alpha k}}{\partial x_l}\right)+\frac{\partial p_\alpha}{\partial x_k}+\frac{\partial p_{\alpha lk}}{\partial x_l}-\right.$$

$$\left.-\frac{\rho_\alpha}{m_\alpha}F_{\alpha k}\right\}+\frac{e_\alpha H_{0t}}{m_\alpha c}(e_{jst}p_{\alpha ks}-e_{kst}p_{\alpha js})+\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_{\alpha l}\frac{\partial}{\partial x_l}\right)[p_\alpha\delta_{jk}+p_{\alpha jk}]+$$

$$+p_\alpha\left(\frac{\partial u_{\alpha k}}{\partial x_j}+\frac{\partial u_{\alpha j}}{\partial x_k}+\delta_{jk}\frac{\partial u_{\alpha l}}{\partial x_l}\right)+p_{\alpha jk}\frac{\partial u_{\alpha l}}{\partial x_l}+p_{\alpha lj}\frac{\partial u_{\alpha k}}{\partial x_l}+p_{\alpha lk}\frac{\partial u_{\alpha j}}{\partial x_l}+$$

$$+\frac{\partial Q_{\alpha ljk}}{\partial x_l}=I_\alpha\left(A_{jk}^{(2)}\right)+\frac{\varkappa T_\alpha}{m_\alpha}\delta_{jk}I_\alpha\left(A^{(0)}\right)=0. \quad (2.3.25)$$

Заменяя первую фигурную скобку слева согласно (11) на $I_\alpha(A^{(0)})$ и используя для замены следующих фигурных скобок с $u_{\alpha k}$ и $u_{\alpha j}$ уравнение (13), приходим к следующему результату:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_{\alpha l}\frac{\partial}{\partial x_l}\right)[p_\alpha\delta_{jk}+p_{\alpha jk}]+p_\alpha\left(\frac{\partial u_{\alpha k}}{\partial x_j}+\frac{\partial u_{\alpha j}}{\partial x_k}+\delta_{jk}\frac{\partial u_{\alpha l}}{\partial x_l}\right)+$$

$$+p_{\alpha jk}\frac{\partial u_{\alpha l}}{\partial x_l}+p_{\alpha lj}\frac{\partial u_{\alpha k}}{\partial x_l}+p_{\alpha lk}\frac{\partial u_j}{\partial x_l}+$$

$$+\frac{e_\alpha H_{0t}}{m_\alpha c}(e_{jst}p_{\alpha ks}-e_{kst}p_{\alpha jk})+\frac{\partial Q_{\alpha ljk}}{\partial x_l}=I_\alpha\left(A_{jk}^{(2)}\right)-u_{\alpha j}I_\alpha\left(A_k^{(1)}\right)-$$

$$-u_{\alpha k}I_\alpha\left(A_j^{(1)}\right)+\left(\frac{\varkappa T_\alpha}{m_\alpha}\delta_{jk}-u_{\alpha j}u_{\alpha k}\right)I_\alpha\left(A^{(0)}\right). \quad (2.3.26)$$

Представляет интерес и одно из следствий уравнения (26), получаемое посредством определения следов (сумм диагональных элементов) для каждого из тензорных элементов (26). При этом переходе используется свойство, вытекающее из (6), (7), согласно которому след тензора p_{ij} равен нулю ($p_{ii}=0$). После выполнения указанной операции в применении к (26) приходим к уравнению

$$3\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_{\alpha l}\frac{\partial}{\partial x_l}\right)p_\alpha+5p_\alpha\frac{\partial u_{\alpha l}}{\partial x_l}+2p_{\alpha lm}\frac{\partial u_{\alpha l}}{\partial x_m}+\frac{\partial Q_{lmm}}{\partial x_l}=$$

$$=I_\alpha\left(A_{ll}^{(2)}\right)-2u_{\alpha l}I_\alpha\left(A_l^{(1)}\right)+\left(\frac{3\varkappa T_\alpha}{m_\alpha}-u_\alpha^2\right)I_\alpha\left(A^{(0)}\right). \quad (2.3.27)$$

Умножая обе части (27) на $\delta_{jk}/3$ и вычитая их из (26), имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}+u_{\alpha l}\frac{\partial}{\partial x_l}\right)p_{\alpha jk}+p_\alpha\left(\frac{\partial u_{\alpha k}}{\partial x_j}+\frac{\partial u_{\alpha j}}{\partial x_k}-\frac{2}{3}\delta_{jk}\frac{\partial u_{\alpha l}}{\partial x_l}\right)+$$

$$+p_{\alpha lk}\frac{\partial u_{\alpha j}}{\partial x_l}+p_{\alpha lj}\frac{\partial u_{\alpha k}}{\partial x_l}+p_{\alpha jk}\frac{\partial u_{\alpha l}}{\partial x_l}-\frac{2}{3}\delta_{jk}p_{\alpha ml}\frac{\partial u_{\alpha m}}{\partial x_l}+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x_l}\left(Q_{\alpha ljk}-\frac{1}{3}\delta_{jk}Q_{\alpha lmm}\right)+\frac{e_\alpha H_{0t}}{m_\alpha c}(e_{jst}p_{\alpha ks}-e_{kst}p_{\alpha js})=$$

$$= I_\alpha\left(A^{(2)}_{jk}\right) - \frac{1}{3}\delta_{jk} I_\alpha\left(A^{(2)}_{ll}\right) - \Big[u_{\alpha j} I_\alpha\left(A^{(1)}_{k}\right) + u_{\alpha k} I_\alpha\left(A^{(1)}_{j}\right) - \\ - \frac{2}{3}\delta_{jk} u_{\alpha l} I_\alpha\left(A^{(1)}_{l}\right)\Big] - \left(u_{\alpha j} u_{\alpha k} - \frac{1}{3}\delta_{jk} u_\alpha^2\right) I_\alpha\left(A^{(0)}\right). \quad (2.3.28)$$

Следующие уравнения для моментов при $n = 3$ оказываются еще более громоздкими. Поэтому возникает вопрос о каких-то упрощениях. Последние, несомненно, имеют место при переходе к 13-моментному приближению Грэда [20—22]. В этом приближении, нацеленном на применение к системам с достаточно высокими частотами столкновений, тензор потока тепла считается диагональным и заменяется вектором $\mathbf{Q}_j$ с компонентами Q_{jll} ($j = 1, 2, 3$). Тогда число независимых переменных уменьшается до 13 (плотность ρ, давление p, три компоненты скорости $\mathbf{u}$, пять компонент тензора p_{ij} *) и три составляющие Q_j).

Будем считать, как это часто делается в гидродинамических уравнениях высоких порядков, что величины u_j, p_{jk}, Q_j являются величинами первого порядка малости. Выпишем теперь упрощенное уравнение, следующее из (28) в 13-моментном приближении и пренебрежении величинами второго порядка малости:

$$\frac{\partial p_{\alpha jk}}{\partial t} + p_\alpha\left(\frac{\partial u_{\alpha k}}{\partial x_j} + \frac{\partial u_{\alpha j}}{\partial x_k} - \frac{2}{3}\delta_{jk}\frac{\partial u_{\alpha l}}{\partial x_l}\right) + \\ + \frac{1}{5}\left(\frac{\partial Q_{\alpha j}}{\partial x_k} + \frac{\partial Q_{\alpha k}}{\partial x_j} - \frac{2}{3}\delta_{jk}\frac{\partial Q_{\alpha l}}{\partial x_l}\right) + \frac{e_\alpha H_{0t}}{m_\alpha c}\left(e_{jst} p_{\alpha ks} - e_{kst} p_{\alpha js}\right) = \\ = I_\alpha\left(A^{(2)}_{jk}\right) - \frac{1}{3}\delta_{jk} I_\alpha\left(A^{(2)}_{ll}\right) - \Big[u_{\alpha j} I_\alpha\left(A^{(1)}_{k}\right) + u_{\alpha k} I_\alpha\left(A^{(1)}_{j}\right) - \\ - \frac{2}{3}\delta_{jk} u_{\alpha l} I_\alpha\left(A^{(1)}_{l}\right)\Big]. \quad (2.3.29)$$

При записи в (29) слагаемого, зависящего от компонент вектора потока тепла $\mathbf{Q}$, использовалось соотношение

$$Q_{jkl} = (1/5)\left(Q_j \delta_{kl} + Q_k \delta_{jl} + Q_l \delta_{jk}\right), \quad (2.3.30)$$

связывающее линейным образом компоненты тензора Q_{jkl} с составляющими вектора $\mathbf{Q}$, обозначаемыми в (30) разными индексами. Не пытаясь дать вывод (30), приведем аргументацию в пользу справедливости этого соотношения. Можно убедиться, например, в том, что $Q_j = Q_{jll}$. Для нахождения Q_{jll} нужно в (30) приравнять индексы k и l и просуммировать по l. При этом суммировании в скобке, представленной в (30), появляется фактор 5. После сокращения с коэффициентом в (30) мы устанавливаем, что $Q_j = Q_{jll}$. Естественно, что аналогичные связи получаются и для Q_{kll} и Q_{ljj}. В то же время связь (30) удовлетворяет требованию 13-моментного приближения: замене тензора Q_{jkl} на вектор Q_j.

Таким образом, при наличии тринадцати переменных мы располагаем пока десятью уравнениями [уравнение непрерывности (10), три уравнения для компонент скорости (14) и шесть уравнений для давления p и 5 компонент тензора p_{jk} (27)]. Напомним, что $p_{jk} = p_{kj}$ и $p_{ll} = 0$. Недостающие 3 уравнения можно получить при использовании момента 3-го порядка (пропорционального произведению компонент скорости третьей степени), но представляемого не тензором 3-го ранга, а вектором $A^{(3)}_j$. Такой выбор яв-

*) Как уже указывалось, след тензора p_{ij} исчезает ($p_{jj} = 0$). В силу этого имеется линейная связь между шестью неравными компонентами симметричного тензора p_{jk} и независимыми будут только пять компонент.

ляется прямым следствием перехода к 13-моментному приближению. Подставляя в (9) множитель $A_j^{(3)} = m_\alpha v_{\alpha j}\left(v_\alpha^2 + 5\varkappa T_\alpha/m_\alpha\right)$, приходим к уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(5p_\alpha u_{\alpha j} + Q_{\alpha j} + \rho_\alpha u_{\alpha j} u_\alpha^2 + p_{\alpha jl} u_{\alpha l}\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial x_l}\Big\{\rho_\alpha u_{\alpha l} u_{\alpha j} u_\alpha^2 + p_\alpha\left(u_\alpha^2 \delta_{jl} + 5u_{\alpha l} u_{\alpha j}\right) + u_\alpha^2 p_{lj} + \\ + 2u_{\alpha j} u_{\alpha m} p_{\alpha lm} + 2u_{\alpha l} u_{\alpha m} p_{\alpha mj} + \frac{1}{5} u_{\alpha m} Q_{\alpha m} \delta_{lj} + \frac{6}{5}\left(u_{\alpha l} Q_{\alpha i} + u_{\alpha j} Q_{\alpha l}\right)\Big\} + \\ + \frac{\partial}{\partial x_l}\left(5p_\alpha \frac{\varkappa T_\alpha}{m_\alpha}\delta_{lj} + \frac{7\varkappa T_\alpha}{m_\alpha} p_{lj}\right) - \frac{5F_{\alpha j}}{m_\alpha} p_\alpha - \frac{2F_{\alpha l} p_{\alpha jl}}{m_\alpha} - \frac{e_\alpha}{m_\alpha c}[\mathbf{Q}_\alpha \mathbf{H}_0]_j = \\ = I_\alpha\left(A_j^{(3)}\right) + \frac{5\varkappa T_\alpha}{m_\alpha} I_\alpha\left(A_j^{(1)}\right). \quad (2.3.31)$$

При переходе к этому уравнению использовались соотношения (6), (7), (11). С последним из них связано появление в правой части (31) члена с $I_\alpha\left(A_j^{(1)}\right)$. Детали вывода (30) мы приводить не будем. Это уравнение менее важно, чем предшествующие уравнения переноса, а переход к нему очень громоздок (некоторые подробности можно найти в [22, 23]).

Как указывалось, при использовании 13-моментного подхода часто применяют приближение, когда можно считать малыми первого порядка величины ρ, $\mathbf{u}$, p_{ij} и Q_j. Это в какой-то степени предопределено условиями применимости гидродинамического описания, о которых пойдет речь ниже. Пренебрежем в (31) нелинейными слагаемыми, опустив члены с высокими степенями компонент скорости, а также с произведениями типа $u_l Q_j$. Тогда уравнение (31) упрощается:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(5p_\alpha u_{\alpha j} + Q_{\alpha j}\right) - \frac{e_\alpha}{m_\alpha c}[\mathbf{Q}_\alpha \mathbf{H}_0]_j + \frac{\partial}{\partial x_l}\left\{5p_\alpha \frac{\varkappa T_\alpha}{m_\alpha}\delta_{lj} + 7\frac{\varkappa T_\alpha}{m_\alpha} p_{\alpha lj}\right\} - \\ - \frac{5F_{\alpha j} p_\alpha}{m_\alpha} - \frac{2F_{\alpha l} p_{\alpha jl}}{m_\alpha} = I_\alpha\left(A_j^{(3)}\right) + \frac{5\varkappa T_\alpha}{m_\alpha} I_\alpha\left(A_j^{(1)}\right). \quad (2.3.32)$$

Таким образом, система уравнений 13-моментного приближения складывается из (11), (14), (29) и (32). Эта система оказывается замкнутой, что обеспечивается линеаризацией уравнений высоких порядков. Эта линеаризация основана на том, что в правых частях (29), (32) имеются большие слагаемые с $I_\alpha\left(A_{jk}^{(2)}\right)$ и $I_\alpha\left(A_k^{(3)}\right)$, которые не исчезают даже при переходе в однокомпонентной системе. Для уравнений (11), (14) или их аналогий использование подобной линеаризации было бы необоснованным. Действительно, в первом из них интегралы столкновений не содержатся, а в (14) интегралы $I_\alpha\left(A_j^{(1)}\right)$ отличны от нуля только при столкновениях частиц α с частицами других сортов. Эти обстоятельства и заставляют сохранить нелинейные члены в уравнениях для моментов $n = 0$ и $n = 1$. Разумеется, что при описании многих гидродинамических явлений эти члены играют важнейшую роль.

Дальнейшее использование полученной системы из тринадцати уравнений связано с определением (хотя бы приближенным) входящих в них интегралов I_α. Существенно, чтобы после этого определения система уравнений оставалась бы замкнутой.

Одним из способов получения системы уравнений в окончательном виде, отвечающем условиям применимости гидродинамического описания, является использование разложения функции распределения в пространстве

скоростей по полиномам Эрмита, начиная с локально равновесной максвелловской функции. В 13-моментном приближении, при неполном учете связанных с ним ограничений (требований относительно потока тепла), используем следующее простое представление для функции распределения $f(\mathbf{v})$. Выбирая в качестве переменной хаотическую скорость $\mathbf{w}$, получим, учитывая только 4 члена разложения,

$$f \approx f_0(w) + a_j^{(1)} \frac{\partial f_0}{\partial w_j} + \frac{a_{jk}^{(2)}}{2\rho} \frac{\partial^2 f_0}{\partial w_j \partial w_k} + \frac{1}{6\rho} a_{jkl}^{(3)} \frac{\partial^3 f_0}{\partial w_j \partial w_k \partial w_l}. \quad (2.3.33)$$

Появление плотности ρ в знаменателях двух последних членов не имеет принципиального значения.

Чтобы определить $a_j^{(1)}$, найдем, опираясь на (33), первый момент, используя формулу

$$f \approx f_0(w) + a_j^{(1)} (\partial f_0 / \partial w_j). \quad (2.3.34)$$

Аналогично мы будем поступать и на следующих этапах. Таким образом, приближение (33) фактически означает разложение по степеням моментов. Правда, как увидим далее, некоторые моменты в (33) не входят (соответствующие коэффициенты исчезают). Согласно (3) момент $M_j^{(1)} = Nu_j$. С другой стороны, из (34)

$$M_j^{(1)} = Nu_j + \int w_j a_l^{(1)} (\partial f / \partial w_l)\, d\mathbf{w}.$$

Отсюда следует требование $a_l^{(1)} \int w_j (\partial f_0 / \partial w_l)\, d\mathbf{w} = 0$. Так как последний интеграл в нуль не обращается, то следует принять $a_l^{(1)} = 0$.

Для нахождения $a_{jk}^{(2)}$ используем при $a_l^{(1)} = 0$ формулу

$$f = f_0(w) + \frac{a_{jk}^{(2)}}{2\rho} \frac{\partial^2 f_0}{\partial w_j \partial w_k}. \quad (2.3.35)$$

Вычисления момента $M_{jk}^{(2)}$ ранее [см. (5) — (7)] приводят к результату

$$mM_{jk}^{(2)} = \rho u_j u_k + p\delta_{jk} + p_{jk}.$$

С другой стороны,

$$mM_{jk}^{(2)} = m \int (u_j + w_j)(u_k + w_k)\left(f_0 + \frac{a_{lm}^{(2)}}{2\rho} \frac{\partial^2 f_0}{\partial w_l \partial w_m} \right) d\mathbf{w},$$

откуда

$$p_{jk} = \frac{a_{lm}}{2N} \int w_j w_k \frac{\partial^2 f_0}{\partial w_l \partial w_m}\, d\mathbf{w}.$$

Результат интегрирования можно конкретизировать, определив связь между p_{jk} и a_{jk} для выбранных j и k. Так, например, при $j = 1$, $k = 2$

$$p_{xy} = \frac{a_{lm}}{2N} \int w_x w_y \frac{\partial^2 f_0}{\partial w_l \partial w_m}\, dw_x\, dw_y\, dw_z. \quad (2.3.36)$$

Используя для $f_0(w)$ максвелловское распределение (2.1.19), когда

$$f_0(w) = A \exp\left\{ - \frac{m\left(w_x^2 + w_y^2 + w_z^2\right)}{2\varkappa T} \right\},$$

нетрудно понять, что в (36) в двойной сумме справа по индексам l и m не исчезают только интегралы либо когда $l=1$ и $m=2$, или при $l=2$, $m=1$. В противном случае в подынтегральных выражениях будут содержаться множители с нечетными степенями w_x, w_y, w_z, что обеспечивает исчезновение интегралов. В результате из (36)

$$p_{xy} = \frac{a_{xy}}{N} \int w_x w_y \frac{\partial^2 f_0}{\partial w_x \partial w_y} \, dw_x \, dw_y \, dw_z.$$

Подставляя (2.1.19), мы столкнемся после дифференцирования с уже использованными ранее интегралами. Интегрируя, убеждаемся, что

$$p_{xy} = a_{xy}.$$

Аналогичные связи получаются и для других компонент тензора a_{jk}. Таким образом, в следующем приближении

$$f = f_0(w) + \frac{p_{jk}}{2\rho} \frac{\partial^2 f_0}{\partial w_j \partial w_k} + \frac{a_{jkl}^{(3)}}{6\rho} \frac{\partial^3 f_0}{\partial w_j \partial w_k \partial w_l}. \tag{2.3.37}$$

Чтобы найти тензорный коэффициент $a_{jkl}^{(3)}$, нужно сопоставить соотношение (8) с выражением для

$$mM_{jkl}^{(3)} = m \int (u_j + w_j)(u_k + w_k)(u_l + w_l) \times \\ \times \left(f_0 + \frac{p_{mn}}{2\rho} \frac{\partial^2 f_0}{\partial w_m \partial w_n} + \frac{a_{mns}^{(3)}}{6\rho} \frac{\partial^3 f_0}{\partial w_m \partial w_n \partial w_s} \right) d\mathbf{w}.$$

В результате имеем

$$Q_{jkl} = \frac{a_{mns}^{(3)}}{6N} \int w_j w_k w_l \frac{\partial^3 f_0}{\partial w_m \partial w_n \partial w_s} \, d\mathbf{w}. \tag{2.3.38}$$

Интегрирование по $dw_x dw_y dw_z$ здесь относительно громоздко. Как и ранее, при определении коэффициента $a_{jk}^{(2)}$, фактически можно взять лишь одну из компонент Q_{jkl}. Например, остановимся на составляющей тензора Q_{xyz}. Тогда легко установить, что при суммировании по индексам m, n, s в формуле для $M_{jkl}^{(3)}$ не исчезают только члены с $m=1$, $n=2$ и $s=3$. Аналогично соотношению для p_{xy} имеем

$$Q_{xyz} = \frac{a_{xyz}^{(3)}}{N} \int w_x w_y w_z \frac{\partial^3 f_0}{\partial w_x \partial w_y \partial w_z} \, dw_x dw_y dw_z. \tag{2.3.39}$$

Коэффициент 1/6 в (38) при переходе к (39) сократился, так как при перестановке индексов x, y, z допустимы шесть реализаций. Для максвелловского распространения $f_0(w)$ (2.1.19) интегрирование особых трудностей не представляет. В итоге имеем простой результат $a_{xyz}^{(3)} = -Q_{xyz}$. Та же простая связь между $a_{jkl}^{(3)}$ и Q_{jkl} имеет место для любой компоненты:

$$a_{jkl}^{(3)} = -Q_{jkl}.$$

В итоге получаем, уточняя (37), что

$$f = f_0 + \frac{p_{jk}}{2\rho} \frac{\partial^2 f_0}{\partial w_j \partial w_k} - \frac{Q_{jkl}}{6\rho} \frac{\partial^3 f_0}{\partial w_j \partial w_k \partial w_l}.$$

В 13-моментном приближении после дифференцирования и использования (30) получаем для частиц сорта

$$f_\alpha = f_{\alpha 0}\left\{1 + \frac{p_{\alpha jk} m_\alpha^2}{2\rho_\alpha \varkappa^2 T_\alpha^2}\left(w_{\alpha j} w_{\alpha k} - \frac{\varkappa T_\alpha}{m_\alpha}\delta_{jk}\right) + \frac{Q_{\alpha i} m_\alpha^2}{2\rho_\alpha \varkappa^2 T_\alpha^2}\left(1 - \frac{m_\alpha w^2}{5\varkappa T_\alpha}\right)\right\}. \tag{2.3.40}$$

Трудности при вычислениях I_α с использованием (40) связаны для «некулоновских» столкновений с неточным знанием или сложным характером зависимостей сечений от скоростей. Поэтому здесь естественной является уже примененная ранее замена истинных сечений некоторыми усредненными эффективными (не зависящими от w и углов рассеяния θ).

Рассмотрим теперь вклад членов I_α в основные уравнения. При неучете химических процессов $I_\alpha(A^{(0)}) = 0$, так что столкновения в уравнение непрерывности не входят.

В уравнение (12), выражающее сохранение импульса, входит интеграл $I_\alpha\left(A_j^{(1)}\right)$, где $A_j^{(1)} = mv_j$. Как уже отмечалось, из соображений, связанных с сохранением импульса, $I_\alpha\left(A_j^{(1)}\right) = 0$. Таким образом, столкновения между одинаковыми частицами в (12) не входят. Рассмотрим столкновения между частицами разных сортов, когда $I_\alpha = I^\beta_\alpha\left(A_j^{(1)}\right)$. В качестве примера остановимся на столкновениях электронов с нейтральными частицами, используя соотношение для J_{en} (2.2.3) (тяжелые частицы считаются неподвижными). Тогда для интеграла $I_e^n\left(A_j^{(1)}\right) = I_e^n\,(mv_j)$ имеем

$$I_e^n\,(mv_j) = N_n m \int\int v_{ej} v_e q_{en}\,(v_e,\,\theta)\left[f\left(\mathbf{v}_e'\right) - f\left(\mathbf{v}_e\right)\right] d\mathbf{v}_e d\Omega. \tag{2.3.41}$$

Будем считать, что сечение q_{en} не зависит от v и θ. Это значит, что рассматривается некоторое усредненное сечение $\bar{q}_{en}$. Нужно учесть, что в переменных $\mathbf{w}$ функция $f(\mathbf{w})$ характеризуется соотношением (40). Воспользуемся сначала первым приближением, в котором $f = f_0(w)$. Тогда, имея в виду, что $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u}$, в переменных $\mathbf{v}$ можно написать

$$f_0 = N\left(m/2\pi\varkappa T_e\right)^{3/2} \exp\left\{-m\left(\mathbf{v} - \mathbf{u}\right)^2/2\varkappa T_e\right\} \approx$$
$$\approx N\left(m/2\pi\varkappa T_e\right)^{3/2} \exp\left(-mv^2/2\varkappa T_e\right) \exp\left(m\mathbf{v}\mathbf{u}/\varkappa T_e\right). \tag{2.3.42}$$

Последнее приближение в (42) можно использовать при $u \ll \bar{v}$, что обычно для электронной компоненты выполняется даже в неравновесной плазме. Далее, используя то же приближение для разности функций распределения, которые входят в (41) в подынтегральное выражение, имеем

$$f\left(\mathbf{v}_e'\right) - f\left(\mathbf{v}_e\right) =$$
$$= N\,(2\pi)^{-3/2}\left(m/\varkappa T_e\right)^{5/2} \mathbf{u}_e\left(\mathbf{v}_e' - \mathbf{v}_e\right) \exp\left(-mv_e^2/2\varkappa T_e\right) =$$
$$= -N\,(2\pi)^{-3/2}\left(m/\varkappa T_e\right)^{5/2}(1 - \cos\theta)\left(\mathbf{v}_e \mathbf{u}_e\right) \exp\left(-mv_e^2/2\varkappa T_e\right). \tag{2.3.43}$$

Учитывая принятую грубую аппроксимацию (сечение q_{en} от v_e и θ не зависит), можно фактор $(1 - \cos\theta)$ заменить на 1, так как после интегрирования по θ часть с $\cos\theta$ обращается в нуль. Выбирая, как и в п. 2 этой главы, дифференциальное эффективное сечение в форме $a^2/4$ (a — радиус частицы), из (41) и (43)

$$I_e^n\,(mv_j) = -\frac{m^{7/2} N_n N}{(2\pi)^{3/2}\,(\varkappa T)^{5/2}}\,\pi a^2 \int v_{ej} v_e v_{ek} u_{ek} \exp\left(-\frac{mv_e^2}{2\varkappa T_e}\right) d\mathbf{v}_e. \tag{2.3.44}$$

Хотя I_e^n формально представляет сумму интегралов по индексу k. фактически не исчезает только интеграл при $k = j$. Дело в том, что во всех остальных членах суммы в предэкспоненциальных частях содержатся нечетные степени для хотя бы одной из компонент скорости $\mathbf{v}_e$, в силу чего эти интегралы обращаются в нуль. Выписывая далее формулу для $I_e^n (mv_j)$, нужно иметь в виду, что, несмотря на повторение индекса j, суммирование по нему не проводится:

$$I_e^n = -\frac{\pi a^2 N_n N}{(2\pi)^{3/2}} \frac{m^{7/2}}{(\varkappa T)^{5/2}} u_{ej} \int v_{ej}^2 v_e \exp\left(-\frac{mv_e^2}{2\varkappa T_e}\right) d\mathbf{v}_e.$$

Далее, выполняя интегрирование, имеем

$$\int v_{ej}^2 v_e \exp\left(-mv_e^2/2\varkappa T_e\right) d\mathbf{v}_e = \frac{1}{3} \int_0^\infty v^3 \exp\left(-mv^2/2\varkappa T_e\right) d\mathbf{v} =$$

$$= \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty v^5 \exp\left(-mv^2/2\varkappa T_e\right) dv = \frac{4\pi}{3} \left(2\varkappa T_e/m\right)^{5/2}.$$

Учитывая результаты интегрирования, приходим к формуле

$$I_e^n (mv_j) = -\frac{4}{3} \pi a^2 N N_n \left(8\varkappa T_e/\pi m\right)^{1/2} m u_{ej} = -\rho_e \nu_{en} u_{ej}. \qquad (2.3.45)$$

Входящая в это соотношение частота ν_{en} совпадает с получаемой из формулы для $\nu_{эф}$ (2.2.3а). Здесь последний индекс у частоты ν использоваться не будет. Если отказаться от допущения о неподвижности нейтральных частиц и учесть их направленное движение со скоростью $\mathbf{u}_n$, то можно несколько обобщить соотношение (45) и написать

$$I_e^n = -\rho_e \nu_{en} (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_n). \qquad (2.3.46)$$

Появление разности $\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_n$ очевидно из физических соображений, так как для силы трения между частицами разных сортов существенна их относительная скорость. Можно смотреть на формулу (45) как на соотношение для случая, когда в рассматриваемой системе отсчета нейтральные частицы покоятся.

Для столкновений заряженных частиц появление силы трения видно непосредственно, если использовать формулировку интеграла столкновений по Ландау [см. (2.2.70)]. Этот факт подтверждается при анализе более сложных случаев (см. расчеты в [22]).

Более детальный анализ с учетом отличий f_e (40) от $f_{e0}(w)$ приводит к появлению в соотношениях типа (46) слагаемых, пропорциональных $\mathbf{Q}_e$ и $\mathbf{Q}_n$. Однако включение этих потоков тепла в формулировку закона сохранения импульса должно рассматриваться лишь как малосущественное уточнение. Поэтому ниже члены с $\mathbf{Q}_e$ в $\mathbf{Q}_n$ в уравнениях моментов при $n = 1$ учитываться не будут.

Для столкновения ионов с нейтральными частицами можно аналогично (46) написать

$$I_i^n = -\rho_i \nu_{in} (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_n). \qquad (2.3.47)$$

При одинаковых массах всех тяжелых частиц ($M_i = M_n = M$) и одинаковых температурах ($T_i = T_n = T$) имеем при использовании прежнего упрощения (дифференциальное сечение не зависит от v и θ; полное сечение

равно πa^2) в соответствии с [22] соотношение

$$\nu_{in} = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi a^2 \left(\frac{8\varkappa T}{m\pi}\right)^{1/2} N_n, \qquad (2.3.48)$$

где под a здесь нужно понимать эффективный радиус нейтральной частицы по отношению к взаимодействию ионов с молекулами (атомами).

При слабых отклонениях f от максвелловского распределения $f_0(v)$ основное значение в правой части (26) обычно приобретает слагаемое $I_\alpha\left(A_{jk}^{(2)}\right)^*$). Член с $I_\alpha\left(A_{jk}^{(2)}\right)$ не исчезает и в однородном по составу газе это заставляет обратить внимание на член $I_\alpha^\alpha\left(A_{jk}^{(2)}\right)$, хотя допустимы и ситуации, когда не менее важны и слагаемые $I_\alpha^\beta\left(A_{jk}^{(2)}\right)$ с $\alpha \neq \beta$.

Обратимся, для определенности, к случаю, когда влияние соударений в (26) проявляется прежде всего за счет слагаемого $I_\alpha^\alpha\left(A_{jk}^{(2)}\right)$. Для него может быть получена при типичных для данного параграфа упрощениях следующая формула [22]:

$$I_\alpha^\alpha\left(A_{jk}^{(2)}\right) = -\nu_{\alpha\alpha} p_{\alpha jk}, \qquad (2.3.49)$$

где

$$\nu_{\alpha\alpha} = \frac{4\sqrt{2}}{5}\pi a^2 \left(\frac{8\varkappa T_\alpha}{\pi m_\alpha}\right)^{1/2} N_\alpha.$$

Соотношение (49) имеет вид, типичный для релаксационных процессов, и по структуре сходно с (46) — (48). Только в данном случае речь идет о релаксации с характерным временем $\nu_{\alpha\alpha}^{-1}$ компонент тензора натяжений $p_{\alpha jk}$. Простой вид формулы (49) дает основание не приводить здесь детального вывода, при котором можно получить значения численных коэффициентов в соотношениях для $\nu_{\alpha\alpha}$. Появление в (49) справа компонент $p_{\alpha jk}$ можно понять, если обратиться к формуле (40). В первом приближении, когда $f = f_0(w)$, интеграл $I_\alpha^\alpha\left(A_{jk}^{(2)}\right)$ обращается в нуль (структура множителя $A_{jk}^{(2)} = m\left[v_j v_k - (\varkappa T/m)\,\delta_{jk}\right]$ такова, что после его эффективного усреднения в I_α^α с $f = f_0$ соответствующий интеграл исчезает). Отличный от нуля результат получается в следующем приближении, когда

$$f \approx f_0\left\{1 + \frac{p_{jk} m}{2\rho\varkappa^2 T^2}\left(w_j w_k - \frac{\varkappa T}{m}\delta_{jk}\right)\right\},$$

что и объясняет появление в (49) составляющих тензора $p_{\alpha ij}$. При линейной связи $I_\alpha^\alpha\left(A_{jk}^{(2)}\right)$ и $p_{\alpha ij}$ в нее должен входить множитель, имеющий размерность частоты. Учитывая, что выражение для I_α^α содержит сечение q и концентрацию N_α, совмещение этого множителя с частотой $\nu_{\alpha\alpha}$ представляется неизбежным. И, наконец, обратимся к интегралу $I_\alpha^\alpha\left(A_j^{(3)}\right)$, который фигурирует в уравнении для потоков тепла (32). Он определяется соотношением, по своей структуре сходным с только что приведенным. Если же использовать подробные расчеты [22], то можно получить

$$I_\alpha^\alpha\left(A_j^{(3)}\right) = -(2/3)\,\nu_{\alpha\alpha} Q_j^\alpha, \qquad (2.3.50)$$

где $\nu_{\alpha\alpha}$ определяется из (49). Согласно (50) релаксация потоков Q_j^α происходит практически с той же скоростью, что и составляющих $p_{\alpha ij}$.

---

*) Напомним, что ранее было выбрано $A_{jk}^{(2)} = m\left(v_j v_k - (\varkappa T/m)\,\delta_{jk}\right)$.

Выбранный для иекулоновских столкиовений путь замены истинных дифференциальных сечений некоторыми средними вполие естествен. Конечно, нужно иметь в виду, что для разных типов процессов переноса в силу зависимости сечений от v и θ возможны ошибки. Фактически в таких случаях нужно уточнять сечение πa^2 для каждого такого процесса. Однако если рассматривать иеширокие интервалы параметров (иапример, температур), то по порядку величины результаты должны быть правильными.

Из-за сильной зависимости резерфордовского сечеиия от v и θ случай столкновений между заряженными частицами требует специального рассмотрения. Нельзя, конечио, не отметить, что он особенно важен для плазменных сред с высокой степенью ионизации. Если отклонения функции f от f_0 невелики, то радикальных отличий здесь не возникает. Можно для кулоновских соударений воспользоваться упрощенной записью интеграла столкновений в форме Ландау (2.2.67). Расчеты соответствующих частот, которые будут соизмеримы с частотой (2.2.44) *), проводились неоднократно. Они связаны для ряда процессов с громоздкими вычислениями. С другой стороны, из уравнения (2.2.67) легко, иапример, сразу установить наличие трения между электронами и ионами. По аналогии с (46)

$$I_e^i = -\rho_e \nu_{ei} (\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i), \tag{2.3.51}$$

где ν_{ei} отличается от (2.2.44) только миожителем порядка единицы. Часто такого рода отличия не играют решающей роли.

Сложнее обстоит дело, когда отклонения от стандартного максвелловского распределения значительны. Например, движения плазмы характеризуются различными давлениями в направлениях магнитного поля и перпендикулярно к нему. Здесь может возникнуть необходимость внесения существенных корректив [в частности, в уравнения (26) и (32)], о чем мы далее сделаем дополнительные замечания.

Остановимся теперь на критериях применимости полученной системы квазигидродинамических уравнений в 13-моментном приближении. Приводимые ограничения аналогичны используемым и при других способах гидродинамического описания. Как ясно из распределения (40), слагаемые с p_{jk} и Q_j являются небольшими поправками к f_0. Максвелловское распределение удовлетворяет уравнению Больцмана, если малосущественны члены с градиентами и производными по времени t. Для того чтобы обеспечить малость подобных отклонений, необходимо наложить условие на характерные времена релаксации τ. Они должны быть меньше времени t_0, при котором происходят существенные изменения основных величин, т. е.

$$t_0 \gg \tau. \tag{2.3.52}$$

Кроме того, можно сформулировать аналогичное требование на характерные пространственные масштабы L. При релаксации к максвелловскому распределению их нужно сравнивать с длиной свободного пробега $l_{\text{св}}$. Критерий применимости гидродинамического описания приобретает вид

$$l_{\text{св}}/L = \text{Kn} \ll 1 \tag{2.3.53}$$

*) При столкновениях одинаковых частиц можно ввести коррективы на основе [22], если, конечно, здесь из общих соображений соответствующие интегралы I_α^α не обращаются в нуль.

и означает малость числа Кнудсена. Условие (53) — это основное требование, выполнение которого является абсолютно необходимым при последовательном использовании гидродинамического описания. Возможность перехода к гидродинамическим уравнениям переноса при выполнении (53) подтверждается как физическими соображениями, так и разработанными методами перехода к этим уравнениям, основанными на разложениях по малому параметру $\sqrt{\mathrm{Kn}}$ [4, 20].

Приводя условия (52), (53), отметим, что в полной мере их нужно использовать при формулировке уравнений для высоких моментов ($n=2$, 3). Что же касается уравнений с $n=0$, 1, то иногда их законно (при некоторых уточнениях) можно применять даже за пределами ограничений (52), (53). Последнее часто и делается, особенно при решении сложных (например, нелинейных) задач.

Сформулируем теперь в окончательной форме квазигидродинамические уравнения для электронов и ионов (иногда и для нейтральных частиц; для них используется индекс n). Влияние неионизированной компоненты существенно для слабоионизированной плазмы. С такого рода плазмой приходится, например, сталкиваться в ионосфере (гл. 1).

Примем, что плазма состоит из электронов, положительных ионов одного сорта и нейтральных частиц одного сорта. Для заряженных частиц уравнения непрерывности (11), (12) записываются следующим образом:

$$\partial N_e/\partial t + \operatorname{div} N_e\mathbf{u}_e = J - \alpha_r N_e N_i, \tag{2.3.54}$$

$$\partial N_i/\partial t + \operatorname{div} N_i\mathbf{u}_i = J - \alpha_r N_e N_i, \tag{2.3.55}$$

где J характеризует скорость образования заряженных частиц из-за ионизации (например, из-за фотоионизации), а последние члены справа описывают рекомбинацию электронов и ионов.

Для нейтральных частиц можно написать

$$\partial N_n/\partial t + \operatorname{div} N_n\mathbf{u}_n = \alpha_r N_e N_i - J. \tag{2.3.56}$$

Если плазма слабоионизирована ($N_n \gg N_i$, $N_n \gg N_e$), то правые части в (56) несущественны и их опускают.

Еще раз подчеркнем, что уравнения (54)—(56) вытекают из кинетического уравнения Больцмана, в принципе, без использования условий (52), (53).

Конкретизируем теперь запись уравнений (14) при учете (46)—(48), (51). Для электронной компоненты

$$\rho_e \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial t} + \rho_e(\mathbf{u}_e\nabla)\mathbf{u}_e = -\nabla p_e - \boldsymbol{\Gamma}_e + \frac{\rho_e\mathbf{F}_e}{m} - eN_e\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{u}_e\mathbf{H}]\right) - \\ - m\nu_{en}N_e(\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_n) - m\nu_{ei}N_e(\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i), \tag{2.3.57}$$

где массу электрона m здесь и всюду далее будем писать без индекса. Вектор $\boldsymbol{\Gamma}_e$ имеет проекции $\Gamma_{ej} = -\partial p_{ejk}/\partial x_k$. Часто вместо

полного магнитного поля **H** учитываем влияние только внешнего постоянного поля $\mathbf{H}_0$.

Для ионной компоненты из (14)

$$\rho_i \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + \rho_i (\mathbf{u}_i \nabla) \mathbf{u}_i = -\nabla p_i - \mathbf{\Gamma}_i + \frac{\rho_i \mathbf{F}_i}{M_i} + eN_i\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{u}_i \mathbf{H}]\right) - \\ - m\nu_{ei} N_e (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) - M_i \nu_{in} N_i (\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_n). \quad (2.3.58)$$

Здесь в правой части должно было бы по аналогии с последним членом в (57) фигурировать слагаемое $M_i\nu_{ie}N_i(\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i)$. Оно сразу же видоизменено и содержит частоту ν_{ei}. Это связано с равенством действия и противодействия для сил трения электронов с ионами и ионов с электронами. Эти силы являются внутренними и полный импульс плазмы изменять не могут [при суммировании уравнений (56) и (57) кулоновские столкновения должны исчезать]. Вектор $\mathbf{\Gamma}_i$ определяется аналогично $\mathbf{\Gamma}_e$.

Иногда необходимо использовать также уравнения для нейтральных частиц, которые сразу выпишем с учетом закона сохранения при столкновениях полного импульса всей системы, а именно,

$$\rho_n \frac{\partial \mathbf{u}_n}{\partial t} + \rho_n (\mathbf{u}_n \nabla) \mathbf{u}_n = \\ = -\nabla p_n - \mathbf{\Gamma}_n + \frac{\rho_n \mathbf{F}_n}{M_n} - m\nu_{en} N_e (\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_e) - M_i \nu_{in} N_i (\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_i). \quad (2.3.59)$$

Для определения $\mathbf{\Gamma}_n$, $\mathbf{\Gamma}_e$ и $\mathbf{\Gamma}_i$, входящих в (57)—(59), можно воспользоваться уравнением (29). Обозначив

$$U_{jk} = \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} - \frac{2}{3}\delta_{jk}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}, \quad (2.3.60)$$

сделаем преобразование в (29), имея в виду, что в соответствии с (49) в него будет входить член порядка p_{jk}/τ, где τ — время между столкновениями. Тогда в силу (52) можно пренебречь членом с $\partial p_{jk}/\partial t$. В слабоионизированной плазме для нейтральной компоненты

$$p_{njk} = -p_n(U_{njk}/\nu_{nn}) = -\eta_n U_{njk}, \quad (2.3.61)$$

где $\eta_n = \rho_n(\varkappa T_n/M_n\nu_{nn})$ — коэффициент динамической вязкости (η_n/ρ_n — кинематическая вязкость).

В сильноионизированной плазме, если пренебречь влиянием магнитного поля $\mathbf{H}_0$,

$$p_{ejk} = -p_e(U_{ejk}/\nu_{ee}) = -\eta_e U_{ejk}, \\ p_{ijk} = -p_i(U_{ijk}/\nu_{ii}) = -\eta_i U_{ijk}, \quad (2.3.62)$$

где η_e и η_i — коэффициенты динамической вязкости электронного и ионного газов. На соотношения (62) нельзя смотреть как на

универсальные, так как обычно в плазме $\nu_{ee} \sim \nu_{ei}$ и столкновения электронов с ионами могут дать вклад в первое из соотношений.

При выполнении с большим запасом неравенства $N_n \gg N_e$, когда превалируют столкновения с нейтральными частицами, вместо (62) имеем

$$p_{ejk} = -p_e(U_{ejk}/\nu_{en}) = -\tilde{\eta}_e U_{ejk},$$
$$p_{ijk} = -p_i(U_{ijk}/\nu_{in}) = -\tilde{\eta}_i U_{ijk}. \qquad (2.3.62a)$$

Далее в окончательных формулах разница между η и $\tilde{\eta}$ отмечаться не будет, так как всегда можно сделать разумный выбор соотношения для динамической вязкости, если известны параметры плазмы. Заметим, что, в принципе, может реализоваться и промежуточный случай, когда для p_{ejk} нужно использовать (62), а для p_{ijk} — (62a).

Учитывая, что компоненты векторов $\mathbf{\Gamma}_{ein}$ определяются соотношениями вида $\Gamma_j = -\partial p_{jk}/\partial x_k$, и используя связи типа (61), получаем

$$\Gamma_j = \eta \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} - \frac{2}{3}\delta_{jk}\frac{\partial u_l}{\partial x_l}\right) =$$
$$= \eta\left(\frac{\partial^2 u_j}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial x_j} - \frac{2}{3}\frac{\partial^2 u_l}{\partial x_l \partial x_j}\right) = \eta\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_k} - \frac{1}{3}\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_k \partial x_j}\right).$$

При дифференцировании коэффициент η считался не зависящим от координат. Записывая полученное соотношение в векторной форме, получаем для электронов

$$\mathbf{\Gamma}_e = \eta_e \Delta \mathbf{u}_e + (1/3)\eta_e \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{u}_e. \qquad (2.3.63)$$

Формулы для $\mathbf{\Gamma}_i$ и $\mathbf{\Gamma}_e$ получаем из (63) заменой индексов. Далее необходимо подставить эти выражения в (57)—(59). Проведенный учет влияния вязкости для плазмы, находящейся в достаточно сильном магнитном поле $\mathbf{H}_0$, недостаточен, поскольку при переходе к (62), (62a) в (29) было пренебрежено влиянием силы Лоренца (был опущен член с $\mathbf{H}_0$). В присутствии поля $\mathbf{H}_0$ в соответствии с (29) динамические вязкости η_e и η_i будут не скалярными, а тензорными величинами [20]. Необходимо, по меньшей мере, ввести два коэффициента $\eta_\parallel$ и $\eta_\perp$ (для движений вдоль $\mathbf{H}_0$ и перпендикулярно к нему). Учет анизотропии вязкости здесь не приводится исключительно из-за громоздкости соответствующего рассмотрения.

Об уравнениях теплопроводности. Перейдем теперь к уравнениям для потоков тепла (32). Если воспользоваться уравнениями (12), (13) и пренебречь первым из нелинейных слагаемых,

то из (32) имеем

$$5u_{\alpha j}\frac{\partial p_\alpha}{\partial t}+\frac{\partial Q_{\alpha j}}{\partial t}+5p_\alpha\frac{\varkappa}{m_\alpha}\frac{\partial T_\alpha}{\partial x_j}+7p_{\alpha lj}\frac{\varkappa}{m_\alpha}\frac{\partial T_\alpha}{\partial x_j}+$$
$$+\frac{2\varkappa T_\alpha}{m_\alpha}\frac{\partial p_{\alpha lj}}{\partial x_j}-\frac{e_\alpha}{m_\alpha c}[\mathbf{Q}_\alpha\mathbf{H}_0]_j=\frac{2F_{\alpha l}p_{\alpha jl}}{m_\alpha}+I_\alpha\left(A_j^{(3)}\right). \qquad (2.3.64)$$

Принимая во внимание (50), мы в силу условия (52) пренебрегаем членом $\partial Q_{\alpha j}/\partial t$. По той же причине мы можем опустить и член $5u_{\alpha j}\partial p_\alpha/\partial t$. Опустим, как это часто делают, относительно малосущественные в (64) члены с компонентами тензора вязких напряжений $p_{\alpha jl}$. Тогда уравнение (64) сильно упрощается и приобретает для нейтральных частиц вид

$$5p_\alpha\frac{\varkappa}{m_\alpha}\frac{\partial T_\alpha}{\partial x_j}=I_\alpha\left(A_j^{(3)}\right).$$

Для заряженных частиц в присутствии $\mathbf{H}_0$ нужно писать

$$5p_\alpha\frac{\varkappa}{m_\alpha}\frac{\partial T_\alpha}{\partial x_j}=I_\alpha\left(A_j^{(3)}\right)+\frac{e_\alpha}{m_\alpha c}[\mathbf{Q}_\alpha\mathbf{H}_0]_j.$$

Дополнительный член дает возможность учесть анизотропный характер процесса теплопроводности. Мы здесь, однако, из-за сложности и громоздкости соотношений с тензорной теплопроводностью ограничимся лишь изотропным случаем. Выраженные для потоков тепла в анизотропном случае при использовании интеграла кулоновских столкновений в форме Ландау можно найти в [20].

Выше при определении $I_\alpha\left(A_j^{(3)}\right)$ мы рассматривали только столкновения между частицами одного сорта. Такой подход допустим, например, при определении электронного потока тепла $\mathbf{Q}_e$ в полностью ионизированной плазме. В случае слабоионизированной плазмы определение интеграла $I_\alpha\left(A_j^{(3)}\right)$ можно найти в [22, 23]. Обращаясь к формуле для $\mathbf{Q}_e$, учтем только что выписанную выше связь между $\partial T_\alpha/\partial x_j$ и $I_\alpha\left(A_j^{(3)}\right)$ при $\mathbf{H}_0=0$, а также $\nu_{en}=0$. Тогда

$$\mathbf{Q}_e=-(15/2)(p_e\varkappa/m\nu_{ee})\nabla T_e. \qquad (2.3.65)$$

В слабоионизированной плазме будет справедлива формула такого же типа, но с заменой ν_{ee} на ν_{en} и изменением в (65) численного коэффициента.

Перейдем теперь к выводу уравнений теплопроводности, определяющих изменения температур различных сортов частиц. Из (27) без учета химических процессов и вязких сил [они малы по сравнению с давлением на основании (53)] имеем

$$3[\partial p_\alpha/\partial t+(u_\alpha\nabla)p_\alpha]+5p_\alpha\operatorname{div}\mathbf{u}_\alpha+\operatorname{div}\mathbf{Q}_\alpha=$$
$$=I_\alpha\left(A_{ll}^{(2)}\right)-2u_{\alpha l}I_\alpha\left(A_l^{(1)}\right). \qquad (2.3.66)$$

Для однокомпонентной системы, в пренебрежении теплообменом или когда компоненты независимы, из (66) следует условие адиабатичности

$$\frac{\partial p}{\partial t}+\mathbf{u}\nabla p=\frac{5}{3}\frac{p}{\rho}\left(\frac{\partial \rho}{\partial t}+\mathbf{u}\nabla\rho\right)$$

с отношением теплоемкостей $\gamma=5/3$, что совпадает с γ для одноатомного газа. Далее, в соответствии с (16) $I_\alpha^\alpha\left(A_j^{(1)}\right)=0$. Вклад этого интеграла при столкновении частиц различных сортов уже рассматривался [см. (46), (47) и (51)]. В интегралы $I_\alpha^\beta\left(A_{ll}^{(2)}\right)$ входят исчезающие суммы $p_{\alpha ll}=0$, $p_{\beta ll}=0$ и $I_\alpha^\beta\left(A_{ll}^{(2)}\right)=0$ в тех случаях, когда температуры T_e, T_i и T_n одинаковы. Подробности учета разностей T_e-T_i, T_e-T_n и другие мы приводить не будем, хотя эти разности далее будут введены в уравнения.

С учетом этих замечаний, а также уравнений непрерывности приходим к уравнениям для температур электронов и ионов:

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}N_e\varkappa\left(\frac{\partial T_e}{\partial t}+\mathbf{u}_e\nabla T_e\right)+p_e\operatorname{div}\mathbf{u}_e+\frac{1}{2}\operatorname{div}\mathbf{Q}_e&=\\=m\nu_{en}N_e\mathbf{u}_e(\mathbf{u}_e-\mathbf{u}_n)+m\nu_{ei}N_e\mathbf{u}_e(\mathbf{u}_e-\mathbf{u}_i)&+\\+\frac{1}{2}N_e\nu_{en}\varkappa\frac{m}{M_n}(T_n-T_e)+\frac{1}{2}N_e\nu_{ei}\varkappa\frac{m}{M_i}(T_i-T_e),&\quad(2.3.67)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}N_i\varkappa\left(\frac{\partial T_i}{\partial t}+\mathbf{u}_i\nabla T\right)+p_i\operatorname{div}\mathbf{u}_i+\frac{1}{2}\operatorname{div}\mathbf{Q}_i&=\\=M_i\nu_{in}N_i\mathbf{u}_i(\mathbf{u}_i-\mathbf{u}_n)+m\nu_{ei}N_e\mathbf{u}_e(\mathbf{u}_i-\mathbf{u}_e)&+\\+\frac{1}{2}N_e\nu_{ei}\varkappa\frac{m}{M_i}(T_e-T_i)+\frac{1}{2}N_i\nu_{in}\varkappa(T_n-T_i).&\quad(2.3.68)\end{aligned}$$

Если воспользоваться соотношением (65), то для электронов можно получить уравнение

$$\begin{aligned}\frac{\partial T_e}{\partial t}+\mathbf{u}_e\nabla T_e+\frac{2}{3}T_e\operatorname{div}\mathbf{u}_e=\frac{3}{2}\frac{m}{\varkappa}\nu_{en}\mathbf{u}_e(\mathbf{u}_e-\mathbf{u}_n)&+\\+\frac{2}{3}\frac{m}{\varkappa}\nu_{ei}\mathbf{u}_e(\mathbf{u}_e-\mathbf{u}_i)+\frac{1}{3}\nu_{en}\frac{m}{M_n}(T_n-T_e)&+\\+\frac{1}{3}\nu_{ei}\frac{m}{M_i}(T_i-T_e)+\operatorname{div}\left(\chi_{T_e}\nabla T_e\right),&\quad(2.3.69)\end{aligned}$$

где $\chi_{T_e}=(5/2)(\varkappa T/m\nu_{ee})$ — коэффициент температуропроводности. Значения χ_T зависят от формы связи $\mathbf{Q}$ и ∇T для частиц выбранного сорта. Здесь наиболее существен тот вид столкновений, который преобладает в процессе переноса тепла. Располагая такими сведениями, можно написать аналогичные уравнения для ионов и нейтральных частиц.

Уравнения магнитной гидродинамики и обобщенный закон Ома. Очень часто при исследовании различных вопросов физики плазмы обращаются не к самим гидродинамическим уравнени-

ям, а к некоторым их следствиям. Эти следствия имеют и непосредственный физический интерес.

Если рассматривать трехкомпонентную среду, то можно ввести плотность для всей среды ρ, плотность плазменной компоненты ρ_p, а также соответствующие скорости $\mathbf{u}$, $\mathbf{u}_p$ и давления p и p_p, для которых имеем определения:

$$\begin{aligned} &\rho = \rho_e + \rho_i + \rho_n, \quad p = p_e + p_i + p_n, \\ &\rho_p = \rho_e + \rho_i, \qquad p_p = p_e + p_i, \\ &\mathbf{u}_p = \frac{\rho_e \mathbf{u}_e + \rho_i \mathbf{u}_i}{\rho_e + \rho_i}, \quad \mathbf{u} = \frac{\rho_e \mathbf{u}_e + \rho_i \mathbf{u}_i + \rho_n \mathbf{u}_n}{\rho_e + \rho_i + \rho_n}. \end{aligned} \tag{2.3.70}$$

Путем суммирования отдельных квазигидродинамических уравнений можно получить уравнения, описывающие всю среду в целом. Умножая уравнения (54)—(56) соответственно на m, M_i и M_n и суммируя, имеем

$$\partial\rho/\partial t + \operatorname{div}\rho\mathbf{u} = 0. \tag{2.3.71}$$

Складывая (57)—(59), получаем уравнение, определяющее изменение плотности импульса всей среды, которое запишем сначала в форме

$$\begin{aligned} \rho_e \frac{d\mathbf{u}_e}{dt} + \rho_i \frac{d\mathbf{u}_i}{dt} + \rho_n \frac{d\mathbf{u}_n}{dt} = -\nabla p + \rho'\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{j}_t\mathbf{H}] + \\ + \rho_e \frac{\mathbf{F}_e}{m} + \rho_i \frac{\mathbf{F}_i}{M_i} + \rho_n \frac{\mathbf{F}_n}{M_n} + \eta_e\left(\nabla^2 + \frac{1}{3}\operatorname{grad}\operatorname{div}\right)\mathbf{u}_e + \\ + \eta_i\left(\nabla^2 + \frac{1}{3}\operatorname{grad}\operatorname{div}\right)\mathbf{u}_i + \eta_n\left(\nabla^2 + \frac{1}{3}\operatorname{grad}\operatorname{div}\right)\mathbf{u}_n, \end{aligned} \tag{2.3.72}$$

где $\rho' = e(N_i - N_e)$, $\mathbf{j}_t$ — полная плотность усредненного микроскопического тока и обозначено $d\mathbf{u}/dt = \partial\mathbf{u}/\partial t + (\mathbf{u}\nabla)\mathbf{u}$.

Если скорости всех сортов частиц близки друг к другу, что может иметь место в плазме с частыми столкновениями (частоты соударений превышают другие характерные частоты), то уравнение (72) переходит в известное гидродинамическое уравнение Навье — Стокса:

$$\begin{aligned} \rho\frac{d\mathbf{u}}{dt} \equiv \rho\left[\frac{\partial\mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{u}\right] = -\nabla p + \rho'\mathbf{E} + \mathbf{f} + \frac{1}{c}[\mathbf{jH}] + \\ + \eta\nabla^2\mathbf{u} + \frac{1}{3}\eta\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{u}, \end{aligned} \tag{2.3.73}$$

где $\mathbf{f} = N_n\mathbf{F}_n + N_e\mathbf{F}_e + N_i\mathbf{F}_i$ — плотность сил неэлектромагнитного происхождения и $\eta = \eta_e + \eta_i + \eta_n$. Так как в (73) явно учтено влияние пондермоторной силы $c^{-1}[\mathbf{jH}]$, действующей на ток со стороны магнитного поля, это уравнение является одним из уравнений магнитной гидродинамики.

Часто с большой степенью точности можно положить $\rho' = 0$, так как в плазме обычно

$$|N_e - N_i| \ll N_e = N \qquad (2.3.74)$$

и отклонения от нейтральности крайне невелики.

В (72) входит плотность полного тока $\mathbf{j}_t$ (2.1.34). В то же время при переходе в область магнитной гидродинамики обычно заменяют $\mathbf{j}_t$ на ток проводимости $\mathbf{j}$. Если исключить некоторые специфические случаи, то для низкочастотных процессов такая замена вполне допустима.

Представление левой части (72) в форме $\rho d\mathbf{u}/dt$ приближенно справедливо и при несовпадении скоростей всех сортов частиц. В слабоионизированной плазме это справедливо, если скорости заряженных частиц не превышают сильно скоростей u_n, так что $\rho_n |d\mathbf{u}_n/dt| \gg \rho_i |d\mathbf{u}_i/dt|$. Тогда при $N_n \gg N_i$ мы имеем $\rho d\mathbf{u}/dt \approx \approx \rho_n d\mathbf{u}_n/dt$, и запись левой части (73) оправдана. Для полностью ионизированного газа та же формулировка возможна при $\rho_i |d\mathbf{u}_i/dt| \gg \rho_e |d\mathbf{u}_e/dt|$, что грубо сводится к требованию, чтобы скорость электронов не превышала скорость u_i на несколько порядков. Коэффициент вязкости η определяется ионами. При нахождении токов в плазме, что важно для магнитной гидродинамики и ее обобщений, самостоятельный интерес представляет формулировка обобщенного закона Ома. В присутствии магнитного поля $\mathbf{H}_0$ здесь может проявиться анизотропный характер проводимости плазмы. Формулы для проводимости магнитоактивной плазмы при кинетическом подходе рассматривались в предшествующем параграфе.

Нас сейчас интересует низкочастотный предел (52). Учитывая важность вопроса, мы возвращаемся к нему, используя квазигидродинамическое приближение. Наибольший интерес представляет проводимость магнитоактивной плазмы (поле $\mathbf{H}_0$ считается постоянным). Пренебрегая нелинейными членами с $(\mathbf{u}_e\nabla)\mathbf{u}_e$ и $(\mathbf{u}_i\nabla)\mathbf{u}_i$, которые могут быть существенными лишь при сверхзвуковых скоростях компонент плазмы (при движениях с достаточно резкими сдвигами), и опуская обычно не очень существенные здесь вязкие члены, с учетом (74) имеем

$$\frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} + \nu_e \mathbf{j} + \frac{e}{mc}[\mathbf{j}\mathbf{H}_0] = \\ = \frac{e^2 N}{m}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\,[\mathbf{u}_p\mathbf{H}_0]\right) - eN\nu_{en}(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_e) + \frac{e}{m}\nabla p_e, \qquad (2.3.75)$$

где $\nu_e = \nu_{en} + \nu_{ei}$. При последовательном гидродинамическом описании в силу (52) следует опустить слева и член с $\partial\mathbf{j}/\partial t$. При анализе высокочастотных процессов, когда приходится выходить за рамки чисто гидродинамического описания, этот член остается. Высоким частотам отвечает приближение (2.2.29).

Итак, при условии (52) для полностью ионизированного газа, когда $\mathbf{u} = \mathbf{u}_p$ и $\nu_{en} = 0$,

$$\nu_{ei}\mathbf{j} + \omega_H [\mathbf{j}\mathbf{h}_0] = \frac{e^2 N}{m}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{u}\mathbf{H}_0]\right) + \frac{e}{m}\nabla p_e. \qquad (2.3.76)$$

Выпишем теперь в явном виде выражение для $\mathbf{j}$, считая давление p_e однородным. Тогда в правой части стоит сумма

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + c^{-1}[\mathbf{u}\mathbf{H}_0] = \mathbf{E} + \mathbf{E}_d. \qquad (2.3.76a)$$

Поле $\mathbf{E}_d = c^{-1}[\mathbf{u}\mathbf{H}_0]$ в ионосферных исследованиях иногда называют динамо-полем. Появление поля $\mathbf{E}_d$ имеет общий характер и отражает связь между электрическими полями в движущейся со скоростью $\mathbf{u}$ и неподвижной системах отсчета [16, 25], если при преобразовании полей пренебречь релятивистскими поправками порядка u^2/c^2.

При сделанных оговорках *)

$$\mathbf{j} = \sigma_{\parallel}\mathbf{E}_{\parallel} + \sigma_{\perp}\mathbf{E}'_{\perp} + \frac{\sigma_H}{H_0}[\mathbf{H}_0\mathbf{E}'], \qquad (2.3.77)$$

где

$$\sigma_{\parallel} = \frac{e^2 N}{m\nu_{ei}}, \quad \sigma_{\perp} = \frac{e^2 N \nu_{ei}}{m\left(\omega_H^2 + \nu_{ei}^2\right)}, \quad \sigma_H = \frac{e^2 N \omega_H}{m\left(\omega_H^2 + \nu_{ei}^2\right)}. \qquad (2.3.78)$$

Здесь $\mathbf{E}_{\parallel}$ и $\mathbf{E}'_{\perp}$ — проекции поля $\mathbf{E}'$ на направление $\mathbf{H}_0$ и перпендикулярное к нему. Проводимости $\sigma_{\parallel}$, $\sigma_{\perp}$ и σ_H носят наименование продольной, поперечной и холловской.

Важным следствием (77), (78) является возникновение при заданном поле $\mathbf{E}'$ тока не только в плоскости, образованной векторами $\mathbf{E}'$ и $\mathbf{H}_0$, но и поперек этой плоскости (по направлению $[\mathbf{E}'\mathbf{H}_0]$). Соответствующий ток называют током Холла.

Для слабоионизированной плазмы целесообразно исключить из (75) скорость $\mathbf{u}$. Для этого необходимо сложить (57) и (58). При этом пренебрегаем нелинейными слагаемыми, вязкими и неэлектромагнитными силами (включая градиент давления), считая их малыми по сравнению с электромагнитными силами и трением из-за столкновений. Полагая, далее, $\rho' = 0$ и считая $\mathbf{u}_i \approx \mathbf{u}_p$, а также при $N_n \gg N$, $\mathbf{u}_n \approx \mathbf{u}$ приходим к уравнению **)

$$\frac{m\nu_{en}}{e}\mathbf{j} + \frac{1}{c}[\mathbf{j}\mathbf{H}_0] = M_i \nu_{in} N (\mathbf{u}_p - \mathbf{u}). \qquad (2.3.79)$$

---

*) Используется решение уравнения для вектора $\mathbf{u}$ в виде $a\mathbf{u} + b[\mathbf{u}\mathbf{h}_0] = \mathbf{d}$, согласно которому

$$\mathbf{u} = \frac{a}{a^2 + b^2}\left\{\mathbf{d} - \frac{b}{a}[\mathbf{d}\mathbf{h}_0] + \frac{b^2}{a^2}\mathbf{h}_0(\mathbf{h}_0\mathbf{d})\right\}.$$

**) Заметим, что при преобразованиях здесь безоговорочно принимаются очевидные требования $M_i \gg m$, а также $M_i\nu_{in} \gg m\nu_{en}$.

После нахождения из (79) скорости $\mathbf{u}_p$ и подстановки в (75) получаем

$$\left(\nu_e + \frac{\omega_H \Omega_H}{\nu_{in}}\right)\mathbf{j} + \omega_H [\mathbf{j}\mathbf{h}_0] - \frac{\omega_H \Omega_H}{\nu_{in}} \mathbf{h}_0 (\mathbf{h}_0 \mathbf{j}) = \\ = \frac{e^2 N}{m}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{u}\mathbf{H}_0]\right). \quad (2.3.80)$$

При переходе к (80) мы оставляем переменные $\mathbf{j}$ и $\mathbf{u}$. В связи с этим сделана приближенная замена для одного из слагаемых (75), а именно, $eN\nu_{en}(\mathbf{u}_n - \mathbf{u}_e) \approx eN\nu_{en}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_p + \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) = eN\nu_{en}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_p) + \nu_{en}\mathbf{j}$ (было учтено, что $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_n$ и $\mathbf{u}_i \approx \mathbf{u}_p$).

В слабоионизированной среде для проводимостей $\sigma_\parallel$, $\sigma_\perp$ и σ_H при их определении на основе (77), (80)

$$\sigma_\parallel = \frac{e^2 N}{m\nu_e}, \quad \sigma_\perp = \frac{e^2 N(\nu_e \nu_{in} + \Omega_H \omega_H)\nu_{in}}{m(\nu_e^2 \nu_{in}^2 + \omega_H^2 \Omega_H^2 + \omega_H^2 \nu_{in}^2)},$$

$$\sigma_H = \frac{e^2 N \omega_H \nu_{in}^2}{m(\nu_e^2 \nu_{in}^2 + \omega_H^2 \Omega_H^2 + \omega_H^2 \nu_{in}^2)}.$$

При переходе к записи $\mathbf{j}$ в виде (77) здесь можно сначала из (80) элементарным образом определить продольный ток, для которого $\mathbf{j}_\parallel = (e^2 N/m\nu_e)\mathbf{E}_\parallel$. После этого по формуле, приведенной в сноске перед (77), (78), находим поперечный и холловский токи. Проводимость $\sigma_\perp$ в слабоионизированной плазме иногда называют педерсеновской.

Если в процессе вывода не пренебрегать некоторыми малыми членами порядка $\sqrt{m/M_i}$, $M_i \approx M_n$, то вместо приведенных формул можно получить более известные соотношения:

$$\begin{aligned} \sigma_\parallel &= e^2 N\left(\frac{1}{m\nu_e} + \frac{1}{M_i \nu_{in}}\right), \\ \sigma_\perp &= e^2 N\left\{\frac{\nu_e}{m(\nu_e^2 + \omega_H^2)} + \frac{\nu_{in}}{M_i(\nu_{in}^2 + \Omega_H^2)}\right\}, \\ \sigma_H &= e^2 N\left\{\frac{\omega_H}{m(\nu_e^2 + \omega_H^2)} - \frac{\Omega_H}{M_i(\nu_{in}^2 + \Omega_H^2)}\right\}. \end{aligned} \quad (2.3.81)$$

Если говорить о магнитной гидродинамике в ее традиционной форме, то для нее характерно использование закона Ома с изотропной проводимостью, когда

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + c^{-1}[\mathbf{u}\mathbf{H}]). \quad (2.3.82)$$

В полностью ионизированной плазме для этого необходимо, чтобы

$$\nu_{ei}^2 \gg \omega_H^2. \quad (2.3.83)$$

В слабоионизированной плазме достаточным условием изотропности также можно считать (83). Требование (83) очень часто нарушается как в приземной, так и в космической плазме.

Основная система уравнений магнитной гидродинамики предполагает использование уравнений непрерывности (71) и Навье — Стокса (73). Для давления p используется либо уравнение типа (66) для всей среды, либо уравнение состояния $p(\rho, T)$. Характер теплообмена обычно задается (адиабатичность, изотермичность и т. п.). Плотность тока, которая входит в (73), принято заменять через $\mathbf{H}$ из уравнения

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = (4\pi/c)\mathbf{j}, \tag{2.3.84}$$

которое совпадает с (2.1.36) в пренебрежении сторонними токами и токами смещения. Последнее допустимо для низкочастотных процессов в хорошо проводящих средах.

Применим к обеим частям (82) операцию rot и используем уравнение $\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$ и $\operatorname{rot}\mathbf{E} = -(1/c)\partial\mathbf{H}/\partial t$. Предполагая, что проводимость σ не зависит от координат, получаем известное уравнение

$$\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} - \operatorname{rot}[\mathbf{uH}] = \frac{c^2}{4\pi\sigma}\nabla^2\mathbf{H} = \nu_m\nabla^2\mathbf{H}. \tag{2.3.85}$$

Величину $\nu_m = c^2/4\pi\sigma$ называют *магнитной вязкостью*. Сопоставление по порядку величины второго слагаемого слева с правой частью (85) приводит к введению важного безразмерного параметра. Составляя отношение этих членов, когда характерные масштабы обозначены через L, а скорости через u, имеем число

$$\mathrm{Re}_m = Lu/\nu_m, \tag{2.3.86}$$

которое называется магнитным числом Рейнольдса. Следствия из уравнений магнитной гидродинамики, получающиеся при $\mathrm{Re}_m \ll 1$ и $\mathrm{Re}_m \gg 1$, сильно (иногда просто кардинально) отличаются. В последнем случае (в пределе при $\mathrm{Re}_m \to \infty$) имеет место переход к идеально проводящей среде. Тогда слагаемое, которое определяет затухание магнитного поля в (85), может быть опущено. Этому пренебрежению эквивалентно использование вместо закона Ома известного соотношения

$$\mathbf{E} + c^{-1}[\mathbf{uH}] = 0. \tag{2.3.87}$$

О магнитной гидродинамике бесстолкновительной плазмы. Ранее были приведены уравнения переноса для плазмы с изотропным давлением, которые опирались на условия (52), (53). Там, где интеграл столкновений давал ненулевой вклад, он считался главным членом, а функция распределения была близка к максвелловской. По мере увеличения длины свободного пробега такое описание становится неприменимым. Если столкновениями пренебречь, то нужно, вообще говоря, использовать непосредственно метод кинетического уравнения. Что касается уравнений для моментов, то соотношение непрерывности и уравнение типа Навье — Стокса (без тензора вязких натяжений) могут использоваться и в отсутствие столкновений. Возникает вопрос о формулировке уравнений для более высоких моментов. Здесь наиболь-

шая ясность и определенность имеет место, если плазма находится в сильном магнитном поле **H**.

Остановимся на этом вопросе [14, 21], отметив особо его изложение в монографии [26]. Пусть к плазме приложено поперечное к магнитному полю **H** электрическое поле **E**. Считая, что в кинетическом уравнении (2.1.1) без интеграла столкновений электромагнитные силы являются наиболее существенными, в первом приближении

$$(\mathbf{E} + c^{-1}[\mathbf{vH}])\partial f^0/\partial \mathbf{v} = 0, \tag{2.3.88}$$

где индекс, характеризующий сорт частиц, здесь для краткости опускаем. Вводя скорость дрейфа $\mathbf{u}_d$, определяемую уравнением $\mathbf{E} + c^{-1}[\mathbf{u}_d\mathbf{H}] = 0$, получаем из (88) при $\mathbf{w} = \mathbf{v} - \mathbf{u}_d$, что

$$[\mathbf{wH}]\partial f^0/\partial \mathbf{w} = 0. \tag{2.3.89}$$

Общее решение этого уравнения приобретает вид

$$f^0 = f^0(w^2,\ w_\parallel,\ \mathbf{r},\ t), \tag{2.3.90}$$

где $w_\parallel = \mathbf{wH}/H = \mathbf{wh}$.

Из (89) вытекают равенства $\mathbf{w}[(\partial f^0/\partial \mathbf{w})\mathbf{H}] = 0$ и $\mathbf{H}[\mathbf{w}\partial f^0/\partial \mathbf{w}] = 0$, свидетельствующие в пользу выбора в качестве переменных для f^0, соответственно, $w_\parallel$ и w^2. Используя (90), получаем для тензора давлений (6)

$$\begin{aligned} P_{jk} = m \int w_j w_k f^0 d\mathbf{w} = \\ = m \int (\mathbf{w}_\perp + \mathbf{h}w_\parallel)_j (\mathbf{w}_\perp + \mathbf{h}w_\parallel)_k f^0 d\mathbf{w} = \\ = m h_j h_k \int w_\parallel^2 f^0 d\mathbf{w} + m \int w_{\perp j} w_{\perp k} f^0 d\mathbf{w}, \end{aligned} \tag{2.3.91}$$

где учитывалось обозначение $\mathbf{w} = \mathbf{w}_\perp + w_\parallel \mathbf{h}$.

Члены, содержащие первые степени компонент скорости $\mathbf{w}_\perp$, после интегрирования исчезают, и мы здесь имеем дело в нулевом приближении уже не со скалярным давлением, а с тензором P^0_{jk} в виде

$$P^0_{jk} = p_\parallel h_j h_k + p_\perp (\delta_{jk} - h_j h_k), \tag{2.3.92}$$

где $p_\parallel = m \int w_\parallel^2 f^0 d\mathbf{w}$, $p_\perp = m \int (w_\perp^2/2) f^0 d\mathbf{w}$. Запись (91) предусматривает, что при использовании системы координат, где одна из осей ориентирована по **H**, недиагональные компоненты тензора исчезают. Если, например, $H_z = H$, $H_{xy} = 0$, то $p_{zz} = p_\parallel$ и $p_{xx} = p_{yy} = p_\perp$. Таким образом, в присутствии сильного поля **H** при нарушении условий применимости гидродинамики давление становится анизотропным. Чтобы получить уравнение для $p_\parallel$ и $p_\perp$, воспользуемся уравнением для моментов типа (24). Правда, здесь удобнее выбрать отличающийся от прежнего множитель $A^{(2)}_{jk} = m_\alpha v_{\alpha j} v_{\alpha k}$, что изменит уравнение (24). Традиционным образом пренебрежем нелинейными слагаемыми наиболее высоких поряд-

ков, а также потоками тепла. В отсутствие столкновений здесь нужно опустить член $I_\alpha\left(A_{jk}^{(2)}\right)$. Тогда получаем следующее уравнение, выписанное для частиц сорта α:

$$\frac{dP_{\alpha jk}}{dt} + P_{\alpha lj}\frac{\partial u_{\alpha l}}{\partial x_l} + P_{\alpha jl}\frac{\partial u_{\alpha k}}{\partial x_l} + P_{\alpha lk}\frac{\partial u_{\alpha j}}{\partial x_l} - \\ - \frac{e_\alpha}{cm_\alpha}(e_{jsl}P_{\alpha ks}H_l + e_{ksl}P_{\alpha js}H_l) = 0. \quad (2.3.93)$$

После подстановки в это уравнение соотношения (92) имеем

$$\frac{d}{dt}[p_{\alpha\parallel}h_jh_k + p_{\alpha\perp}(\delta_{jk} - h_jh_k)] + [p_{\alpha\parallel}h_jh_k + p_{\alpha\perp}(\delta_{jk} - h_jh_k)]\frac{\partial u_{\alpha s}}{\partial x_s} + \\ + [p_{\alpha\parallel}h_lh_k + p_{\alpha\perp}(\delta_{lk} - h_lh_k)]\frac{\partial u_{\alpha j}}{\partial x_l} + [p_{\alpha\parallel}h_jh_l + \\ + p_{\alpha\perp}(\delta_{jl} - h_jh_l)]\frac{\partial u_{\alpha k}}{\partial x_l} - \frac{e_\alpha}{c}\{e_{jsl}[p_{\alpha\parallel}h_kh_s + p_{\alpha\perp}(\delta_{ks} - h_kh_s)]H_l + \\ + e_{ksl}[p_{\alpha\parallel}h_jh_s + p_{\alpha\perp}(\delta_{js} - h_jh_s)]H_l\} = 0. \quad (2.3.94)$$

Умножая это уравнение скалярно на δ_{jk} и суммируя по j, получаем

$$\frac{d}{dt}(p_{\alpha\parallel} + 2p_{\alpha\perp}) + (p_{\alpha\parallel} + 2p_{\alpha\perp})\frac{\partial u_{\alpha s}}{\partial x_s} + \\ + 2p_{\alpha\perp}\frac{\partial u_{\alpha s}}{\partial x_s} + 2(p_{\alpha\parallel} - p_{\alpha\perp})h_lh_s\frac{\partial u_{\alpha l}}{\partial x_s} = 0. \quad (2.3.95)$$

Умножая (94) скалярно на h_jh_k и суммируя по повторяющимся индексам, имеем

$$\frac{dp_{\alpha\parallel}}{dt} + p_{\alpha\parallel}\frac{\partial u_{\alpha s}}{\partial x_s} + 2p_{\parallel}h_lh_s\frac{\partial u_{\alpha l}}{\partial x_s} = 0. \quad (2.3.96)$$

Вычитая из (95), (96), имеем

$$\frac{dp_{\alpha\perp}}{dt} + 2p_{\alpha\perp}\frac{\partial u_{\alpha s}}{\partial x_s} - p_{\alpha\perp}h_lh_s\frac{\partial u_{\alpha l}}{\partial x_s} = 0. \quad (2.3.97)$$

Уравнения (96), (97) определяют изменения компонент тензора давлений (92).

Перейдем теперь к уравнениям магнитогидродинамического типа для бесстолкновительной плазмы в рассматриваемом приближении, которые обычно называют уравнениями Чу — Гольдбергера — Лоу. В случае идеально проводящей плазмы можно использовать уравнения (85) и (87), полагая в первом $\nu_m = 0$. В систему входят уравнения непрерывности (71) и движения (73). Правда, в последнем для бесстолкновительной плазмы нужно опустить член с вязкостью. Далее, мы в (73) учтем условие квазинейтральности и сделаем замену $\mathbf{j} = (c/4\pi)\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}$, а давле-

ние будем характеризовать тензором. Тогда

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}+(\mathbf{u}\nabla)\,\mathbf{u}\right]=\mathbf{\Pi}+\frac{1}{4\pi}\,[\operatorname{rot}\mathbf{H}\mathbf{H}], \tag{2.3.98}$$

где вектор $\mathbf{\Pi}$ имеет компоненты $\Pi_j=-\partial P_{jk}/\partial x_k$. Так как у нас сейчас в первом приближении $\mathbf{u}_d\approx\mathbf{u}_i\approx\mathbf{u}_e$, то есть основания приравнять среднюю скорость плазмы скорости ионов.

Из уравнения (85), если $\nu_m=0$,

$$\partial\mathbf{H}/\partial t-\operatorname{rot}[\mathbf{u}\mathbf{H}]=0.$$

При $\operatorname{div}\mathbf{H}=0$, используя формулу $\operatorname{rot}[\mathbf{a}\mathbf{b}]=(\mathbf{b}\nabla)\,\mathbf{a}-(\mathbf{a}\nabla)\mathbf{b}+\mathbf{a}\operatorname{div}\mathbf{b}-\mathbf{b}\operatorname{div}\mathbf{a}$, получаем

$$\frac{d\mathbf{H}}{dt}=(\mathbf{H}\nabla)\,\mathbf{u}+\frac{\mathbf{H}}{N}\frac{dN}{dt},$$

где было использовано уравнение непрерывности (71) для квазинейтральной плазмы. Умножая это уравнение на $\mathbf{H}$, приходим к соотношению

$$h_l h_s\frac{\partial u_{\alpha l}}{\partial x_s}=\frac{N_\alpha}{H}\frac{d}{dt}\left(\frac{H}{N_\alpha}\right).$$

Используя этот результат, из (96) имеем

$$\frac{dp_{\alpha\parallel}}{dt}+p_{\alpha\parallel}\operatorname{div}\mathbf{u}_\alpha+2p_{\alpha\parallel}\frac{N}{H}\frac{d}{dt}\left(\frac{H}{N}\right)=0. \tag{2.3.99}$$

Дифференцируя в (99) и используя уравнение непрерывности для частиц сорта α, получаем

$$\frac{dp_{\alpha\parallel}}{dt}+2\frac{p_{\alpha\parallel}}{H}\frac{dH}{dt}-3p_{\alpha\parallel}\frac{1}{N_\alpha}\frac{dN_\alpha}{dt}=0.$$

Это уравнение можно записать в виде

$$\frac{dp_{\alpha\parallel}}{dt}+\frac{N_\alpha^2}{H^3}\frac{d}{dt}\left(\frac{H^2}{N_\alpha^3}\right)=0,$$

откуда

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p_{\alpha\parallel}H^2}{N_\alpha^3}\right)=0.$$

Действуя аналогично с использованием вместо (96) уравнения (97), получаем

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p_{\alpha\perp}}{N_\alpha H}\right)=0.$$

Имеем в виду, что плотность ионов ρ_i велика по сравнению с ρ_e, так что для полностью ионизированной плазмы $\rho\approx M_iN$, т. е. из последних двух равенств при $\alpha=e,\ i$ приходим к уравнениям

адиабат

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{p_\perp}{\rho H}\right) = 0, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{p_\parallel H^2}{\rho^3}\right) = 0. \qquad (2.3.100)$$

В результате мы пришли к системе уравнений Чу — Гольдбергера — Лоу (71), (85)*), (98) и (100). Основное пренебрежение при их выводе — неучет потоков тепла. Поскольку в сильном магнитном поле перенос тепла затруднен в направлениях поперек $\mathbf{H}_0$, можно полагать, что использование указанной системы для описания поперечных движений плазмы правомерно.

Если считать поле $\mathbf{H}$ слабо изменяющимся, то первое из уравнений (100) можно сопоставить с уравнением адиабаты $(d/dt)(p\rho^{-\gamma}) = 0$ при $\gamma = 1$, а второе — при $\gamma = 3$.

---

*) Как оговаривалось, в этом уравнении нужно считать $\nu_m = 0$.

ГЛАВА 3

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ В КВАЗИГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

3.1. Диэлектрическая проницаемость плазмы

В п. 2.3 была получена система квазигидродинамических уравнений для плазмы. Используя эти уравнения (как правило, в упрощенном виде), получим теперь выражения для полного тока, необходимые для вычисления компонент тензора комплексной диэлектрической проницаемости $\varepsilon'_{jk} \equiv \hat{\varepsilon}'$ *). Рассмотрение проведем для плазмы, состоящей из электронов, однократных ионов одного сорта и неподвижных молекул. Для того чтобы сделать более ясными исходные предпосылки, выпишем исходные уравнения заново.

Считаем давление электронов и ионов изотропными, полагая

$$p_e = N_e \varkappa T_e, \quad p_i = N_i \varkappa T_i. \tag{3.1.1}$$

Вопрос о применимости такого рода соотношений обсуждался в гл. 2.

Исходная система квазигидродинамических уравнений [1] состоит из уравнений движения для электронов и ионов:

$$mN_e \frac{d\mathbf{u}_e}{dt} = -eN_e\mathbf{E} - \frac{eN_e}{c}[\mathbf{u}_e\mathbf{H}_0] - \nabla p_e - \\ - mN_e\nu_{ei}(\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i) - mN_e\nu_{en}\mathbf{u}_e, \tag{3.1.2}$$

$$MN_i \frac{d\mathbf{u}_i}{dt} = eN_i\mathbf{E} + \frac{eN_i}{c}[\mathbf{u}_i\mathbf{H}_0] - \nabla p_i - \\ - mN_e\nu_{ei}(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e) - MN_i\nu_{in}\mathbf{u}_i$$

и уравнений непрерывности:

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} + \operatorname{div}(N_e\mathbf{u}_e) = 0, \quad \frac{\partial N_i}{\partial t} + \operatorname{div}(N_i\mathbf{u}_i) = 0. \tag{3.1.3}$$

Учитывая (1), запишем [1]

$$\nabla p_e = \gamma_e \varkappa T_e \nabla N_e, \quad \nabla p_i = \gamma_i \varkappa T_i \nabla N_i, \tag{3.1.4}$$

---

*) Здесь и ниже, имея в виду, что любой тензор является линейным оператором, будет применяться также запись с использованием символа $\hat{\varepsilon}'$. Смысл записи ясен из примеров $\varepsilon'_{ij}E_j \equiv \hat{\varepsilon}'\mathbf{E}$, $\varepsilon_{ij}E_iE_j \equiv \mathbf{E}\hat{\varepsilon}'\mathbf{E}$ и др. Вместо диагонального единичного тензора δ_{ij} иногда будем писать $\hat{\delta}$.

где γ_e и γ_i — константы порядка единицы, позволяющие учесть влияние теплообмена на распространение волн (для изотермических процессов $\gamma_e = \gamma_i = 1$). Считается, что в равновесном состоянии отсутствует электрическое поле ($E_0 = 0$), а также направленные движения электронов и ионов ($\mathbf{u}_{e0} = \mathbf{u}_{i0} = 0$). Тогда

$$N_e = N_{e0} + N'_e, \quad N_i = N_{i0} = N'_i, \quad \mathbf{u}_e = \mathbf{u}'_e,$$
$$\mathbf{u}_i = \mathbf{u}'_i, \quad \mathbf{E} = \mathbf{E}', \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}', \tag{3.1.5}$$

где $\mathbf{E}'$, $\mathbf{H}'$ — электрическое и магнитное поля волны. Штрихованные величины в (5) полагаем малыми, в (2), (3) сохраняем лишь слагаемые с первыми степенями этих величин.

Тогда из (2)—(5) с учетом квазинейтральности невозмущенной плазмы ($N_{e0} = N_{i0} = N_0$) для возмущений с частотой ω

$$N'_e = N_0 \mathbf{k}\mathbf{u}_e \omega^{-1}, \quad N'_i = N_0 \mathbf{k}\mathbf{u}_i \omega^{-1}, \tag{3.1.6}$$

$$(i\omega + \nu_{ei} + \nu_{en})\,\mathbf{u}_e - \nu_{ei}\mathbf{u}_i + \gamma_e \frac{\varkappa T_e}{mN_0} \nabla N'_e =$$
$$= -\frac{e}{m}\mathbf{E} - \frac{e}{mc}[\mathbf{u}_e\mathbf{H}_0], \tag{3.1.7}$$
$$\left(i\omega + \nu_{ei}\frac{m}{M} + \nu_{in}\right)\mathbf{u}_i - \nu_{ei}\frac{m}{M}\mathbf{u}_e + \gamma_i \frac{\varkappa T_i}{MN_0} \nabla N'_i =$$
$$= \frac{e}{M}\mathbf{E} + \frac{e}{Mc}[\mathbf{u}_i\mathbf{H}_0].$$

Из (6) следует, что

$$\nabla N'_e = -iN_0\omega^{-1}\mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{u}_e), \quad \nabla N'_i = -iN_0\omega^{-1}\mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{u}_i). \tag{3.1.8}$$

Из (6), (7) могут быть найдены в общем случае величины $\mathbf{u}_e$, $\mathbf{u}_i$, N'_e, N'_i. Однако получающиеся при этом выражения довольно громоздки. Остановимся поэтому сразу на ряде частных случаев.

Плазма в отсутствие внешнего магнитного поля. Положим в (7) $\mathbf{H}_0 = 0$ и учтем в них (8). Записывая (7) в проекциях на направления вдоль вектора $\mathbf{k}$ и перпендикулярное к нему и решая полученные уравнения, найдем

$$\mathbf{u}_{el} = -\frac{e\mathbf{E}_l}{m}\left[a_e a_i + \left(\frac{m}{M}a_e + a_i\right)\nu_{ei}\right]^{-1} a_i,$$
$$\mathbf{u}_{il} = \frac{e\mathbf{E}_l}{M}\left[a_e a_i + \left(\frac{m}{M}a_e + a_i\right)\nu_{ei}\right]^{-1} a_e, \tag{3.1.9}$$

$$\mathbf{u}_{etr} = -\frac{e\mathbf{E}_\perp}{m}\left[b_e b_i + \left(\frac{m}{M}b_e + b_i\right)\nu_{ei}\right]^{-1} b_i,$$
$$\mathbf{u}_{itr} = \frac{e\mathbf{E}_\perp}{M}\left[b_e b_i + \left(\frac{m}{M}b_e + b_i\right)\nu_{ei}\right]^{-1} b_e. \tag{3.1.10}$$

Здесь введены обозначения

$$a_e = i\left(\gamma_e \frac{\varkappa T_e}{m\omega} k^2 - \omega\right) + \nu_{en}, \quad a_i = i\left(\gamma_i \frac{\varkappa T_i}{M\omega} k^2 - \omega\right) + \nu_{in},$$

$$b_e = \nu_{en} - i\omega, \quad b_i = \nu_{in} - i\omega.$$

В (9), (10) $\mathbf{u}_{el}$ и $\mathbf{u}_{il}$ — проекции векторов $\mathbf{u}_e$ и $\mathbf{u}_i$ на направление $\mathbf{k}$, а $\mathbf{u}_{etr}$ и $\mathbf{u}_{itr}$ — их проекции на перпендикулярное $\mathbf{k}$ направление.

Напомним, что в выражении для полного тока

$$\mathbf{j}_t = \mathbf{j} + \partial\mathbf{P}/\partial t$$

вектор поляризации $\mathbf{P} = (4\pi)^{-1}(\mathbf{D} - \mathbf{E})$ $(\mathbf{D} = \hat{\varepsilon}\mathbf{E})$ и $\mathbf{j} = \hat{\sigma}\mathbf{E}$, где $\hat{\sigma} \equiv \sigma_{ij}$ — тензор проводимости. Вводя тензор комплексной диэлектрической проницаемости

$$\varepsilon'_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k}) - i4\pi\sigma_{ij}(\omega, \mathbf{k})\,\omega^{-1}, \tag{3.1.11}$$

запишем (2.1.35) в виде

$$\mathbf{j}_t = i\omega(4\pi)^{-1}(\hat{\varepsilon}' - \hat{\delta})\mathbf{E}, \tag{3.1.12}$$

где $\hat{\delta} \equiv \delta_{ij}$ — единичный диагональный тензор. Используя выражение для полного тока в линейном приближении, когда

$$\mathbf{j}_t = eN_i\mathbf{u}_i - eN_e\mathbf{u}_e = eN_0(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e),$$

из (12) получим

$$i\omega(4\pi)^{-1}(\hat{\varepsilon} - \hat{\delta})\mathbf{E} = eN_0(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_e). \tag{3.1.13}$$

Подставляя в (13) выражения (9), (10) и считая, что вектор $\mathbf{k}$ параллелен оси z, находим

$$\varepsilon'_{xx} = \varepsilon'_{yy} = \varepsilon'_{tr} = 1 + \frac{i}{\omega} \frac{b_e\omega_{i0}^2 + b_i\omega_{e0}^2}{b_eb_i + \left(b_i + \frac{m}{M}b_e\right)\nu_{ei}}, \tag{3.1.14}$$

$$\varepsilon'_{zz} = \varepsilon'_l = 1 + \frac{i}{\omega} \frac{a_e\omega_{i0}^2 + a_i\omega_{e0}^2}{a_ea_i + \left(a_i + \frac{m}{M}a_e\right)\nu_{ei}}. \tag{3.1.15}$$

Напомним, что $\omega_{e0}^2 = 4\pi e^2N_0/m$, $\omega_{i0}^2 = 4\pi e^2N_0/M$, и отметим, что все недиагональные компоненты тензора ε'_{ij} здесь равны нулю.

Из (14), (15) видно, что диэлектрическая проницаемость в рассматриваемом случае представляет собой диагональный тензор второго ранга. Если положить $T_e = T_i = 0$, то $\varepsilon'_l = \varepsilon'_{tr}$, т. е. все диагональные компоненты тензора ε'_{ij} совпадают и тензор вырождается в скаляр.

Тот факт, что диэлектрическая проницаемость плазмы при $\mathbf{H}_0 = 0$ является тензорной величиной, связан с наличием у плазмы, как диэлектрической среды, наряду с временной дисперсией

также и пространственной дисперсии (зависимости ε'_{ij} от $\mathbf{k}$). В силу этой зависимости тензор ε'_{ij} можно составить из двух частей: одна будет содержать единичный тензор δ_{ij}, а вторая — тензор k_ik_j/k^2, так что в изотропной и негиротропной среде [2]

$$\varepsilon'_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \left(\delta_{ij} - \frac{k_ik_j}{k^2}\right)\varepsilon'_{tr}(\omega, \mathbf{k}) + \frac{k_ik_j}{k^2}\varepsilon'_l(\omega, \mathbf{k}), \qquad (3.1.16)$$

где поперечная ε'_{tr} и продольная ε'_l составляющие тензора диэлектрической проницаемости определяются соотношениями (14), (15).

Если $|\nu_{en} - i\omega| \gg \gamma_e \varkappa T_e/m\omega$, $|\nu_{in} - i\omega| \gg \gamma_i \varkappa T_i/M\omega$, то $a_e \approx b_e$, $a_i \approx b_i$ и $\varepsilon'_l \approx \varepsilon'_{tr}$, т. е. тензор ε'_{ij} превращается в скаляр. Этот переход связан фактически с пренебрежением зависимостью ε'_{ij} от $\mathbf{k}$. При $\nu_{en} = \nu_{in} = 0$ эти неравенства, если $T_i < (M/m)T_e$, сводятся к условию

$$v_{T_e}^2 \ll v_\Phi^2.$$

Таким образом, критерий пренебрежения пространственной дисперсией связан с требованием малости «наибольшей» тепловой скорости $v_{T_e} = \sqrt{\varkappa T_e/m}$ по сравнению с фазовой скоростью $v_\Phi = \omega/k$.

Пусть $\nu_{en} \ll \left| -\omega + \gamma_e v_{T_e}^2 \omega^{-1} k^2 \right|$ и, кроме того, $v_\Phi^2 \gg v_{T_e}^2$. Тогда должно выполняться условие $\omega \gg \nu_{en}$ и, как следствие, $\omega \gg \nu_{in}$. В этом случае из (14), (15) (см. также [3]) имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_l &= 1 - v_e\left(1 - \gamma_e v_{T_e}^2/v_\Phi^2\right)^{-1} - v_i\left(1 - \gamma_i v_{T_i}^2/v_\Phi^2\right)^{-1}, \\ \varepsilon_{tr} &= 1 - v_e - v_i, \end{aligned} \qquad (3.1.17)$$

где $v_e = \omega_{e0}^2/\omega^2$, $v_i = (m/M)\,v_e = \omega_{i0}^2/\omega^2$, $v_e \gg v_i$. Таким образом, если столкновений нет, то под действием поля волны электроны и ионы дают аддитивный вклад в выражение для диэлектрической проницаемости.

При $|a_e| \sim |a_i|$ с учетом $\omega_{e0}^2 \gg \omega_{i0}^2$ получаем

$$\varepsilon'_{tr} = 1 + \frac{i}{\omega}\frac{\omega_{e0}^2(\nu_e + i\omega)}{\nu_e^2 + \omega^2}, \quad \varepsilon'_l = 1 + \frac{i}{\omega}\frac{\omega_{e0}^2}{\nu_e + i\left(\gamma_e \dfrac{\varkappa T_e}{m\omega}k^2 - \omega\right)}, \qquad (3.1.18)$$

где $\nu_e = \nu_{ei} + \nu_{en}$. После выделения вещественной и мнимой частей первое из соотношений (3.1.18) переходит в (2.2.28). Из второго соотношения (18) имеем

$$\varepsilon'_l = \varepsilon'_{zz} = 1 - \frac{1}{\omega}\omega_{e0}^2\left(\omega - \gamma_e\frac{\varkappa T_e}{m\omega}k^2\right)\left\{\left(\omega - \gamma_e\frac{\varkappa T_e}{m\omega}k^2\right)^2 + \nu_e^2\right\}^{-1} + \\ + \frac{i}{\omega}\nu_e\omega_{e0}^2\left\{\left(\omega - \gamma_e\frac{\varkappa T_e}{m\omega}k^2\right)^2 + \nu_e^2\right\}^{-1}. \qquad (3.1.19)$$

Диэлектрическая проницаемость магнитоактивной плазмы. Используя (8), из (7) приходим к уравнениям

$$i\omega'\mathbf{u}_e - \nu_{ei}\mathbf{u}_i - i\gamma_e\frac{v_{T_e}^2}{\omega}\mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{u}_e) - \omega_H[\mathbf{h}_0\mathbf{u}_e] = -\frac{e}{m}\mathbf{E},$$
$$i\omega''\mathbf{u}_i - \nu_{ei}\frac{m}{M}\mathbf{u}_e - i\gamma_i\frac{v_{T_i}^2}{\omega}\mathbf{k}(\mathbf{k}\mathbf{u}_i) + \Omega_H[\mathbf{h}_0\mathbf{u}_i] = \frac{e}{M}\mathbf{E}, \quad (3.1.20)$$

где $\Omega_H = eH_0/Mc$ — гирочастота ионов ($\Omega_H = mM^{-1}\omega_H$), $\omega' = \omega - i\nu_{ei} - i\nu_{en}$, $\omega'' = \omega - imM^{-1}\nu_{ei} - i\nu_{in}$.

В принципе можно, находя из (20) $\mathbf{u}_e$ и $\mathbf{u}_i$ и подставляя их в (13), получить общие выражения для компонент тензора. Однако получаемые в этом случае выражения очень громоздки. Поэтому рассмотрим ниже несколько отдельных частных случаев, на примере которых выясним влияние параметров плазмы и условий распространения.

В первом из этих случаев пренебрежем пространственной дисперсией, т. е. положим в (20) $v_{T_e} = v_{T_i} = 0$. Выберем систему координат, в которой $\mathbf{H}_0$ параллельно оси z ($h_{0z} = 1$).

Если для слабоионизированной плазмы пренебречь столкновениями между заряженными частицами ($\nu_{ei} = 0$), то уравнения (20) становятся независимыми. Пользуясь векторной формулой, которая уже применялась в гл. 2, находим

$$\mathbf{u}_e = \frac{e}{m}\frac{i\omega'}{\omega_H^2 - (\omega')^2}\left\{-\mathbf{E} + \frac{\omega_H}{i\omega'}[\mathbf{E}\mathbf{h}_0] + \frac{\omega_H^2}{(\omega')^2}\mathbf{h}_0(\mathbf{E}\mathbf{h}_0)\right\},$$
$$\mathbf{u}_i = \frac{e}{M}\frac{i\omega''}{\Omega_H^2 - (\omega'')^2}\left\{\mathbf{E} - \frac{\Omega_H}{i\omega''}[\mathbf{E}\mathbf{h}_0] + \frac{\Omega_H^2}{(\omega'')^2}\mathbf{h}_0(\mathbf{E}\mathbf{h}_0)\right\}. \quad (3.1.21)$$

В этом случае для компонент тензора получаются формулы

$$\varepsilon'_{xx} = \varepsilon'_{yy} = 1 - \frac{\omega_{e0}^2(\omega - i\nu_{en})}{\omega\left[(\omega - i\nu_{en})^2 - \omega_H^2\right]} - \frac{\omega_{i0}^2(\omega - i\nu_{in})}{\omega\left[(\omega - i\nu_{in})^2 - \Omega_H^2\right]},$$
$$\varepsilon'_{xy} = -\varepsilon'_{yx} = -\frac{i\omega_{e0}^2\omega_H}{\omega\left[(\omega - i\nu_{en})^2 - \omega_H^2\right]} + \frac{i\omega_{i0}^2\Omega_H}{\omega\left[(\omega - i\nu_{in})^2 - \Omega_H^2\right]}, \quad (3.1.22)$$
$$\varepsilon'_{zz} = 1 - \frac{\omega_{e0}^2}{\omega(\omega - i\nu_{en})} - \frac{\omega_{i0}^2}{\omega(\omega - i\nu_{in})},$$

которые при пренебрежении движением ионов совпадают с формулами элементарной теории (2.2.25) при замене $\nu_{эф}$ на ν_{en}.

При учете столкновений электронов с ионами уравнения (20) для $\mathbf{u}_e$ и $\mathbf{u}_i$ связаны. Поэтому составляющие полного тока, обусловленные движением электронов и ионов, в отличие от предыдущего случая, не будут давать аддитивного вклада в выражения для ε'_{ij}. При наличии частоты ν_{ei} ограничимся только случаем полностью ионизированного газа ($\nu_{in} = \nu_{en} = 0$). Кроме того,

при вычислении пренебрежем слагаемыми порядка $\sqrt{m/M}$ и меньшими, имея в виду, что $\nu_{in}^2 \sim mM^{-1}\nu_{en}^2$. Тогда из (13), (21) получаем

$$\varepsilon'_{xx} = \varepsilon'_{yy} = 1 - \frac{\omega_{e0}^2}{2}\left\{\frac{1}{(\omega-\omega_H)(\omega+\Omega_H) - i\omega\nu_{ei}} + \frac{1}{(\omega+\omega_H)(\omega-\Omega_H) - i\omega\nu_{ei}}\right\},$$

$$\varepsilon'_{xy} = -\varepsilon'_{yx} = -i\frac{\omega_{e0}^2}{2}\left\{\frac{1}{(\omega-\omega_H)(\omega+\Omega_H) - i\omega\nu_{ei}} - \frac{1}{(\omega+\omega_H)(\omega-\Omega_H) - i\omega\nu_{ei}}\right\}, \quad (3.1.23)$$

$$\varepsilon'_{zz} = 1 - \frac{\omega_{e0}^2}{\omega(\omega - i\nu_{ei})}, \quad \varepsilon'_{xz} = \varepsilon'_{zx} = \varepsilon'_{yz} = \varepsilon'_{zy} = 0.$$

При пренебрежении столкновениями как электронов, так и ионов, используя систему координат, когда вектор $\mathbf{H}_0$ направлен по оси z, а волновой вектор $\mathbf{k}$ лежит в плоскости yz, из (13), (21) имеем

$$\begin{aligned}
\varepsilon'_{xx} &= 1 - \sum_\beta \omega_{\beta 0}^2\left(\omega^2 + k^2 v_{T_\beta}^2\right)(\Delta_\beta)^{-1},\\
\varepsilon'_{xy} &= -\varepsilon'_{yx} = -i\sum_\beta \omega_{\beta 0}^2\omega_{\beta H}\left(\omega^2 + k_z^2 v_{T_\beta}^2\right)(\omega\Delta_\beta)^{-1},\\
\varepsilon'_{yy} &= 1 - \sum_\beta \omega_{\beta 0}^2\left(\omega^2 + k_z^2 v_{T_\beta}^2\right)(\Delta_\beta)^{-1},\\
\varepsilon'_{yz} &= \varepsilon'_{zy} = \sum_\beta \omega_{\beta 0}^2 k_y k_z v_{T_\beta}^2(\Delta_\beta)^{-1},\\
\varepsilon'_{zz} &= 1 - \sum_\beta \omega_{\beta 0}^2\left(\omega^2 - \omega_{\beta H}^2 + k_y^2 v_{T_\beta}^2\right)(\Delta_\beta)^{-1},\\
\varepsilon'_{xz} &= \varepsilon'_{zx} = 0,
\end{aligned} \quad (3.1.24)$$

где суммирование проводится по сортам частиц (электронов и ионов) и

$$\Delta_\beta = \omega^2\left(\omega^2 - \omega_{\beta H}^2\right) + \omega^2 k_y^2 v_{T_\beta}^2 + \left(\omega^2 - \omega_{\beta H}^2\right)k_z^2 v_{T_\beta}^2. \quad (3.1.25)$$

Когда имеется только один сорт ионов, $\omega_{eH} = \omega_H$ и $\omega_{iH} = -\Omega_H$.

Некоторые особенности тензора ε'_{ij} в плазме с внешним магнитным полем. Учет $\mathbf{H}_0$ привел к тому, что связь между $\mathbf{D}$ и $\mathbf{E}$ имеет тензорный характер, причем тензор ε'_{ij} — недиагонален. Это легко понять, учитывая, что при движении заряженных частиц в магнитном поле $\mathbf{H}_0$ наличие любой компоненты вектора скорости, перпендикулярной $\mathbf{H}_0$, например u_{ex}, за счет силы Лоренца приводит к появлению компоненты u_{ey}. В результате компонента полного тока j_{ty} в принципе зависит не только от E_y,

но и от E_x и т. д. Поскольку на частицы, движущиеся вдоль $\mathbf{H}_0$, магнитное поле влияния не оказывает, то ε'_{zz} имеет такой же вид, как в изотропной среде.

Компоненты ε'_{ij} комплексны. Представим ε'_{ij} в виде суммы эрмитовой $\varepsilon'_{ij\text{э}}$ и антиэрмитовой частей ε'_{ija}, полагая

$$\varepsilon'_{ij} = \varepsilon'_{ij\text{э}} + \varepsilon'_{ija}; \quad \varepsilon'_{ij\text{э}} = \frac{\varepsilon'_{ij} + \varepsilon'^{*}_{ji}}{2}; \quad \varepsilon'_{ija} = \frac{\varepsilon'_{ij} - \varepsilon'^{*}_{ji}}{2}.$$

Заметим, что такое представление справедливо для любого тензора. Учтем, что в среднем за единицу времени в единице объема диссипируется следующее количество энергии [1]:

$$Q = -\frac{i\omega}{16\pi}\left(\varepsilon'^{*}_{ij} - \varepsilon'_{ji}\right) E_i E_j^* = \frac{i\omega}{8\pi}\,\varepsilon'_{ija} E_i E_j^*.$$

Джоулевы потери (омическая диссипация) связаны с проводимостью среды [3], так что

$$Q = (\sigma_{ij}/2)\, E_i E_j^*.$$

Сравнивая эти два соотношения, видим, что

$$\varepsilon'_{ija} = 4\pi i \omega^{-1} \sigma_{ij}. \tag{3.1.26}$$

Таким образом, можно назвать $\varepsilon'_{ij\text{э}}$ диэлектрической проницаемостью, а сам ε'_{ij} — тензором полной (комплексной) диэлектрической проницаемости, подразумевая, что он включает в себя как тензор диэлектрической проницаемости, так и проводимости. Однако такое разделение имеет скорее терминологический смысл.

Если в (2.2.25), (22) положить $\nu_{en} = \nu_{in} = 0$, то нетрудно видеть, что ε'_{ij} является эрмитовым тензором, т. е. $\varepsilon'_{ij} = \varepsilon'^{*}_{ji}$. То же самое можно сказать относительно компонент тензора (23) при $\nu_{ei} = 0$. Это означает, что среда, описываемая таким тензором, является непоглощающей, а поглощение связано с учетом соударений. Естественно, тензор ε'_{ij} в форме (24) также эрмитов. Тензор ε'_{ij} обладает еще одним важным свойством, вытекающим прямо из его записи:

$$\varepsilon'_{ij}(\mathbf{H}_0) = \varepsilon'_{ji}(-\mathbf{H}_0). \tag{3.1.27}$$

С учетом пространственной дисперсии имеем [4]

$$\varepsilon'_{ij}(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{H}_0) = \varepsilon'_{ji}(\omega, -\mathbf{k}, -\mathbf{H}_0). \tag{3.1.28}$$

При записи ε'_{ij} использовалась система координат, в которой ось z направлена вдоль $\mathbf{H}_0$. Переходя к другой координатной системе, можно воспользоваться формулой преобразования компонент тензора

$$\varepsilon'_{ij}(\mathbf{x}) = \gamma_{im}\gamma_{jn}\varepsilon'_{mn}(\mathbf{x}'), \tag{3.1.29}$$

где вектор $\mathbf{x}'$ характеризует координатную систему с осью z вдоль $\mathbf{H}_0$, а $\mathbf{x}$ — другая координатная система, повернутая произвольным образом относительно $\mathbf{x}'$, так что γ_{im} — косинусы углов между осями в системах $\mathbf{x}'$ и $\mathbf{x}$, т. е. направляющие косинусы новых координатных осей по отношению к старым.

Переходя согласно (29) к системе координат, где направление $\mathbf{H}_0$ не совпадает с осью z, и в которой отличны от нуля все три компоненты вектора $\mathbf{h}_0$ (h_{0x}, h_{0y} и h_{0z} являются направляющими косинусами $\mathbf{H}_0$ относительно новых координатных осей), из (22) без учета движения ионов получаем

$$
\begin{aligned}
\varepsilon'_{xx} &= 1 - A\left[(i\omega + \nu)^2 + \omega_H^2 h_{0x}^2\right],\\
\varepsilon'_{xy} &= -A\left[(i\omega + \nu)\,\omega_H h_{0z} + \omega_H^2 h_{0x} h_{0y}\right],\\
\varepsilon'_{xz} &= -A\left[-(i\omega + \nu)\,\omega_H h_{0y} + \omega_H^2 h_{0x} h_{0z}\right],\\
\varepsilon'_{yx} &= A\left[(i\omega + \nu)\,\omega_H h_{0z} - \omega_H^2 h_{0x} h_{0y}\right],\\
\varepsilon'_{yy} &= 1 - A\left[(i\omega + \nu)^2 + \omega_H^2 h_{0y}^2\right],\\
\varepsilon'_{yz} &= -A\left[(i\omega + \nu)\,\omega_H h_{0x} + \omega_H^2 h_{0y} h_{0z}\right],\\
\varepsilon'_{zx} &= -A\left[(i\omega + \nu)\,\omega_H h_{0y} + \omega_H^2 h_{0x} h_{0z}\right],\\
\varepsilon'_{zy} &= -A\left[-(i\omega + \nu)\,\omega_H h_{0z} + \omega_H^2 h_{0y} h_{0z}\right],\\
\varepsilon'_{zz} &= 1 - A\left[(i\omega + \nu)^2 + \omega_H^2 h_{0z}^2\right],
\end{aligned}
\tag{3.1.30}
$$

где

$$
A = \frac{i\omega_{e0}^2}{\omega\,(i\omega + \nu)\left[(i\omega + \nu)^2 + \omega_H^2\right]}, \qquad \nu \equiv \nu_{\text{эф}}.
$$

Пусть преобразование координат сводится к тому, что плоскость $y'z'$ повернута на угол α вокруг оси $x = x'$, так что магнитное поле $\mathbf{H}_0$ теперь лежит в плоскости yz и составляет угол α с осью z (рис. 3.1). Тогда $h_{0x} = 0$, $h_{0y} = \sin\alpha$, $h_{0z} = \cos\alpha$ и компоненты тензора (30) имеют вид

$$
\begin{aligned}
\varepsilon'_{xx} &= 1 - \frac{v_e(1 - is_e)}{(1 - is_e)^2 - u_e},\\
\varepsilon'_{xy} &= -\varepsilon'_{yx} = -\frac{i\sqrt{u_e}\,v_e\cos\alpha}{(1 - is_e)^2 - u_e},\\
\varepsilon'_{xz} &= -\varepsilon'_{zx} = \frac{i\sqrt{u_e}\,v_e\sin\alpha}{(1 - is_e)^2 - u_e},\\
\varepsilon'_{yy} &= 1 - \frac{v_e\left[(1 - is_e)^2 - u_e\sin^2\alpha\right]}{(1 - is_e)\left[(1 - is_e)^2 - u_e\right]},\\
\varepsilon'_{yz} &= \varepsilon'_{zy} = \frac{u_e v_e \sin\alpha\cos\alpha}{(1 - is_e)\left[(1 - is_e)^2 - u_e\right]},\\
\varepsilon'_{zz} &= 1 - \frac{v_e\left[(1 - is_e)^2 - u_e\cos^2\alpha\right]}{(1 - is_e)\left[(1 - is_e)^2 - u_e\right]},
\end{aligned}
\tag{3.1.31}
$$

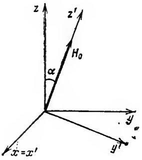

Рис. 3.1. Система координат, применяемая при определении компонент тензора диэлектрической проницаемости.

где $s_e = \nu_{эф}/\omega$. Если мы хотим учесть в (30), (31) влияние движения ионов, то в каждом элементе тензора ε'_{ij} необходимо добавить аналогичное слагаемое, получаемое из «электронного» заменами $v_e \to v_i$, $\sqrt{u_e} \to -\sqrt{u_i}$, $s_e \to s_i$ $(\nu_{ei} = 0,\ s_i = \nu_{in}/\omega)$. Так, например, компонента ε'_{xy} в (31) имеет вид

$$\varepsilon'_{xy} = -\varepsilon'_{yx} = -\frac{iv_e\sqrt{u_e}\cos\alpha}{(1-is_e)^2+u_e} + \frac{iv_i\sqrt{u_i}\cos\alpha}{(1-is_i)^2-u_i}.$$

Заметим, что соотношения (29) пригодны и при переходе к криволинейной ортогональной системе координат, когда радиусы кривизны координатных осей достаточно велики [5]. Если x_i — криволинейные ортогональные координаты, а x_m — декартовы, то

$$\gamma_{im} = L_i^{-1}\partial x_i/\partial x_m,$$

где $L_i = \sum\limits_m (\partial x_i/\partial x_m)^2$ — дифференциальные коэффициенты первого рода. Это дает возможность оптимальным образом выбирать системы координат при изучении распространения радиоволн в искривленных внешних магнитных полях, когда радиус кривизны велик по сравнению с длиной волны. Так, например, при исследовании распространения радиоволн в магнитосфере Земли часто выбирают криволинейностью систему, в которой одна из осей совпадает с геомагнитным полем. В этой системе тензор ε'_{ij} выглядит относительно просто. В отсутствие пространственной дисперсии и без учета движения ионов он имеет тот же вид, что и в (2.2.25).

И, наконец, заметим, что при $H_0 = 0$, когда $\omega_H = 0$, тензор ε'_{ij} является диагональным и каждая из его составляющих совпадает с диэлектрической проницаемостью изотропной плазмы.

Тензор диэлектрической проницаемости при наличии потоков заряженных частиц. Предыдущее рассмотрение было проведено в предположении, что в отсутствие волн в плазме нет потоков заряженных частиц. Теперь откажемся от этого ограничения. Тогда при линеаризации основных уравнений нужно вместо (5) считать, что

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{u}_{e0} + \mathbf{u}'_e, \quad \mathbf{u}_i = \mathbf{u}_{i0} + \mathbf{u}'_i,$$
$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 + \mathbf{E}', \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}', \tag{3.1.32}$$

где $\mathbf{u}_{e0}$, $\mathbf{u}_{i0}$ — постоянные составляющие для скорости электронов и ионов, $\mathbf{E}_0$ — постоянное и однородное электрическое поле, которое является одной из причин появления потоков. Считая плазму слабоионизированной, в уравнениях (2) положим $\nu_{ei} = 0$, т. е. будем учитывать лишь соударения заряженных частиц с нейтральными.

Линеаризуя уравнения (2), (3) при учете (32), получим

$$e\left\{\mathbf{E}_0 + \frac{1}{c}[\mathbf{u}_{e0}\mathbf{H}_0]\right\} = -m\nu_{en}\mathbf{u}_{e0},$$
$$e\left\{\mathbf{E}_0 + \frac{1}{c}[\mathbf{u}_{i0}\mathbf{H}_0]\right\} = M\nu_{in}\mathbf{u}_{i0}, \tag{3.1.33}$$

$$i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}_{e0} - i\nu_{en})\mathbf{u}_e' + \frac{e}{m}\left\{\mathbf{E}' + \frac{1}{c}\left[\mathbf{u}_e'\mathbf{H}_0\right] + \frac{1}{c}\left[\mathbf{u}_{e0}\mathbf{H}'\right]\right\} - $$
$$- ik\gamma_e \frac{\varkappa T_e \nabla N_e'}{mN_0} = 0,$$
$$i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}_{i0} - i\nu_{in})\mathbf{u}_i - \frac{e}{M}\left\{\mathbf{E}' + \frac{1}{c}\left[\mathbf{u}_i'\mathbf{H}_0\right] + \right. \tag{3.1.34}$$
$$\left. + \frac{1}{c}\left[\mathbf{u}_{i0}\mathbf{H}'\right]\right\} - ik\gamma_i \frac{\varkappa T_i \nabla N_i}{MN_0} = 0;$$
$$N_e' = N_0 \frac{\mathbf{k}\mathbf{u}_e'}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}_{e0}}, \quad N_i' = N_0 \frac{\mathbf{k}\mathbf{u}_i'}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}_{i0}}. \tag{3.1.35}$$

Подстановка (35) в (34) позволяет избавиться в этих уравнениях от N_e', N_i'. Для того чтобы исключить в (34) поле $\mathbf{H}'$, воспользуемся уравнением

$$\mathbf{H}' = \frac{c}{\omega}[\mathbf{k}\mathbf{E}']. \tag{3.1.36}$$

Учитывая (35), (36), из (34) имеем

$$i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}_{e0} - i\nu_{en})\mathbf{u}_e' + \omega_H\left[\mathbf{u}_e'\mathbf{H}_0\right] - i\gamma_e \frac{v_{T_e}^2 \mathbf{k}\left(\mathbf{k}\mathbf{u}_e'\right)}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}_{e0}} =$$
$$= -\frac{e}{m}\mathbf{E}' - \frac{e}{m\omega}\left[\mathbf{u}_{e0}[\mathbf{k}\mathbf{E}']\right],$$
$$i(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}_{i0} - i\nu_{in})\mathbf{u}_i' - \Omega_H\left[\mathbf{u}_i'\mathbf{H}_0\right] - i\gamma_i \frac{v_{T_i}^2 \mathbf{k}\left(\mathbf{k}\mathbf{u}_i'\right)}{\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}_{i0}} = \tag{3.1.37}$$
$$= \frac{e}{M}\mathbf{E}' + \frac{e}{M\omega}\left[\mathbf{u}_{i0}[\mathbf{k}\mathbf{E}']\right].$$

Если сравнить левые части (37) и (20), то нетрудно убедиться в сходстве между ними. Действительно, производя замены ω' на $\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}_{e0} - i\nu_{en}$, ω'' — на $\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}_{i0} - i\nu_{in}$, а также ω на $\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}_{e0}$ [в первом уравнении (20)], ω на $\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}_{i0}$ [во втором уравнении (20)], мы видим, что левые части (20) и (37) совпадают. Однако в правых частях (37), при сравнении их с (20), стоят дополнительные слагаемые

$$-\frac{e}{m\omega}\left[\mathbf{u}_{e0}[\mathbf{k}\mathbf{E}']\right], \quad \frac{e}{M\omega}\left[\mathbf{u}_{i0}[\mathbf{k}\mathbf{E}']\right].$$

Поэтому здесь не удается воспользоваться предыдущими результатами, а необходимо решать уравнения (37) заново. Находя из (37) $\mathbf{u}_e'$, $\mathbf{u}_i'$, подставляя эти выражения в (13), можно найти, как это уже делалось, компоненты тензора ε_{ij}'. В системе координат, в которой вектор $\mathbf{k}$ направлен вдоль оси z, а $\mathbf{H}_0$ лежит в плоскости yz и образует с $\mathbf{k}$ угол α, компоненты тензора ε_{ij}' имеют вид [6]

$$\varepsilon_{xx}' = 1 - \sum_\beta \frac{\omega_{\beta 0}^2}{R_\beta}\left\{\omega_\beta'\left(\omega_\beta''\right)^2\left(1 - \frac{k^2 v_{T\beta}^2}{\omega_\beta'\omega_\beta''}\right) + \frac{k^2 u_{\beta 0x}^2}{\omega_\beta'}\left[\left(\omega_\beta''\right)^2 - \omega_{\beta H}^2\cos^2\alpha\right]\right\},$$

$$\varepsilon'_{yy} = 1 - \sum_\beta \frac{\omega_{\beta 0}^2}{R_\beta}\left\{\omega'_\beta(\omega''_\beta)^2\left(1 - \frac{k^2 v_{T\beta}^2}{\omega'_\beta\omega''_\beta}\right) - \right.$$
$$\left. - \omega'_\beta\omega_{\beta H}^2 \sin^2\alpha + \frac{k^2 u_{\beta 0y}^2}{\omega_\beta}\left[(\omega''_\beta)^2 - \omega_H^2\cos^2\alpha\right]\right\},$$

$$\varepsilon'_{zz} = 1 - \sum_\beta \frac{\omega_{\beta 0}^2}{R_\beta\omega'_\beta}\,\omega^2\left[(\omega''_\beta)^2 - \omega_{\beta H}^2\cos^2\alpha\right],$$

$$\varepsilon'_{xy} = \sum_\beta \frac{\omega_{\beta 0}^2}{R_\beta}\left\{i\omega'_\beta\omega''_\beta\omega_{\beta H}\cos\alpha\left(1 - \frac{k^2 v_{T\beta}^2}{\omega'_\beta\omega''_\beta}\right) - \right.$$
$$- iku_{\beta 0y}\omega''_\beta\omega_{\beta H}\sin\alpha + ku_{\beta 0x}\omega_{\beta H}^2\sin\alpha\cos\alpha -$$
$$\left. - \frac{k^2 u_{\beta 0x}u_{\beta 0y}}{\omega'_\beta}\left[(\omega''_\beta)^2 - \omega_{\beta H}^2\cos^2\alpha\right]\right\},$$

$$\varepsilon'_{xz} = \sum_\beta \frac{\omega_{\beta 0}^2\omega}{R_\beta}\left\{-i\omega''_\beta\omega_{\beta H}\sin\alpha - \frac{ku_{\beta 0x}}{\omega'_\beta}\left[(\omega''_\beta)^2 - \omega_{\beta H}^2\cos^2\alpha\right]\right\},$$

$$\varepsilon'_{yz} = \varepsilon'_{zy} = \sum_\beta \frac{\omega_{\beta 0}^2\omega}{R_\beta}\left\{\omega_{\beta H}^2\sin\alpha\cos\alpha - \frac{ku_{\beta 0y}}{\omega'_\beta}\left[(\omega''_\beta)^2 - \omega_{\beta H}\cos^2\alpha\right]\right\}, \quad (3.1.38)$$

где

$$\omega'_e = \omega - \mathbf{k}\mathbf{u}_{e0}, \qquad \omega'_i = \omega - \mathbf{k}\mathbf{u}_{i0},$$
$$\omega''_e = \omega'_e - i\nu_{en}, \qquad \omega''_i = \omega'_i - i\nu_{in}; \qquad (3.1.39)$$

$$R_\beta = \omega^2\omega''_\beta\left\{(\omega''_\beta)^2 - \omega_{\beta H}^2 + \frac{k^2 v_{T\beta}^2}{\omega'_\beta\omega''_\beta}\left[(\omega''_\beta)^2 - \omega_{\beta H}^2\cos^2\alpha\right]\right\}. \qquad (3.1.40)$$

Компоненты ε'_{yx} и ε'_{zx} легко находятся из соотношения $\varepsilon'_{ij}(\mathbf{H}_0) = \varepsilon'_{ji}(-\mathbf{H}_0)$. Заметим, что в (38) проводится суммирование по сортам заряженных частиц. Напомним, что при наличии ионов одного сорта $\omega_{eH} = \omega_H$ и $\omega_{iH} = -\Omega_H$.

3.2. Волны в плазме в отсутствие внешнего магнитного поля

Продольные и поперечные волны в плазме. Пусть в однородной плазме распространяются плоские волны, так что все переменные меняются по закону $\exp(i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r})$. Из уравнений электродинамики (2.1.24), (2.1.26), (2.1.39) и (2.1.40) для таких волн имеем при $\mathbf{j}_{\text{стор}} = \rho_{\text{стор}} = 0$

$$[\mathbf{k}\mathbf{H}] = -k_0\hat{\varepsilon}'\mathbf{E}, \qquad (3.2.1)$$
$$[\mathbf{k}\mathbf{E}] = k_0\mathbf{H}, \qquad (3.2.2)$$
$$(\mathbf{k}\mathbf{D}') = 0, \qquad (3.2.3)$$
$$(\mathbf{k}\mathbf{H}) = 0, \qquad (3.2.4)$$

где $k_0 = \omega/c$ — волновое число в вакууме.

Из уравнения (4) следует, что либо $\mathbf{H}=0$, как это реализуется в электростатических волнах, либо $\mathbf{k}\perp\mathbf{H}$. Из уравнения (3) при $\mathbf{D}'\neq 0$ вытекает, что $\mathbf{D}'\perp\mathbf{k}$. Если среда изотропна и $\sigma=0$, то из (3) следует равенство $\varepsilon(\mathbf{kE})=0$. Тогда либо при $\varepsilon\neq 0$ $\mathbf{k}\perp\mathbf{E}$ и существование продольных полей невозможно. Но волны могут быть продольными относительно $\mathbf{E}$, если $\varepsilon=0$.

Как известно, для рассмотрения волновых процессов на основе (1)—(4) можно пользоваться лишь уравнениями (1), (2). Исключая из них $\mathbf{H}$, находим

$$[\mathbf{k}[\mathbf{kE}]]+k_0^2\hat{\varepsilon}'E=0,$$

или при записи в ином виде

$$\left(k^2\delta_{ij}-k_ik_j-k_0^2\varepsilon'_{ij}\right)E_j\equiv A_{ij}E_j=0. \qquad (3.2.5)$$

Пусть распространение волн происходит вдоль оси z ($k_x=k_y=0$, $k_z=k$). Тогда, подставляя в (5) компоненты тензора (3.1.14), (3.1.15), получаем

$$\left(k^2-k_0^2\varepsilon'_{tr}\right)E_{xy}=0, \qquad (3.2.6)$$

$$\varepsilon'_{zz}E_z=\varepsilon'_lE_z=0. \qquad (3.2.7)$$

Из (6) следует, что при выполнении условия

$$k^2=k_0^2\varepsilon'_{tr} \qquad (3.2.8)$$

в плазме могут распространяться волны, у которых $E_{xy}\neq 0$, а из (7) видно, что при этом условии $E_z=0$. Эти волны называются поперечными. Вектор $\mathbf{H}$ для них определяется соотношением (2). Он перпендикулярен направлению распространения $\mathbf{k}$ и вектору $\mathbf{E}$.

Из (7) видим, что без учета поглощения при условии

$$\varepsilon_{zz}=\varepsilon_l=0 \qquad (3.2.9)$$

может существовать волна, в которой $E_z\neq 0$. Одновременно с этим из (6) следует, что в такой волне $E_x=E_y=0$. Таким образом, если выполнено (9), то $\mathbf{E}\parallel\mathbf{k}$ и, как следует из (2), в этой волне $\mathbf{H}=0$. Эти волны являются продольными. Их называют также плазменными или электростатическими.

Далее в этой главе мы еще остановимся на свойствах таких волн, а в гл. 4 они будут рассматриваться методом кинетического уравнения.

Дисперсионное уравнение. Уравнение (8) называют дисперсионным уравнением для поперечных волн в изотропной среде. Оно дает связь между ω и $\mathbf{k}$ для таких волн. Аналогично этому соотношение (9) является дисперсионным уравнением для продольных волн.

В общем случае дисперсионным уравнением называют соотношение, дающее связь между ω и компонентами вектора $\mathbf{k}$,

$$F(\omega,\ k_x,\ k_y,\ k_z)=0. \qquad (3.2.10)$$

Ниже вместо (10) мы будем часто пользоваться записью

$$F(\omega, \mathbf{k}) = 0, \qquad (3.2.11)$$

помня, однако, что в (11) подразумевается связь между ω и компонентами $\mathbf{k}$. Эта оговорка необходима в связи с тем, что компоненты вектора $\mathbf{k}$ в общем случае входят в дисперсионное уравнение неравноправно. Именно с таким случаем приходится иметь дело при рассмотрении анизотропных сред.

Обратимся к соотношению (5), представляющему в координатной форме систему трех однородных уравнений с неизвестными E_x, E_y, E_z. Нетривиальное решение этой системы, т. е. такое решение, при котором все три компоненты вектора $\mathbf{E}$ не равны тождественно нулю, существует при обращении в нуль детерминанта, составленного из коэффициентов этой системы. Это соотношение и будет дисперсионным уравнением. Таким образом,

$$F(\omega, \mathbf{k}) = \| k^2\delta_{ij} - k_i k_j - k_0^2\varepsilon_{ij}' \| \equiv \| A_{ij} \| = 0. \qquad (3.2.12)$$

В некоторых случаях (12) можно представить в виде произведения ряда сомножителей

$$F(\omega, \mathbf{k}) = F_1(\omega, \mathbf{k}) F_2(\omega, \mathbf{k}) \ldots = 0. \qquad (3.2.13)$$

Тогда равенство нулю каждого из сомножителей, входящих в (13), представляет собой дисперсионное уравнение для какого-либо типа волн. Если в (13) имеет место вырождение и совпадают два сомножителя

$$F_p(\omega, \mathbf{k}) = F_q(\omega, \mathbf{k}),$$

то это означает, что два вида волн имеют общие свойства (фазовые скорости, длины волн), хотя поляризации их могут отличаться.

В частности, в изотропной непоглощающей среде, как это следует из (6), (7),

$$F(\omega, \mathbf{k}) = \varepsilon_l \left(k^2 - k_0^2\varepsilon_{tr}\right)^2 = 0,$$

т. е. поперечные волны вырожденные. Это означает, что волны, имеющие различную ориентацию вектора $\mathbf{E}$ (например, по оси x и по оси y), будут распространяться с одной и той же скоростью. В силу линейности теории на основе уравнения $k^2 = k_0^2\varepsilon$ можно рассматривать волны, произвольным образом поляризованные в плоскости x, y.

Если известно дисперсионное уравнение, то при его решении нужно принимать во внимание возможность двух различных постановок задачи, связанных с разными физическими условиями [2]. В первой из них задается ω и из (12) определяются компоненты вектора $\mathbf{k}$. Эта постановка соответствует задаче о распространении в стационарной среде волн, возбуждаемых источниками с известными временными зависимостями. Тогда часто-

ты ω можно считать фиксированными и находить компоненты $\mathbf{k}$, длины волн и т. п.

В другой постановке считаются заданными компоненты $\mathbf{k}$ (длины волн) и определяются частоты ω. Такого рода задачи для ионизированных сред известны как задачи о колебаниях плазмы. К ним нужно обращаться в случае, когда задаются и «поддерживаются» характерные размеры неоднородностей в плазме.

Групповая скорость. Поток энергии в диспергирующей среде. Все сказанное выше относилось к монохроматическим волнам. Однако реально строго монохроматических волн не существует. Всякое возмущение, переносящее энергию, уже немонохроматично.

Рассмотрим квазимонохроматический импульс, т. е. такой, для которого спектральная ширина волнового пакета $|\Delta\omega| \ll \omega_0$, где ω_0 — некоторая средняя (центральная) частота волнового пакета. Если пренебречь расплыванием, то волновой пакет распространяется без искажения в диспергирующей среде с групповой скоростью

$$\mathbf{v}_{\text{гр}} = \nabla_{\mathbf{k}}\omega \equiv \partial\omega/\partial\mathbf{k}. \tag{3.2.14}$$

Здесь под $\nabla_{\mathbf{k}}\omega$ следует понимать вектор

$$\nabla_{\mathbf{k}}\omega \equiv \frac{\partial\omega}{\partial k_x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial\omega}{\partial k_y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial\omega}{\partial k_z}\,\mathbf{k},$$

где $\mathbf{i}$, $\mathbf{j}$, $\mathbf{k}$ — единичные векторы вдоль осей x, y, z.

Вектор $\mathbf{v}_{\text{гр}}$ имеет физический смысл, когда является вещественным, т. е. его можно вводить только в слабопоглощающих средах, где $\mathbf{v}_{\text{гр}}$ представляет скорость центра тяжести квазимонохроматического волнового пакета. Кроме того, если ввести среднюю за период энергию поля волны

$$\overline{W} = \frac{1}{16\pi}\left\{\frac{\partial}{\partial\omega}\left(\omega\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})\right) E_i E_j^* + H_j H_j^*\right\}$$

и усредненный поток энергии поля волны

$$\overline{\mathbf{S}} = \frac{c}{16\pi}\{[\mathbf{E}\mathbf{H}^*] + [\mathbf{E}^*\mathbf{H}]\} - \omega\frac{\partial\varepsilon_{ij}(\omega, \mathbf{k})}{\partial\mathbf{k}} E_i^* E_j,$$

то между ними существует связь [7, 8]

$$\overline{\mathbf{S}} = (\partial\omega/\partial\mathbf{k})\overline{W}, \tag{3.2.15}$$

т. е., наряду со сказанным выше, вектор $\mathbf{v}_{\text{гр}} = \partial\omega/\partial\mathbf{k}$ имеет смысл скорости, с которой переносится энергия электромагнитного поля.

Для вычисления $\mathbf{v}_{\text{гр}}$ воспользуемся дисперсионным уравнением (11). Тогда, по правилам дифференцирования неявных функций,

$$\frac{\partial\omega}{\partial\mathbf{k}} = -\frac{\partial F/\partial\mathbf{k}}{\partial F/\partial\omega} = -\left(\frac{\partial F}{\partial\omega}\right)^{-1}\left(\frac{\partial F}{\partial k_x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial F}{\partial k_y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial F}{\partial k_z}\,\mathbf{k}\right). \tag{3.2.16}$$

Пусть теперь $F(\omega, k) = k^2 - (\omega^2 - \omega_0^2)/c^2\eta = 0$, где η не зависит от ω и k. Тогда $\partial F/\partial k = 2k$, $\partial F/\partial\omega = -2\omega/c^2\eta$,

$$\mathbf{v}_{\text{гр}} = \partial\omega/\partial k = \mathbf{k}\omega^{-1}c^2\eta. \tag{3.2.17}$$

Учитывая, что фазовая скорость $v_\phi = \omega/k$, из (17) имеем

$$v_{\text{гр}} v_\phi = \eta c^2. \tag{3.2.18}$$

Поперечные волны. Полагая $\mathbf{k} = k_0\mathbf{n}$, введем безразмерный вектор волновой нормали $\mathbf{n}$. В отсутствие поглощения величина $|\mathbf{n}| = n$ является показателем преломления среды. Действительно, учитывая $k = 2\pi/\lambda$, $k_0 = 2\pi/\lambda_0$, где λ — длина волны в среде, а λ_0 — в вакууме, видим, что $\lambda = \lambda_0/n$.

Из (8) следует

$$n = (\varepsilon'_{tr})^{1/2} = (\varepsilon_{tr1} - i\varepsilon_{tr2})^{1/2}, \tag{3.2.19}$$

где ε_{tr1}, ε_{tr2} вещественны. В этом случае n будет величиной комплексной: $n = n' - in''$. Из (17) получаем

$$(n')^2 - (n'')^2 = \varepsilon_{tr1}, \quad 2n'n'' = \varepsilon_{tr2} = 4\pi\sigma/\omega,$$

откуда находим [1]

$$n' = \left\{\frac{\varepsilon_{tr1}}{2} + \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{tr1}^2 + \varepsilon_{tr2}^2\right)^{1/2}\right\}^{1/2}, \quad n'' = \left\{-\frac{\varepsilon_{tr1}}{2} + \left(\varepsilon_{tr1}^2 + \varepsilon_{tr2}^2\right)^{1/2}\right\}^{1/2}. \tag{3.2.20}$$

Если $|\varepsilon_{tr1}| \gg |\varepsilon_{tr2}|$, т. е. среда является диэлектрической, из (20)

$$n' \approx \sqrt{\varepsilon_{tr1}}, \quad n'' \approx \varepsilon_{tr2}/2\sqrt{\varepsilon_{tr1}} = 2\pi\sigma/\omega\sqrt{\varepsilon_{tr1}}.$$

В обратном случае $|\varepsilon_{tr1}| \ll |\varepsilon_{tr2}|$, когда проводимость велика, получим

$$n' \approx n'' \approx (\varepsilon_{tr2}/2)^{1/2} = (2\pi\sigma/\omega)^{1/2}.$$

Поле волны изменяется в пространстве по закону $\exp\left(-i\frac{\omega}{c}nz\right) = \exp\left(-\frac{\omega}{c}n''z - i\frac{\omega}{c}n'z\right)$. Таким образом, множитель $\exp\left(-\frac{\omega}{c}n''z\right)$ характеризует ослабление волны за счет затухания *). Характерное расстояние, на котором поле убывает в e раз, т. е. толщина скин-слоя z_c, находится из соотношения $\frac{\omega}{c}n''z_c = 1$, отсюда

$$z_c = c/\omega n'' = c/\sqrt{2\pi\sigma\omega}.$$

Расстояние z_c характеризует собой глубину проникновения поля электромагнитной волны в сильно проводящую среду.

---

*) При определении n'' знак корня был выбран так, чтобы затухающими были волны, распространяющиеся в сторону положительных z.

Рассмотрим поперечные волны в отсутствие поглощения. Из (8)

$$k = \frac{\omega}{c}\left(1 - \frac{\omega_{e0}^2 + \omega_{i0}^2}{\omega^2}\right)^{1/2} \approx \frac{\omega}{c}\left(1 - \frac{\omega_{e0}^2}{\omega^2}\right)^{1/2} = \frac{\omega}{c} n.$$

При $\omega \gg \omega_{e0}$ поле волны будет осциллирующим. Среду в этом случае называют прозрачной. В обратном случае, при $\omega < \omega_{e0}$, $n^2 < 0$, т. е. $n = \pm i\,|n| = \pm i(\omega_{e0}^2/\omega^2 - 1)^{1/2}$. Выбирая перед радикалом такой знак, чтобы с расстоянием поле не нарастало, убеждаемся, что поле волны описывается соотношением

$$\exp\{-(\omega/c)\left(\omega_{e0}^2/\omega^2 - 1\right)^{1/2}\},$$

т. е. убывает с расстоянием, несмотря на то, что поглощения волн в среде нет. Среду в этом случае называют непрозрачной. Волна отражается от границы с непрозрачной средой, а попадая в нее, затухает. Глубина проникновения поля в непрозрачную среду, определяемая из условия $\frac{\omega}{c}|n|\,z_c = 1$, равна

$$z_c = c/\left(\omega_{e0}^2 - \omega^2\right)^{1/2}.$$

На рис. 3.2 приведена зависимость $\tilde{n}^2$ от $v_e = 4\pi e^2 N_0/m\omega^2$. При $0 \leqslant v_e \leqslant 1$ среда прозрачна, а при $v_e > 1$ — непрозрачна. Значение $v_e = 1$, при котором $\omega = \omega_{e0}$ и $\tilde{n}^2 = 0$, определяет уровень отражения поперечных волн при нормальном падении на слоисто-неоднородную плазму (гл. 5). При $\tilde{n}^2 > 0$ величины $\tilde{n}^2$ и n^2 совпадают. Смысл введения обозначения $\tilde{n}^2$ разъяснен в п. 3.3.

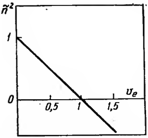

Рис. 3.2. Функция $\tilde{n}^2(v_e)$ для холодной изотропной плазмы.

Вычислим групповую скорость поперечных волн в непоглощающей среде. Для этого воспользуемся (17) ($\eta = 1$, $\omega_0 = \omega_{e0}$):

$$v_{\text{гр}} = cn = c\left(1 - \omega_{e0}^2/\omega^2\right)^{1/2}. \quad (3.2.21)$$

Кроме того, из (18) получаем связь между фазовой и групповой скоростями волны:

$$v_\text{ф} v_{\text{гр}} = c^2. \quad (3.2.22)$$

Поскольку в отсутствие поглощения в зоне прозрачности $n = \left(1 - \omega_{e0}^2/\omega^2\right)^{1/2} < 1$, то $v_\text{ф} = c/n > c$. В то же время из (22) $v_{\text{гр}} < c$, что находится в соответствии с выводами специальной теории относительности, поскольку скорость переноса энергии $v_{\text{гр}}$ меньше скорости света в вакууме [9].

Продольные волны. Как следует из (7) и (3.1.19), дисперсионное уравнение для продольных волн в непоглощающей плазме имеет вид

$$\varepsilon_l \equiv \varepsilon_{zz} = 1 - \frac{\omega_{e0}^2}{\omega^2 - \gamma_e k^2 v_{T_e}^2} - \frac{\omega_{i0}^2}{\omega^2 - \gamma_i k^2 v_{T_i}^2} = 0. \quad (3.2.23)$$

Прежде всего рассмотрим случай $\omega^2/k^2 \equiv v_\phi^2 \gg v_{T_i}^2$. Тогда при учете $\omega_{i0}^2 \ll \omega_{e0}^2$ из (23) получаем

$$k^2 = \frac{\omega^2 - \omega_{e0}^2}{\gamma_e v_{T_e}^2} = \frac{\omega^2}{\gamma_e v_{T_e}^2}\left(1 - \frac{\omega_{e0}^2}{\omega^2}\right), \qquad (3.2.24)$$

$$n^2 = \frac{c^2 k^2}{\omega^2} = \frac{c^2}{\gamma_e v_{T_e}^2}\left(1 - \frac{\omega_{e0}^2}{\omega^2}\right). \qquad (3.2.25)$$

Если пренебречь тепловым движением электронов, то мы имеем дело не с волнами, а с колебаниями. Для частоты ω этих колебаний согласно (23) получаем, что $\omega = \omega_{e0}$. Эти колебания и соответствующие им волны (24) называют *плазменными*, или *ленгмюровскими*.

При учете теплового движения нужно иметь в виду, что за крайне редкими исключениями в космической и приземной плазме отношение $v_{T_e}^2/c^2 \sim 10^{-4} - 10^{-8}$, т. е. очень мало по сравнению с единицей. Таким образом, и при $|\omega - \omega_{e0}| \ll \omega$ плазменные волны могут быть достаточно медленными ($n^2 \gg 1$; $v_\phi \ll c$).

Пределы применимости формул (24), (25) могут быть установлены только в рамках кинетической теории (гл. 4). При этом необходимым условием будет близость частоты ω к ω_{e0}. Если записать дисперсионное уравнение (24) в виде $\omega^2 = \omega_{e0}^2 + \gamma_e k^2 v_{T_e}^2$, то это условие может быть записано в виде $\omega_{e0}^2 \gg k^2 v_{T_e}^2$ или в более известной форме $k^2 r_D^2 \ll 1$, где дебаевский радиус r_D определяется формулой (2.1.21). Об этом критерии подробнее пойдет речь в гл. 4.

Из (24) и (21), где полагаем $\eta = \gamma_e v_{T_e}^2/c^2$ и $\omega_0 = \omega_{e0}$, имеем для групповой скорости

$$v_{\text{гр}} = v_{T_e}\left(1 - \omega_{e0}^2/\omega^2\right)^{1/2} = \gamma_e v_{T_e}^2 n/c. \qquad (3.2.26)$$

Из (22) получаем $v_{\text{гр}} v_\phi = \gamma_e v_{T_e}^2$. Как видим, характер дисперсии для плазменных волн такой же, как у поперечных, но плазменные волны, как это, в частности, видно из последнего соотношения, являются более медленными.

Из уравнения (23), без пренебрежения движением ионов, имеем

$$\omega^4 - \omega^2\left[k^2\left(\gamma_e v_{T_e}^2 + \gamma_i v_{T_i}^2\right) + \omega_{e0}^2 + \omega_{i0}^2\right] + \\ + k^2\left(\omega_{e0}^2 \gamma_i v_{T_i}^2 + \omega_{i0}^2 \gamma_e v_{T_e}^2\right) + \gamma_e \gamma_i k^4 v_{T_e}^2 v_{T_i}^2 = 0. \qquad (3.2.27)$$

Решение (27) относительно ω в пренебрежении членами $\sim m/M$

имеет вид

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left[\omega_{e0}^2 + k^2\left(\gamma_e v_{T_e}^2 + \gamma_i v_{T_i}^2\right)\right] \pm$$
$$\pm\left\{\frac{1}{4}\left[\omega_{e0}^2 + k^2\left(\gamma_e v_{T_e}^2 + \gamma_i v_{T_i}^2\right)\right]^2 - k^2\omega_{e0}^2\left(\gamma_i v_{T_i}^2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \gamma_e \frac{m}{M} v_{T_e}^2\right) - k^4 v_{T_e}^2 v_{T_i}^2 \gamma_e \gamma_i\right\}^{1/2}. \quad (3.2.28)$$

Каждому значению k отвечают два значения ω^2, т. е. существуют две частотные ветви. Пусть выполнены неравенства

$$\omega_{e0}^2 \gg v_{T_e}^2 k^2, \quad (3.2.29)$$

$$v_{T_e}^2 \gg v_{T_i}^2. \quad (3.2.30)$$

Первое из них означает, что длина волны λ превышает дебаевский радиус r_D, $\lambda \gg 2\pi r_D$. Условие (30) выполняется в интересующих нас здесь плазменных средах почти автоматически, поскольку в космических условиях не известны случаи сильного превышения T_i над T_e (в ионосфере $T_e \geqslant T_i$). При ограничениях (29), (30) из (28) для первого корня имеем

$$\omega_1^2 \approx \omega_{e0}^2 + \gamma_e k^2 v_{T_e}^2,$$

что соответствует электронной плазменной волне (24), (25).

Второй корень (28) определяется соотношением

$$\omega_2^2 \approx (\varkappa/M)(\gamma_e T_e + \gamma_i T_i) k^2 = c_s^2 k^2 \quad (3.2.31)$$

для *ионно-звуковых волн*, распространяющихся с фазовой скоростью $v_\phi = c_s = [\varkappa(\gamma_e T_e + \gamma_i T_i)/M]^{1/2}$. Поскольку от частоты v_ϕ не зависит, она совпадает с групповой скоростью.

При $T_e = T_i = T$, $\gamma_e = \gamma_i = 1$ из (31) имеем

$$\omega_2^2 = 2\varkappa T k^2/M. \quad (3.2.32)$$

Это соотношение определяет скорость распространения $c_s = \sqrt{2\varkappa T/M}$, совпадающую с изотермической скоростью звука в плазме, как в сплошной среде [1].

При $T_e \gg T_i$ из (31) получаем

$$\omega_2^2 = \gamma_e T_e \varkappa k^2/M. \quad (3.2.33)$$

Приведенные выводы о свойствах ионно-звуковых волн нуждаются в уточнениях, базирующихся на выводах кинетического рассмотрения, что позволяет решить вопрос о величине коэффициентов γ_e и γ_i.

При выполнении ограничений

$$k^2 v_{T_i}^2 \ll \omega_{e0}^2 \ll k^2 v_{T_e}^2,$$

которым можно удовлетворить только при $T_e \gg T_i$, для ω_1^2 из (28) получаем прежний результат, а для ω_2^2 — формулу

$$\omega_2^2 \approx \omega_{i0}^2 + \gamma_i k^2 v_{T_i}^2 \tag{3.2.34}$$

для волны, которую можно назвать *ионной плазменной* (или ионными колебаниями плазмы). Согласно (34) для квадрата показателя преломления имеем

$$n^2 = \frac{c^2}{\gamma_i v_{T_i}^2}\left(1 - \frac{\omega_{i0}^2}{\omega^2}\right).$$

Используя (34) или (35), легко получить, что $v_ф v_{гр} = \gamma_i v_{T_i}^2$. Волны типа (34), как показывает кинетическое рассмотрение (гл. 4), существуют только, когда $\omega^2 \approx \omega_{i0}^2$, $\omega_{i0}^2 \gg \gamma_i k^2 v_{T\,i}^2$.

На рис. 3.3 в качественной форме изображены зависимости $k(\omega)$ для поперечных и продольных волн в изотропной плазме. Кривые I, II и III отвечают, соответственно, поперечным, электронным плазменным и ионным плазменным волнам. Обращаем внимание на то, что на низких частотах ионные плазменные волны переходят в ионнозвуковые, т. е. эти волны лежат на одной и той же частотной ветви.

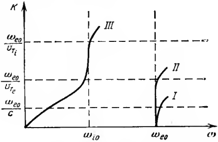

Рис. 3.3. Зависимости $k(\omega)$ для поперечных и продольных волн в изотропной плазме.

Все приведенные результаты (в частности, кривые III) получены в применении к плазме с одним сортом положительных ионов. При наличии нескольких сортов ионов картина на низких частотах усложняется (появляются новые кривые, аналогичные III).

3.3. Высокочастотные волны в магнитоактивной плазме

Показатель преломления в отсутствие пространственной дисперсии. Обратимся к системе уравнений (3.2.5). Будем считать, что распространение происходит вдоль оси z, $k_x = k_y = 0$. Тогда

$$\begin{gathered}
(\tilde{n}^2 - \varepsilon'_{xx}) E_x - \varepsilon'_{xy} E_y - \varepsilon'_{xz} E_z = 0, \\
-\varepsilon'_{yx} E_x + (n^2 - \varepsilon'_{yy}) E_y - \varepsilon'_{yz} E_z = 0, \\
\varepsilon'_{zx} E_x + \varepsilon'_{zy} E_y + \varepsilon'_{zz} E_z = 0.
\end{gathered} \tag{3.3.1}$$

Здесь учтено, что $k^2 = k_0^2 \tilde{n}^2$. Замена в обозначениях n на $\tilde{n}$ сделана, чтобы предотвратить возможность полного отождествления $\tilde{n}$ с показателем преломления, часто обозначаемого через n.

В областях непрозрачности, где $\tilde{n}^2 < 0$, использование обычного понятия показателя преломления становится невозможным и в бесстолкновительной плазме.

Из последнего уравнения системы (1) находим

$$E_z = -\left(\varepsilon'_{zx}E_x + \varepsilon'_{zy}E_y\right)/\varepsilon'_{zz}. \qquad (3.3.2)$$

Подставляя (2) в два первых уравнения системы (1), получим

$$\begin{aligned} &\left[\varepsilon'_{zz}\left(\tilde{n}^2 - \varepsilon'_{xx}\right) + \varepsilon'_{xz}\varepsilon'_{zx}\right]E_x + \left(\varepsilon'_{xz}\varepsilon'_{zy} - \varepsilon'_{xy}\varepsilon'_{zz}\right)E_y = 0,\\ &\left(\varepsilon'_{yz}\varepsilon'_{zx} - \varepsilon'_{yx}\varepsilon'_{zz}\right)E_x + \left[\varepsilon'_{zz}\left(\tilde{n}^2 - \varepsilon'_{yy}\right) + \varepsilon'_{yz}\varepsilon'_{zy}\right]E_y = 0. \end{aligned} \qquad (3.3.3)$$

Рассматривая далее случай, когда $\mathbf{H}_0$ лежит в плоскости yz, воспользуемся формулами для ε'_{jk} (3.1.31), справедливыми без учета теплового движения частиц (пространственной дисперсии) и движения ионов (высокие частоты). Тогда уравнения (3) можно записать в виде

$$(A - \tilde{n}^2)E_x + iCE_y = 0, \quad -iCE_x + (B - \tilde{n}^2)E_y = 0, \qquad (3.3.4)$$

где

$$\begin{aligned} A &= \{u_e(1 - is_e) - (1 - is_e)(1 - is_e - v_e)^2 - u_e v_e \cos^2\alpha\}\Delta^{-1},\\ B &= \{u_e(1 - is_e - v_e) - (1 - is_e)(1 - is_e - v_e)\}\Delta^{-1},\\ C &= \{v_e\sqrt{u_e}(1 - is_e - v_e)\cos\alpha\}\Delta^{-1},\\ \Delta &= (1 - is_e)u_e - (1 - is_e)^2(1 - is_e - v_e) - u_e v_e \cos^2\alpha. \end{aligned} \qquad (3.3.5)$$

Записывая дисперсионное уравнение системы (4)

$$\tilde{n}^4 - (A + B)\tilde{n}^2 + AB - C^2 = 0$$

и разрешая его относительно $\tilde{n}^2$, находим

$$\tilde{n}^2_{1,2} = \frac{A + B}{2} \mp \left\{\left(\frac{A - B}{2}\right)^2 + C^2\right\}^{1/2}. \qquad (3.3.6)$$

Два значения $\tilde{n}^2_{1,2}$ (6) отвечают двум нормальным волнам. Одну из них с $\tilde{n}^2 = \tilde{n}^2_1$ называют *необыкновенной*, а вторую с $n^2 = \tilde{n}^2_2$ — *обыкновенной*. Первой отвечает знак минус перед радикалом в (6), а второй — знак плюс.

Плазма в магнитном поле (магнитоактивная плазма) оказывается средой двоякопреломляющей, т. е. в ней в каждом направлении могут распространяться две независимых волны с различными показателями преломления (фазовыми скоростями $v_{\text{ф}1,2} = c/n_{1,2}$). Магнитоактивная плазма анизотропна. Показатель преломления волн как типа 1, так и типа 2 зависит от угла α между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{H}_0$. Поэтому отличаются и фазовые скорости волн, распространяющихся в разных направлениях.

Подставив выражение (5) в (6), после пренебрежения столкновениями ($s_e = 0$) получим

$$\begin{aligned} \tilde{n}^2_{1,2} = 1 - v_e\,\{[2\,(1 - v_e) - u_e\sin^2\alpha] \mp \left[u_e^2\sin^4\alpha +\right.\\ \left. + 4u_e\,(1 - v_e)^2\cos^2\alpha\right]^{1/2}\}\,[2\,(1 - u_e - v_e + u_e v_e\cos^2\alpha)]^{-1}. \end{aligned} \qquad (3.3.7)$$

Отметим некоторые следствия (7). В отсутствие поля $\mathbf{H}_0$ (при $u_e = 0$)

$$\widetilde{n}^2 = \widetilde{n}_1^2 = \widetilde{n}_2^2 = 1 - v_e.$$

Если рассматривать переход к изотропной среде от магнитоактивной, то первая является вырожденной, т. е. средой, в которой нормальные волны с заданной частотой обладают одинаковыми свойствами.

Из (7) легко установить, что

$$\widetilde{n}_1^2 = 0, \quad v_e = 1 \pm \sqrt{u_e}; \quad \widetilde{n}_2^2 = 0, \quad v_e = 1. \tag{3.3.7a}$$

Эти условия применимы с той оговоркой, что при $u_e > 1$ условие $v_e = 1 - \sqrt{u_e}$ не реализуется, так как $v_e = \omega_{e0}^2/\omega^2$ — величина положительная.

Далее, существенную роль играет нахождение условий, при которых $n^2 \to \infty$. Из (7) находим, что $n^2 \to \infty$, если

$$1 - u_e - v_e + u_e v_e \cos^2 \alpha = 0. \tag{3.3.8}$$

При $u_e < 1$, как это следует из (7), $\widetilde{n}_1^2 \to \infty$, а $\widetilde{n}_2^2$ остается конечным. При $u_e > 1$, наоборот, $\widetilde{n}_2^2 \to \infty$, а $\widetilde{n}_1^2$ остается конечным. Условие (8), при выполнении которого $v_ф \to 0$, называется резонансным. При строгом равенстве (8) мы имеем дело не с волной, а с колебаниями. Аналогичная ситуация возникает в изотропной плазме при $v_{T_e}^2 = 0$, когда $\omega = \omega_{e0}$. Это, кстати, вытекает и из (8), откуда при $u_e = 0$ имеем равенство $v_e = \omega_{e0}^2/\omega^2 = 1$.

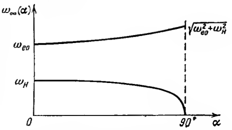

Рис. 3.4. Зависимость резонансных частот ω_∞ от угла α в электронной плазме.

Считая параметр u_e и угол α фиксированными, находим из (8) значения $v_e = v_{e\infty}$, при которых $n^2 \to \infty$, а именно,

$$v_{e\infty} = (1 - u_e)/(1 - u_e \cos^2 \alpha). \tag{3.3.8a}$$

Равенство (8) можно рассматривать и как уравнение для резонансных частот ω. Решая это уравнение, находим

$$\omega^2 = \omega_{\infty 1,2}^2 = \frac{\omega_{e0}^2 + \omega_H^2}{2} \pm \left\{ \left(\frac{\omega_{e0}^2 + \omega_H^2}{2} \right)^2 - \omega_{e0}^2 \omega_H^2 \cos^4 \alpha \right\}^{1/2}. \tag{3.3.9}$$

При $\alpha = 0$ $\omega_{\infty 1} = \max\{\omega_{e0}, \omega_H\}$ и $\omega_{\infty 2} = \min\{\omega_{e0}, \omega_H\}$, а при $\alpha = \pi/2$ $\omega_{\infty 1} = (\omega_{e0}^2 + \omega_H^2)^{1/2}$ и $\omega_{\infty 2} = 0$. Качественная зависимость $\omega_\infty(\alpha)$, $\omega_{e0} > \omega_H$, приведена на рис. 3.4 [10]. Частоту $\omega_\infty = (\omega_{e0}^2 + \omega_H^2)^{1/2}$ называют верхней гибридной частотой. Обраще-

ние в нуль частот $\omega_{\infty 2}$ при $\alpha = \pi/2$ связано с неучетом движения ионов. Влияние последних рассматривается в п. 5 этой главы.

Качественные зависимости $\tilde{n}^2_{1,2}(v_e)$ при фиксированных углах α и параметрах u_e при $u_e < 1$ и $u_e > 1$ приведены на рис. 3.5 [1]. Кривые построены при небольших углах α, $\sin^2\alpha \ll 1$. При $\sin^2\alpha \sim 1$ сохраняются условия обращения в нуль $\tilde{n}^2_1$ и $\tilde{n}^2_2$, поскольку они от α не зависят и имеется аналогия в поведении $\tilde{n}^2(v_e)$ при $v_e \gg 1$ и $v_e \ll 1$. Однако с увеличением α кривые на рис. 3.5, построенные при $\sin^2\alpha \ll 1$, будут существенным образом

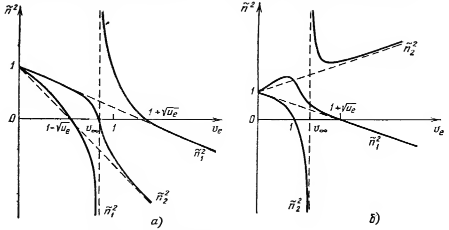

Рис. 3.5. Функция $\tilde{n}^2_{1,2}(v_e)$: а) $u_e < 1$; б) $u_e > 1$.

деформироваться в областях значений v_e около резонанса. При $u_e > 1$ и при $\alpha > \arccos(u_e)^{-1/2}$ из (8а) формально получаются $v_{e\infty} < 0$, что невозможно. Таким образом, условие резонанса (8), (8а) здесь не удовлетворяется и особенности, связанные с разрывами $\tilde{n}^2$ и уходом $\tilde{n}^2$ в бесконечность, представленные на рис. 3.5, будут отсутствовать. В частности, отсутствие резонанса будет характерно для зависимостей $n^2(v_e)$, $u_e > 1$, для поперечного распространения.

Вектор поляризации. Найдем поляризацию волны, не накладывая сначала ограничений на тензор $\varepsilon_{jk}(\omega)$. Обратимся к уравнениям (3.2.5). Поскольку обращение в нуль детерминанта системы (3.2.5) выполнено, то только два уравнения этой системы будут линейно независимы. Возьмем первые два уравнения и запишем их в форме

$$A_{11}E_x + A_{12}E_y = -A_{13}E_z, \quad A_{21}E_x + A_{22}E_y = -A_{23}E_z. \tag{3.3.10}$$

Отсюда

$$E_x = \frac{T_{13}}{T_{33}}E_z, \quad E_y = \frac{T_{23}}{T_{33}}E_z, \tag{3.3.11}$$

где T_{ij} — алгебраические дополнения соответствующих элементов матрицы A_{ij}. Соотношения (11) можно переписать в виде

$$E_x/T_{13} = E_y/T_{23} = E_z/T_{33}.$$

Используя другие пары уравнения из системы (3.2.5), имеем

$$E_x/T_{11} = E_y/T_{21} = E_z/T_{31}.$$

Каждое из этих соотношений определяет связь между компонентами вектора $\mathbf{E}$ в среде. Естественно, все они эквивалентны, поэтому можно записать

$$E_x/T_{1j} = E_y/T_{2j} = E_z/T_{3j}. \tag{3.3.12}$$

Полагая $\mathbf{E}_0 = \mathrm{E}_0 \mathbf{f}$, где E_0 — амплитудный множитель, $\mathbf{f}$ — вектор поляризации, находим

$$f_x/T_{1j} = f_y/T_{2j} = f_z/T_{3j}. \tag{3.3.13}$$

Учтем также, что в T_{ij} входят как ε_{ij}, так и компоненты вектора $\mathbf{k}$, которые, как следует из (6), имеют несколько значений $\mathbf{k}_s$, отвечающих разным типам волн. Отсюда следует, что для каждого s имеется свой набор $T_{ij}(s)$. Следовательно, каждому значению $\mathbf{k}_s$ отвечает свой показатель преломления n_s и свой вектор поляризации волны $\mathbf{f}_s$. Каждая из таких волн определяется одним из решений исходного дисперсионного уравнения и называется собственной или нормальной волной в среде.

Воспользуемся уравнениями (4). Тогда

$$E_y/E_x = iC/(B^2 - \tilde{n}^2) = -(A - \tilde{n}^2)/iC. \tag{3.3.14}$$

Подставив (5) в (14), получаем [1]

$$\left(\frac{E_y}{E_x}\right)_{1,2} = -i\frac{2\sqrt{u_e}\,(1 - is_e - v_e)\cos\alpha}{u_e\sin^2\alpha \mp \left[u_e^2\sin^4\alpha + 4u_e\,(1 - is_e - v_e)^2\cos^2\alpha\right]^{1/2}}. \tag{3.3.15}$$

Здесь знак минус перед радикалом относится к обыкновенной волне, а знак плюс — к необыкновенной.

Из соотношения (2) с учетом (14) находим

$$\left(\frac{E_z}{E_x}\right)_{1,2} = -\frac{(B - \tilde{n}^2)\,\varepsilon'_{zx} + iC\varepsilon'_{zy}}{(B - \tilde{n}^2)\,\varepsilon'_{zz}}. \tag{3.3.16}$$

Нормируя вектор поляризации так, чтобы $f_x = 1$, для остальных компонент из (14), (16) получаем

$$f_{y\,1,2} = \frac{iC}{B - \tilde{n}^2}, \quad f_{z\,1,2} = -\frac{\left(B - \tilde{n}_{1,2}^2\right)\varepsilon'_{zx} + iC\varepsilon'_{zy}}{\left(B - \tilde{n}_{1,2}^2\right)\varepsilon'_{zz}}. \tag{3.3.17}$$

Рассмотрим соотношения (14) — (17) при $s_e = 0$. Тогда, согласно (15), отношение $(E_y/E_x)_{1,2}$ является мнимым. Здесь следует учесть, что из (3.1.31) при $\nu_{\text{эф}} = 0$ компоненты ε'_{zy} и ε'_{zz} вещественны, а ε'_{zx} является мнимой величиной. Учитывая, что в этом случае B, C, $\tilde{n}_{1,2}^2$ вещественны, убеждаемся, что f_z в (17) величина мнимая. Проекцией вектора $\mathbf{f}$ на плоскость yz является вектор $\mathbf{f}_{yz}$, величина которого равна

$$f_{yz\,1,2} = i\left\{\left(\frac{C}{B^2 - n_{1,2}^2}\right)^2 + \left\{\frac{\left(B - n_{1,2}^2\right)\left|\varepsilon'_{zx}\right| + C\varepsilon'_{zy}}{\left(B - n_{1,2}^2\right)\varepsilon'_{zz}}\right\}^2\right\}^{1/2}. \tag{3.3.18}$$

Угол наклона его к оси z определяется соотношением

$$\operatorname{tg}\theta_{1,2} = \frac{f_{y\,1,2}}{f_{z\,1,2}} = -\frac{\varepsilon'_{zz}C}{\left|\varepsilon'_{zx}\right|\left(B - n_{1,2}^2\right) + C\varepsilon'_{zy}}. \tag{3.3.19}$$

Следовательно, при выбранной нормировке конец вектора $\mathbf{f}$ в зависимости от времени движется в плоскости, образованной осью x и вектором $\mathbf{f}_{yz}$. Колебания вектора $\mathbf{f}$ в направлении, перпендикулярном оси x, сдвинуты на $\pi/2$ относительно колебаний вдоль оси x. Таким образом, конец век-

тора $\mathbf{E}$ движется по эллипсу, одна из полуосей которого параллельна оси x и равна единице, а другая лежит в плоскости yz, равна $f_{yz\,1,2}$ и составляет с осью x угол $\theta_{1,2}$. Волна поляризована эллиптически.

Без нарушения выводов о характере поляризации поля $\mathbf{E}$ вектор $\mathbf{f}$ может быть отнормирован произвольным образом, наиболее удобным для решения той или иной задачи. Например, в (17) принято $f_x = 1$. В целом ряде случаев его нормируют так, чтобы выполнялось $|f| = 1$ [11]. Естественно, выражения для компонент вектора $\mathbf{E}$ не будут зависеть от нормировки f.

Переходя в (15), (17) к случаю $v_e = 0$, убеждаемся, что $f_z = 0$, $f_x = 1$, $f_{y\,1,2} = -2i\sqrt{u_e}\cos\alpha\Big/\left(u_e\sin^2\alpha \mp \sqrt{u_e^2\sin^4\alpha + 4u_e\cos^2\alpha}\right)$. Нетрудно убедиться, что $f_1f_2 = 0$, так что векторы $\mathbf{f}_1$ и $\mathbf{f}_2$ ортогональны. Это означает, что при переходе к вакууму в качестве собственных решений уравнений Максвелла не обязательно выбирать линейно поляризованные волны. Полное поле можно представлять в виде суммы эллиптически поляризованных волн, распространяющихся с одинаковыми фазовыми скоростями.

Частные случаи распространения волн. Рассмотрим распространение волн перпендикулярно внешнему магнитному полю $\mathbf{H}_0$, когда $\alpha = \pi/2$ ($\mathbf{k}\perp\mathbf{H}_0$; $n_z = n$, $n_{x,y} = 0$). Тогда из (6) имеем

$$\tilde{n}_1^2 = 1 - \frac{v_e(1 - v_e - is_e)}{(1 - is_e)^2 - v_e(1 - is_e) - u_e}, \quad \tilde{n}_2^2 = 1 - \frac{v_e}{1 - is_e}, \quad (3.3.20)$$

откуда при $s_e = 0$

$$\tilde{n}_1^2 = 1 - \frac{v_e(1 - v_e)}{1 - u_e - v_e}, \quad \tilde{n}_2^2 = 1 - v_e. \quad (3.3.21)$$

Как было указано выше, условия обращения в нуль n^2 для обыкновенной волны $v_e = 1$ и для необыкновенной волны $v_e = 1 \pm \sqrt{u_e}$ определяют положение точек отражения. Этот вывод, естественно, относится и к данному случаю. При $u_e < 1$ имеется две точки отражения для необыкновенной волны, а при $u_e > 1$ имеет смысл только равенство $v_e = 1 + \sqrt{u_e}$.

Резонанс $n_1^2 \to \infty$ возникает при $v_e = v_{e\infty} = 1 - u_e$, т. е. на верхней гибридной частоте $\omega = \sqrt{\omega_{e0}^2 + \omega_H^2}$. При $u_e > 1$ условию резонанса для электронов удовлетворить невозможно. Характер поляризации волн проще определить из системы (1), которая приобретает вид

$$\left(\tilde{n}^2 - \varepsilon'_{yy}\right)E_y = 0, \quad \left(\tilde{n}^2 - \varepsilon'_{xx}\right)E_x - \varepsilon'_{xz}E_z = 0, \quad (3.3.22)$$

$$\varepsilon'_{zx}E_x + \varepsilon'_{zz}E_z = 0. \quad (3.3.23)$$

При переходе к (22) учтено, что $\varepsilon'_{xy} = \varepsilon'_{yx} = \varepsilon'_{yz} = \varepsilon'_{zy} = 0$. Из (22) непосредственно следует, что для обыкновенной волны

$$f_y \neq 0, \quad f_x = f_z = 0,$$

т. е. волна линейно поляризована и вектор $\mathbf{E}$ параллелен $\mathbf{H}_0$. В этом случае $\tilde{n}_2^2$ совпадает с выражением для $\tilde{n}^2$ в изотропной плазме. Это связано с характером поляризации (на движение

частиц вдоль $\mathbf{H}_0$ это поле влияния не оказывает). Совпадение формулы для $\tilde{n}_2^2$ (21) с соотношением для изотропного случая является одной из причин, по которой соответствующую волну называют обыкновенной.

Для необыкновенной волны

$$f_y = 0, \quad f_x/f_z = i\,|\,\varepsilon'_{xz}\,|/(\tilde{n}_1^2 - \varepsilon'_{xx}),$$

отсюда видно, что необыкновенная волна имеет эллиптическую поляризацию, плоскость эллипса совпадает с плоскостью xz. Волна имеет продольную компоненту.

Качественная зависимость $\tilde{n}_{1,2}^2(v_e)$ при $s_e = 0$ приведена на рис. 3.6 для случаев $u_e < 1$ и $u_e > 1$.

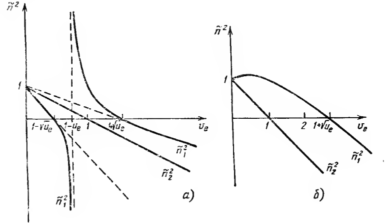

Рис. 3.6. Функция $\tilde{n}_{1,2}^2(v_e)$ при поперечном распространении: а) $u_e < 1$; б) $u_e > 1$.

При продольном распространении, полагая в (7) $\alpha = 0$, имеем

$$\tilde{n}_\pm^2 = 1 - v_e/(1 \pm \sqrt{u_e}). \qquad (3.3.24)$$

Простые зависимости $\tilde{n}_+^2$ и $\tilde{n}_-^2$ от v_e при $u_e < 1$ и $u_e > 1$ показаны на рис. 3.7. Из-за определенных особенностей, сопровождающих предельный переход $\alpha \to 0$, в (7) вместо $\tilde{n}_1^2$ и $\tilde{n}_2^2$ введены $\tilde{n}_+^2$ и $\tilde{n}_-^2$. При переходе к $\alpha = 0$ необходимо разделять в силу присутствия под радикалом в (7) члена с $(1 - v_e)^2$ случаи $v_e < 1$ и $v_e > 1$. Тогда легко установить, что при $v_e < 1$ $\tilde{n}_+^2 = \tilde{n}_2^2$ и $\tilde{n}_-^2 = \tilde{n}_1^2$, а при $v_e > 1$ $\tilde{n}_+^2 = \tilde{n}_1^2$ и $\tilde{n}_-^2 = \tilde{n}_2^2$. Таким образом, например, участок прямой $\tilde{n}_+^2 = 1 - v_e/(1 + \sqrt{u_e})$, $v_e > 0$, на рис. 3.7 можно составить из двух частей: отрезка от $v_e = 0$ до $v_e = 1$, отвечающего обыкновенной волне, и части от $v_e = 1$ до $v_e = \infty$ — необыкновенной волне. Можно добавить, что при $v_e > (1 + \sqrt{u_e})$ мы попадаем в область непрозрачности плазмы.

Подставляя (24) в (14), находим, что $f_{z\pm}=0$, а $f_{x\pm}/f_{y\pm}=\pm i$, т. е. волны поперечны и поляризованы по кругу [знак плюс в (24) соответствует вращению поля **E** против часовой стрелки, а знак минус — по часовой стрелке].

При $\alpha=0$ некоторые выводы соотношения (24) находятся в кажущемся противоречии с выводами для общего случая конечных α. Основное здесь — это «потеря» точки отражения $v_e=1$

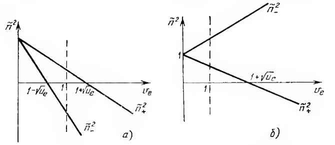

Рис. 3.7. Функция $\tilde{n}^2_\pm(v_e)$ при продольном распространении: *а*) $u_e<1$; *б*) $u_e>1$.

для обыкновенной волны. При использовании (24) условие отражения $v_e=1\pm\sqrt{u_e}$ нужно относить не к одной волне, а соответственно к $\tilde{n}^2_+$ и $\tilde{n}^2_-$, $n^2_+=0$ и $n^2_-=0$. При обращении к формуле (24) или к зависимостям $\tilde{n}^2_\pm(v_e)$ видно, что при $u_e\neq1$ условие резонанса как будто бы не реализуется и точка $v_{e\infty}$, где $n^2\to\infty$, отсутствует. Положение разъясняется, если учесть, что при $\alpha=0$ в системе (1) одно из уравнений отщепляется и приобретает вид $\varepsilon_{zz}E_z=0$.

Если допустить, наряду с поперечными, существование и продольных полей, то нужно дополнить (24) уравнением $v_e=1$ (в отсутствие пространственной дисперсии $\varepsilon_{zz}=1-v_e$). Одновременно на рис. 3.7 должна быть проведена вертикальная линия при $v_e=1$ (отмечена штриховой линией). Положение разъясняется еще в большей степени, если построить дисперсионные зависимости $\tilde{n}^2_{1,2}(v_e)$ при малых, но конечных α. Примеры таких кривых можно найти в [1], где переход к случаю $\alpha=0$ показан достаточно наглядно. Прояснению положения способствует и простое сравнение кривых $\tilde{n}^2(v_e)$ на рис. 3.7 и на рис. 3.5. Сделанные замечания и это сравнение позволяют утверждать, например, что ветвь $\tilde{n}^2_2(v_e)$ на рис. 3.7, *а* состоит из отрезка прямой $\tilde{n}^2_+$ от $v_e=0$ до $v_e=1$. В качестве его продолжения далее следует взять отрезок вертикали от точки пересечения с прямой $\tilde{n}^2_+$ до точки пересечения с прямой $\tilde{n}^2_-(v_e)$. Третья часть дисперсионной «кривой» $\tilde{n}^2$ представляет открытый отрезок прямой $\tilde{n}^2_-$ от последней точки пересечения до $v_e\to\infty$.

Влияние теплового движения электронов. Рассмотрим систему (3.2.5), используя для компонент тензора ε_{ij} формулы (3.1.24). Таким образом, будет исследоваться распространение в бесстолкновительной плазме, когда вектор $\mathbf{k}$ лежит в плоскости yz. Тогда из системы (3.2.5) имеем

$$\begin{gathered}\left(k^2-k_0^2\varepsilon_{xx}\right)E_x-k_0^2\varepsilon_{xy}E_y=0,\\ k_0^2\varepsilon_{xy}E_x+\left(k_z^2-k_0^2\varepsilon_{yy}\right)E_y-\left(k_yk_z+k_0^2\varepsilon_{yz}\right)E_z=0,\\ -\left(k_yk_z+k_0^2\varepsilon_{yz}\right)E_y+\left(k_y^2-k_0^2\varepsilon_{zz}\right)E_z=0.\end{gathered}\tag{3.3.25}$$

Запишем дисперсионное уравнение для этой системы:

$$\begin{gathered}k^2\left(k_y^2\varepsilon_{yy}+k_z^2\varepsilon_{zz}+2k_yk_z\varepsilon_{yz}\right)-\\ -k_0^2\left(-k^2\varepsilon_{yz}^2+k_y^2\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}+k_z^2\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz}+k_y^2\varepsilon_{xy}^2+k^2\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz}+2k_yk_z\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yz}\right)+\\ +k_0^4\left(\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}\varepsilon_{zz}+\varepsilon_{xy}^2\varepsilon_{zz}-\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yz}^2\right)=0.\end{gathered}\tag{3.3.26}$$

Используя старое обозначение для угла между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{H}_0$ и имея в виду, что $k_y=k\sin\alpha$ и $k_z=k\cos\alpha$, получаем

$$\begin{gathered}k^4\left(\varepsilon_{yy}\sin^2\alpha+\varepsilon_{zz}\cos^2\alpha+2\varepsilon_{yz}\sin\alpha\cos\alpha\right)-\\ -k_0^2k^2\left[\left(\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yy}+\varepsilon_{xy}^2\right)\sin^2\alpha+\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz}\cos^2\alpha+\varepsilon_{yz}^2+\right.\\ \left.+\varepsilon_{zz}\varepsilon_{yy}+2\varepsilon_{xx}\varepsilon_{yz}\cos\alpha\sin\alpha\right]=0.\end{gathered}\tag{3.3.26a}$$

Поскольку компоненты тензора ε_{ij} здесь зависят от проекций вектора $\mathbf{k}$, то фактически уравнение (26) не является биквадратным, а имеет более высокий порядок по $\mathbf{k}$. Здесь следует учесть, что тепловые поправки в (1.1.24) пропорциональны малым множителям $\beta_{T_e}^2=v_{T_e}^2/c^2$ и $\beta_{T_i}^2=v_{T_i}^2/c^2$ $\left(\beta_{T_e}^2\ll 1\text{ и }\beta_{T_i}^2\ll 1\right)$. Не учитывая движения ионов и ограничиваясь только членами порядка $\beta_{T_e}^2$, из (26а) получаем [1]

$$\begin{gathered}\beta_{T_e}^2\left(1-u_e\cos^2\alpha\right)\tilde{n}^6+\\ +\left[1-u_e-v_e+u_ev_e\cos^2\alpha+2\beta_{T_e}^2\left(1-v_e-u_e\cos^2\alpha\right)\right]\tilde{n}^4+\\ +\left[2\left(1-v_e^2\right)-u_e\left(2-v_e-v_e\cos^2\alpha\right)+\beta_{T_e}^2\left(1-2v_e+v_e^2-\right.\right.\\ \left.\left.-u_e\cos^2\alpha\right)\right]\tilde{n}^2+\left(1-v_e\right)\left[u_e-\left(1-v_e\right)^2\right]=0.\end{gathered}\tag{3.3.27}$$

Из (27) видно, что свободный член здесь не отличается от выражения, входящего в (6), поэтому учет пространственной дисперсии не будет влиять на положение точек отражения, которые, как и ранее, определяются из условия

$$(1-v_e)[(1-v_e)^2-u_e]=0.$$

При достаточной удаленности от резонанса, определяемого соотношением

$$1-v_e-u_e+u_ev_e\cos^2\alpha=0,\tag{3.3.28}$$

наличие слагаемых с $\beta^2_{T_e}$ в (27) малосущественно при определении $\tilde{n}_1^2$ и $\tilde{n}_2^2$, и можно с хорошей точностью использовать (7). Существенные отличия от приближения холодной плазмы возникают именно вблизи (28). При $\beta^2_{T_e} \neq 0$ значения $\tilde{n}_1^2$ и $\tilde{n}_2^2$ конечны и при $v_e = v_{e\infty}$. Далее нужно говорить о появлении третьей волны с $\tilde{n}^2 = \tilde{n}_3^2$. Правда, если рассматривать поведение $\tilde{n}^2$ при изменении v_e на основе (27), то можно установить, что эта волна лежит на одной дисперсионной кривой с необыкновенной или обыкновенной волной.

В связи с последним утверждением важно то обстоятельство, что учет теплового движения, согласно (27), не приводит к появлению новых точек, где $\tilde{n}^2 = 0$. При этом из (27) следует и невозможность при $\beta^2_{T_e} \neq 0$ ухода $\tilde{n}^2$ при конечных v_e в бесконечность [особый случай $u_e \cos^2\alpha = 1$, когда член с $\tilde{n}^6$ в (27) исчезает, не рассматривается]. В указанных условиях появление новых ветвей $\tilde{n}^2(v_e)$ при учете теплового движения электронов исключается и появление третьей волны должно быть связано с «деформацией» дисперсионных кривых для холодной плазмы, типа изображенных на рис. 3.5.

Приближенным решением (27) является такое, когда пренебрегают всеми слагаемыми, кроме двух первых. Получаемое таким образом значение $\tilde{n}^2 = \tilde{n}_3^2$ мы и будем относить к плазменной волне. Для этой волны из (27)

$$\tilde{n}_3^2 = \frac{1 - u_e - v_e + u_e v_e \cos^2\alpha}{\left(1 - u_e \cos^2\alpha\right)\beta^2_{T_e}}. \tag{3.3.29}$$

При этом n_3^2 должны по абсолютному значению существенно превосходить значения n_1^2 и n_2^2. Поэтому о плазменных волнах можно говорить как о медленных, когда $|\tilde{n}_3^2| \gg 1$. Непосредственно при условии (28) $\tilde{n}_3^2 = 0$, что в данном случае говорит о неприменимости здесь формулы (29). С другой стороны, при $|1 - u_e - v_e + u_e v_e \cos^2\alpha| \sim 1$ $n_3^2 \sim \beta^2_{T_e}$. Тогда $v_\Phi^2 \propto v_{T_e}^2$ и распространение волн типа (29) становится невозможным из-за эффектов, для рассмотрения которых необходима кинетическая теория (гл. 4). В изотропном случае ($u_e = 0$) получаем для n_3^2 формулу $n_3^2 = (1 - v_e)/\beta^2_{T_e}$, которая является в рамках квазигидродинамического подхода строгим соотношением.

Если исключить выделенный случай продольного распространения ($\alpha = 0$), то, как указывалось, зависимость $n_3^2(v_e)$ не отображается в отдельную дисперсионную кривую. По приведенным ранее аргументам в области вблизи резонанса при изменении v_e должен происходить непрерывный переход $\tilde{n}_1^2$ или $\tilde{n}_2^2$ в $\tilde{n}_3^2$ (29). При строгом равенстве (28) $\tilde{n}^2$ для двух корней (27) не описывается ни формулами для холодной плазмы, ни соотношением

(29). Соответствующие дисперсионные кривые можно найти в [1]. Отметим только еще, что при $u_e < 1$ в окрестности $v_e = v_{e\infty}$ происходит переход необыкновенной волны в плазменную, а при $u_e > 1$ — обыкновенной.

При $\alpha = 0$ волна (29) строго отщепляется. Из (29) или непосредственно из (27) имеем соотношение $\tilde{n}_3^2 = (1 - v_e)/\beta_{Te}^2$, совпадающее с полученным в изотропном случае. Этот случай строгого отщепления продольных плазменных волн является единственно возможным в магнитоактивной плазме. При этом другие волны с $\tilde{n}^2 = \tilde{n}_\pm^2$ являются поперечными. При продольном распространении электроны в плазменной волне движутся по направлению поля $\mathbf{H}_0$ и оно не может влиять на их движение. Иллюстрация элементарных зависимостей $\tilde{n}^2(v_e)$ для всех трех волн в случае $\alpha = 0$ дана на рис. 3.8. При любом v_e имеем три нормальных волны (разумеется, некоторые из них попадают в область непрозрачности $\tilde{n}^2 < 0$). Здесь точка отражения $v_e = 1$ оказалась отнесенной к плазменной волне. На эту особенность случая, когда $\alpha = 0$, мы уже указывали при рассмотрении дисперсионных зависимостей, представленных на рис. 3.8. Вместо штриховой вертикальной прямой $v_e = 1$ (рис. 3.8) имеется прямая $\tilde{n}^2(v_e)$, которая при $\beta_{Te}^2 \ll 1$ слабо отклонена от вертикали.

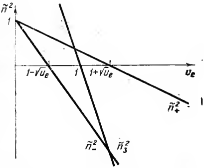

Рис. 3.8. Функция $\tilde{n}_\pm^2(v_e)$ при продольном распространении. Прямая, проходящая через точку $v_e = 1$, представляет плазменную волну.

3.4. Квазипоперечное и квазипродольное распространение. Свистовое приближение

Использование выражений (3.3.7) затруднено из-за их громоздкости. Поэтому представляется важным (в частности, для применений к приземной и космической плазме) получение хотя и приближенных, но более простых соотношений. Такая возможность открывается в связи с использованием квазипоперечного и квазипродольного приближений.

Сначала запишем соотношение (3.3.7) в измененном виде. Умножая в правой части (3.3.7) числитель и знаменатель на величину

$$2(1 - v_e - u_e \sin^2\alpha) \mp \left[u_e^2 \sin^4\alpha + 4u_e(1 - v_e)^2 \cos^2\alpha\right]^{1/2},$$

приходим к часто используемой формуле

$$\widetilde{n}_{1,2}^2 = 1 - \frac{2v_e(1-v_e)}{2(1-v_e) - u_e \sin^2\alpha \mp \left[u_e^2 \sin^4\alpha + 4u_e(1-v_e)^2 \cos^2\alpha\right]^{1/2}}. \tag{3.4.1}$$

Квазипоперечное распространение. Пусть $u_e^2 \sin^4\alpha \gg \gg 4u_e(1-v_e)^2 \cos^2\alpha$, тогда

$$\widetilde{n}_1^2 = 1 - \frac{v_e(1-v_e)}{1 - v_e - u_e \sin^2\alpha}, \quad \widetilde{n}_2^2 = 1 - v_e. \tag{3.4.2}$$

Для того чтобы использовать здесь формулу для $\widetilde{n}_2^2$, необходимо еще выполнение дополнительного требования $\mathrm{tg}^2\alpha \gg |1 - v_e|$. Выражение для $\widetilde{n}_2^2$ совпадает с формулой для изотропного случая (а также и с формулой для $\widetilde{n}_2^2$ при $\alpha = \pi/2$). Из соотношения для $\widetilde{n}_1^2$ при $\alpha = \pi/2$ приходим к (3.3.21).

Квазипродольное распространение. Пусть справедливо неравенство

$$(1 - v_e)^2 \gg u_e \sin^4\alpha / 4\cos^2\alpha. \tag{3.4.3}$$

Тогда в (1) пренебрежем первым слагаемым в квадратных скобках. В результате имеем из (3)

$$n_\pm^2 \approx 1 - \frac{2v_e(1-v_e)}{2(1-v_e)\left(1 \pm \sqrt{u_e}\cos\alpha\right) - u_e \sin^2\alpha}. \tag{3.4.4}$$

Полагая теперь, что справедливо неравенство

$$\left|1 \mp \sqrt{u_e}\cos\alpha\right| \gg \left|u_e \sin^2\alpha / 2(1 - v_e)\right|, \tag{3.4.5}$$

получаем

$$n_\pm^2 = 1 - \left(1 \pm \sqrt{u_e}\cos\alpha\right)^{-1} v_e. \tag{3.4.6}$$

Этот случай называют квазипродольным, поскольку выполнение условий (3), (5) облегчается при малых α, а при $\alpha = 0$ естественно имеет место переход к соотношению (3.3.24). Далее специально будет выделен один из важных случаев, когда используются формулы (6) для квазипродольного распространения.

Свистовое приближение [1, 12]. Рассмотрим распространение в плазме электромагнитных волн относительно низкой частоты. В условиях ионосферной и магнитосферной плазмы, а также в лабораторных условиях концентрация электронов достаточно велика, так что хорошо выполняется неравенство

$$v_e \gg 1. \tag{3.4.7}$$

Тогда условие применимости квазипродольного распространения приобретает вид

$$v_e^2 / u_e \gg \sin^4\alpha / \cos^2\alpha. \tag{3.4.7a}$$

Если $\sin\alpha \sim 1$ и $\cos\alpha \sim 1$, то последнее неравенство сводится к условию $v_e^2 \gg u_e$. Ограничение (7а) нарушается при углах α, достаточно близких к $\pi/2$. Однако в реальных условиях интервал углов, где происходит нарушение, часто оказывается очень узким ($\cos^2\alpha \ll 1$). Заметим, что при $v_e \gg 1$ ограничение (5) принимает вид

$$|1 \mp \sqrt{u_e}\cos\alpha| \gg u_e \sin^2\alpha / v_e.$$

Исключая случай, когда $u_e\cos^2\alpha \approx 1$, $\omega_H\cos\alpha \approx \omega$, и считая, что $\sqrt{u_e}\cos\alpha > 1$, мы убеждаемся в аналогичности этого условия с требованием (7а).

При ограничениях (7), (7а) в (6) можно пренебречь справа единицей. Это означает, что рассматриваются медленные волны (при наличии прозрачности $n^2 \gg 1$). Распространение волны с $\tilde{n}^2 = \tilde{n}_+^2$ невозможно, так как здесь $\tilde{n}_+^2 < 0$. Для другой волны из (6) получаем

$$\tilde{n}_2^2 = v_e / (\sqrt{u_e}\cos\alpha - 1). \qquad (3.4.8)$$

Замена $\tilde{n}_-^2$ на $\tilde{n}_2^2$ при переходе к (8) обусловлена неравенством (7) $\left(\tilde{n}_2^2 = \tilde{n}_-^2 \text{ при } v_e > 1 \text{ и } \tilde{n}_2^2 = \tilde{n}_+^2 \text{ при } v_e < 1\right)$. Приближение, которое приводит к формуле (8), называют *свистовым*, а саму волну, распространение которой возможно при $\sqrt{u_e}\cos\alpha > 1$, свистовой. Такое название обусловлено наличием хорошо доказанной связи между соотношением (10) и распространением в ионосфере и магнитосфере генерируемых молниевыми разрядами специфических низкочастотных радиосигналов — свистящих атмосфериков (свистов) [12, 13] *). О возбуждении и распространении этих атмосфериков речь пойдет далее в гл. 8.

При условии

$$\sqrt{u_e}\cos\alpha \gg 1, \qquad (3.4.9)$$

означающем при $\cos\alpha \sim 1$, что гирочастота электронов много больше частоты волны ω, из (8) имеем

$$n_2^2 = \frac{v_e}{\sqrt{u_e}\cos\alpha} = \frac{\omega_{e0}^2}{\omega\omega_H\cos\alpha}. \qquad (3.4.10)$$

Это соотношение в литературе по свистящим атмосферикам называют формулой Стори [12, 13].

На примере свистовых волн хорошо иллюстрируется утверждение, согласно которому в области низких частот внешнее магнитное поле $\mathbf{H}_0$ как бы увеличивает прозрачность плазмы. Если при $\mathbf{H}_0 = 0$ и $v_e \gg 1$ $(\omega_e^2 \gg \omega^2)$ $\tilde{n}_2^2 = -v_e$ и прохождение электромагнитных волн невозможно, то при $\sqrt{u_e}\cos\alpha > 1$ здесь возмож-

*) Имеется еще другое название этих волн — спиральные (геликоидальные) волны. Оно утвердилось после открытия возможности возбуждения свистовых волн в металлах.

но распространение волн обыкновенного типа (для волн с $\tilde{n}^2 = \tilde{n}_1^2$ непрозрачность остается). В частности, при условии (9) мы, согласно (7а), (10), еще раз убеждаемся в том, что $n_2^2 \gg 1$, т. е. свистовые являются медленными волнами ($v_ф \ll c$).

Отметим один существенный результат, касающийся ориентации групповой скорости $\mathbf{v}_{гр}$ и вытекающей из (10). Считая, что поле $\mathbf{H}_0$ направлено по оси z, а волновой вектор $\mathbf{k}$ лежит в плоскости zy $\left(\cos\alpha = k_z/k = k_z\Big/\sqrt{k_z^2 + k_y^2}\right)$, мы можем переписать формулу (10) в виде уравнения

$$F(\omega, k_y, k_z) = \sqrt{k_z^2 + k_y^2}\, k_z - \omega\omega_{e0}^2/c^2\omega_H = 0. \qquad (3.4.11)$$

Для определения проекций $\mathbf{v}_{гр}$ можно либо использовать формулу (3.2.20), либо написать (11) в форме $\omega = \omega(k_y, k_z)$ и провести дифференцирование по k_y, k_z. В итоге

$$\left.\begin{aligned} v_{гр y} &= \frac{\partial\omega}{\partial k_y} = \frac{c}{n_2}\sin\alpha, \\ v_{гр z} &= \frac{\partial\omega}{\partial k_z} = \frac{c}{n_2}\left(\cos\alpha + (\cos\alpha)^{-1}\right), \end{aligned}\right\} \qquad (3.4.12)$$

откуда

$$v_{гр} = \frac{c}{n_2}\sqrt{4 + \operatorname{tg}^2\alpha} = v_ф\sqrt{4 + \operatorname{tg}^2\alpha}. \qquad (3.4.13)$$

В связи с (13) можно отметить, что при ограничении (9) для свистовых волн $v_{гр} > 2v_ф$. При этом, если $\alpha = 0$, $v_{гр} = 2v_ф$. Этот результат является следствием закона дисперсии для свистов в области применимости (10), когда для продольного распространения $\omega = c^2\omega_H k^2/\omega_{e0}^2$.

Ориентация групповой скорости определяется углом Φ между $\mathbf{v}_{гр}$ и $\mathbf{H}_0$:

$$\operatorname{tg}\Phi = v_{гр y}/v_{гр z} = \sin\alpha\cos\alpha/(1 + \cos^2\alpha). \qquad (3.4.14)$$

Полагая, как это неявно принималось при использовании формул квазипродольного приближения, что $0 < \alpha < \pi/2$ ($\cos\alpha > 0$ и $\sin\alpha > 0$), найдем экстремальное (наибольшее) значение угла Φ при изменении угла α. Из требования $d\Phi/d\alpha = 0$ приходим, используя (14), к несложному тригонометрическому уравнению для $\alpha = \alpha_М$, из которого следует, что $\cos^2\alpha_М = 1/3$ ($\alpha_М = 54°44'$). Подставляя значение $\alpha = \alpha_М$ в (14), находим, что максимальное значение угла $\Phi = \Phi_М = 19°28'$. Таким образом, возможные направления групповой скорости в какой-то точке ограничены конусом с вершиной в точке, ориентированной по полю $\mathbf{H}_0$ осью и с углом при вершине в продольном сечении, который равен $38°58'$. Можно говорить далее в однородной плазме о направляющем воздействии магнитного поля $\mathbf{H}_0$ на распространение свистовых волновых пакетов. При этом усредненный поток энергии для этих сигналов не может отклоняться от силовых линий поля $\mathbf{H}_0$ более чем на $19°29'$.

3.5. Низкочастотные волны (учет движения ионов)

Понятие низкочастотных волн в магнитоактивной плазме не имеет совершенно однозначного определения. Но если плазма находится в достаточно сильном магнитном поле $\mathbf{H}_0$, то общепринятым будет ограничение

$$\omega \ll \omega_H. \tag{3.5.1}$$

Мы будем далее, как это часто делается, называть низкочастотными волнами, свойства которых существенным образом зависят от наличия в плазме ионной компоненты. При таком определении условие (1) может быть усилено и представлено в виде $\omega \ll \sqrt{\omega_H \Omega_H}$ или даже $\omega \ll \Omega_H$.

В низкочастотной области для плазмы с высокими концентрациями часто выполняется неравенство

$$\omega \ll \omega_{i0}. \tag{3.5.1a}$$

Рассмотрение проведем в системе координат, в которой $\mathbf{H}_0$ направлено вдоль оси z, а вектор $\mathbf{k}$ расположен так, что составляет угол α с осью z. Компоненты тензора диэлектрической проницаемости в этом случае для холодной плазмы определяются (3.1.22). В качестве исходной возьмем систему уравнений (3.3.25) и дисперсионное уравнение (3.3.26а) ($\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = 0$). Тогда для квадратов показателя преломления нормальных волн получаем [3]

$$\tilde{n}_{1,2} = \frac{\left(\varepsilon_{xx}^2 - |\varepsilon_{xy}|^2 - \varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz}\right)\sin^2\alpha + 2\varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz}}{2\left(\varepsilon_{xx}\sin^2\alpha + \varepsilon_{zz}\cos^2\alpha\right)} \pm$$
$$\pm \frac{\left[\left(\varepsilon_{xx}^2 - |\varepsilon_{xy}|^2 - \varepsilon_{xx}\varepsilon_{zz}\right)^2\sin^4\alpha + 4\varepsilon_{zz}^2|\varepsilon_{xy}|^2\cos^2\alpha\right]^{1/2}}{2\left(\varepsilon_{xx}\sin^2\alpha + \varepsilon_{zz}\cos^2\alpha\right)}. \tag{3.5.2}$$

В отсутствие столкновений компоненты тензора диэлектрической проницаемости при учете (1), (1а) запишутся в виде

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \varepsilon_{yy} \approx 1 + \frac{\omega_{e0}^2}{\omega_H^2} - \frac{\omega_{i0}^2}{\omega^2 - \Omega_H^2} = \varepsilon_1, \\ \varepsilon_{xy} &= -\varepsilon_{yx} \approx -\frac{i\omega\omega_{i0}^2}{\Omega_H\left(\omega^2 - \Omega_H^2\right)} = i\varepsilon_2, \\ \varepsilon_{zz} &\approx -\omega_{e0}^2/\omega^2. \end{aligned} \tag{3.5.3}$$

Соотношения (2) при использовании (3) и учете (1), (1а) могут быть существенно упрощены. Следует учесть, что на низких частотах $|\varepsilon_3| \gg |\varepsilon_1|$, $|\varepsilon_3| \gg |\varepsilon_2|$. Если не рассматривать углы, очень близкие к $\alpha = \pi/2$, ограничиваясь неравенствами

$$\operatorname{tg}^2\alpha \ll \frac{|\varepsilon_3|}{|\varepsilon_1|} \quad \text{и} \quad \sin^2\alpha \ll \left|\frac{\varepsilon_1\varepsilon_3}{\varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2}\right|,$$

то в соответствии с [14] из (2) получаем

$$n_{1,2}^2 = \frac{\varepsilon_1 (1+\cos^2\alpha) \pm (\varepsilon_1^2 \sin^4\alpha + 4\varepsilon_2 \cos^2\alpha)^{1/2}}{2\cos^2\alpha}. \qquad (3.5.4)$$

Для очень низких частот

$$\omega \ll \Omega_H. \qquad (3.5.5)$$

При учете очевидных равенства $\omega_{e0}^2/\omega_H = \omega_{i0}^2/\Omega_H$ и неравенства $\omega_H \gg \Omega_H$ из (3) находим, что

$$\varepsilon_1 \approx \omega_{i0}^2/\Omega_H^2, \quad \varepsilon_2 \approx \omega\omega_{i0}^2/\Omega_H^3.$$

С учетом этих выражений в области частот (5) имеем

$$n_1^2 = \varepsilon_1 = \frac{\omega_{i0}^2}{\Omega_H^2} = \frac{c^2}{v_A^2}, \quad n_2^2 = \frac{\varepsilon_1}{\cos^2\alpha} = \frac{c^2}{v_A^2 \cos^2\alpha}, \qquad (3.5.6)$$

где $v_A = c\Omega_H/\omega_{i0} = H_0/\sqrt{4\pi M N_i}$ — *альвеновская скорость.* Эти соотношения предполагают, что $n^2 \gg 1$ $(v_A^2 \ll c^2)$. Волну $n^2 = n_1^2$ называют *быстрой магнитозвуковой* и волну с $n^2 = n_2^2$ — *альвеновской.* Анизотропный характер имеет только распространение альвеновской волны. Из (6) для фазовых скоростей имеем

$$v_{\text{ф}1} = \omega/k = v_A, \quad v_{\text{ф}2} = \omega/k = v_A \cos\alpha. \qquad (3.5.7)$$

Последнюю формулу можно записать в виде $\omega = k_z v_A$.

Нахождение групповой скорости $\mathbf{v}_{\text{гр}} = \partial\omega/\partial\mathbf{k}$ на основе (7) элементарно. Получаем для быстрой магнитоактивной волны соотношение $\mathbf{v}_{\text{гр}1} = v_A \mathbf{k}/k$ с направленностью по $\mathbf{k}$, характерной для изотропных сред. Для альвеновской волны $\mathbf{v}_{\text{гр}2} = v_A \mathbf{H}_0/H_0 = v_A \mathbf{h}_0$ при любой ориентации вектора $\mathbf{k}$.

Рассмотрим область частот $\omega \sim \Omega_H$, когда ограничение (5) уже нарушается. Имея в виду, что в этих условиях в соответствии с (3) $|\varepsilon_1| \approx \omega_{i0}^2/|\omega^2 - \Omega_H^2|$ и $|\varepsilon_1| \sim |\varepsilon_2|$, из соотношений (4) приходим к следующему результату:

$$n_2^2 = \frac{c^2}{v_A^2} \frac{1+\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha} \frac{\omega\Omega_H}{\Omega_H^2 - \omega^2}. \qquad (3.5.8)$$

Из (8) видно, что при $\omega = \Omega_H$ имеется резонанс (корень $n^2 = n_1^2$ при этом остается конечной величиной). В области частот $\omega \sim \Omega_H$ волну (8) называют уже не альвеновской, а *ионно-циклотронной волной.*

И, наконец, при $\omega \gg \Omega_H$ получаем из (4) выражение $n_2^2 = \frac{\omega_{i0}^2}{\omega\Omega_H \cos\alpha} = \frac{\omega_{e0}^2}{\omega\omega_H \cos\alpha}$, которое совпадает с (3.4.12) и описывает распространение свистовой волны. Для другой волны при учете всех ограничений (1) плазма непрозрачна.

Рис. 3.9 иллюстрирует поведение дисперсионных кривых $\tilde{n}^2(\omega)$ в отсутствие пространственной дисперсии [14]. Предполагается, что распространение не является ни продольным ($\alpha = 0$), ни поперечным ($\alpha = \pi/2$). Представлены и низкочастотные ветви. Часть кривой, отвечающей альвеновской волне, снабжена знаком A, быстрой магнитозвуковой — БМЗ. С ростом частоты ω альвеновские волны переходят в ионно-циклотронные (ИЦ). Для обыкновенной и необыкновенной волн используются индексы о и н. Эти наименования используются здесь для волн с достаточно высокими частотами.

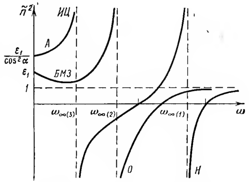

Рис. 3.9. Функция $\tilde{n}^2(\omega)$ для магнитоактивной плазмы.

На рис. 3.9 представлены частоты $\omega_{\infty 1,2,3}$, на которых $\tilde{n}^2 \to \infty$. Значения этих резонансных частот можно найти из равенства

$$\varepsilon_{xx} \sin^2 \alpha + \varepsilon_{zz} \cos^2 \alpha = 0. \tag{3.5.9}$$

Подставляя в (9) выражения для ε_{xx}, ε_{zz} из (3.1.24), при $v_{T_e} = v_{T_i} = 0$ приходим к уравнению

$$\omega_\infty^6 - \omega_\infty^4 \left(\omega_H^2 + \omega_{e0}^2\right) + \omega_\infty^2 \left[\omega_H^2 \Omega_H^2 + \omega_{e0}^2 \omega_H^2 \cos^2 \alpha + \right.$$
$$\left. + \omega_{i0}^2 \omega_H^2 \sin^2 \alpha\right] - \omega_H^2 \Omega_H^2 \omega_{e0}^2 = 0. \tag{3.5.10}$$

Если в (10) пренебречь влиянием движения ионов и положить $\omega_{i0} = 0$, $\Omega_H = 0$, то ω_∞ определяются выражениями (3.3.4) ($\omega_{\infty 3} = 0$). При учете движения ионов, если углы α не близки к $\pi/2$, для $\omega_{\infty 1,2}$ сохраняются соотношения (3.3.9), а если $\omega_{\infty 3}$ имеем [10, 14]

$$\omega_{\infty 3}^2 \approx \Omega_H^2 \left(1 - mM^{-1} \operatorname{tg}^2 \alpha\right). \tag{3.5.10а}$$

Для углов α, близких к $\pi/2$ ($\cos^2 \alpha \ll m/M$), для $\omega_{\infty 1}^2$ остается справедливым соответствующая формула (3.3.9), а для $\omega_{\infty 2,3}^2$ из (10) имеем [10]

$$\omega_{\infty 2}^2 = \frac{\omega_{i0}^2 + \Omega_H^2}{1 + \omega_{e0}^2/\omega_H^2}, \quad \omega_{\infty 3}^2 = \frac{\omega_{e0}^2 \Omega_H^2 \cos^2 \alpha}{\omega_{e0}^2 + \omega_H^2}. \tag{3.5.10б}$$

Частоту $\omega_{\infty 2}$ называют нижней гибридной. Вероятно, наиболее часто для нее используется соотношение при $\omega_{e0}^2 \gg \omega_H^2$. Тогда с большой точностью $\omega_{i0}^2 \gg \Omega_H^2$, и мы из (10б) имеем $\omega_{\infty 2}^2 \approx mM^{-1}\Omega_H^2$,

так что $\omega_{\infty 2} = \sqrt{\omega_H \Omega_H}$. В качественной форме полученная на основе (10) зависимость $\omega_\infty^2(\alpha)$ для разных ветвей при $\omega_{e0}^2 \gg \omega_H^2$ приведена на рис. 3.10.

Учет пространственной дисперсии без труда может быть проведен, если в дисперсионное уравнение (3.3.27) подставить выражения для компонент тензора диэлектрической проницаемости (3.1.24). В этом случае значения $\tilde{n}^2$ на дисперсионных кривых $\tilde{n}^2(\omega)$ при $\omega = \omega_\infty$ остаются конечными, и появляются участки, соответствующие новым видам волн. В частности, существенно появление такого типа волн, как медленные магнитозвуковые волны. Мы рассмотрим эти волны, используя уравнения магнитной гидродинамики. В областях частот, удаленных от резонансных ω_∞, кривые $\tilde{n}^2(\omega)$ для холодной плазмы, представленные на рис. 3.9, деформируются слабо.

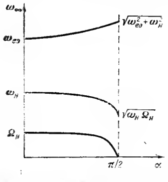

Рис. 3.10. Зависимость резонансных частот ω_∞ от угла α в электронно-ионной плазме.

Магнитогидродинамическое рассмотрение. Дополним анализ распространения низкочастотных волн в магнитоактивной плазме применением магнитогидродинамического подхода, в рамках которого плазма рассматривается как хорошо проводящая среда. Переход к уравнениям магнитной гидродинамики для слабоионизированной плазмы был проведен в п. 2.3. Здесь мы используем некоторые выводы из этого параграфа при анализе распространения магнитогидродинамических волн. Если столкновения не учитываются, то такой подход требует обоснования и может быть оправдан только как приближенный. Это нужно иметь в виду при применении магнитной гидродинамики к сильноионизированной плазме, где обычное магнитогидродинамическое приближение используется как модельное и огрубленное. Одним из ряда пунктов, требующих здесь осторожного подхода, является скалярное представление тензора давления (п. 2.3).

Выпишем вновь основное уравнение (2.3.85), определяющее поведение магнитного поля $\mathbf{H}$ в среде с проводимостью σ:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \operatorname{rot}[\mathbf{uH}] = \frac{c^2}{4\pi\sigma}\nabla^2\mathbf{H} = \nu_m \nabla^2 \mathbf{H}. \qquad (3.5.11)$$

При $\mathrm{Re}_m \gg 1$, где Re_m — магнитное число Рейнольдса (2.3.86), слагаемое в правой части (11) можно опустить, так что

$$\partial \mathbf{H}/\partial t = \operatorname{rot}[\mathbf{uH}]. \qquad (3.5.12)$$

В обратном случае $\mathrm{Re}_m \ll 1$ уравнение (11) имеет вид уравнения диффузии, скорость которой определяется магнитной вязкостью ν_m. Здесь движение вещества на магнитное поле влияния не оказывает. Для нас более важен случай применимости (12).

Уравнение (12) можно рассматривать как утверждение о вмороженности поля $\mathbf{H}$ в проводящую среду. В пределе $\mathrm{Re}_m \to \infty$ отсутствует проскальзывание силовых линий $\mathbf{H}$ относительно вещества [15, 16]. Докажем это утверждение на примере простого частного случая, когда при ориентации поля $\mathbf{H}$ по оси z имеется движение плазмы по оси y [17]. При этом H_z и u_y от координаты x не зависят. Тогда из (12) имеем

$$\frac{\partial H_z}{\partial t} - H_z \frac{\partial u_y}{\partial y} - u_y \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0. \tag{3.5.13}$$

Воспользуемся уравнением непрерывности (2.3.71) и учтем, что в рассматриваемом случае $\operatorname{div} \mathbf{u} = -(1/\rho)(\partial\rho/\partial t + \mathbf{u}\nabla\rho) = \partial u_y/\partial y$. Заменяя $\partial u_y/\partial y$ в (13), получаем

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u}\nabla\right) \ln \frac{H_z}{\rho} \equiv \frac{d}{dt} \ln \frac{H_z}{\rho} = 0. \tag{3.5.14}$$

Этот результат означает, что в системе отсчета, движущейся вместе со средой,

$$H_z/\rho = \mathrm{const}. \tag{3.5.15}$$

Рассмотрим цилиндр единичной длины, ориентированной вдоль $\mathbf{H}$ и имеющий основание dS. Умножая на dS числитель и знаменатель (15), получаем

$$d\Phi_{\text{м}}/dM_{\text{ц}} = \mathrm{const}, \tag{3.5.16}$$

где $d\Phi_{\text{м}}$ — поток магнитного поля через площадь dS, $dM_{\text{ц}}$ — масса жидкости, содержащаяся внутри цилиндра. Соотношение (16) и говорит о вмороженности (приклеенности) силовых линий $\mathbf{H}$ к среде.

Рассмотрим распространение волн на основе уравнений магнитной гидродинамики. Кроме (12) в исходную систему будут входить уравнения

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \tag{3.5.17}$$

$$\rho d\mathbf{u}/dt = -\nabla p - (4\pi)^{-1}[\mathbf{H} \operatorname{rot} \mathbf{H}], \tag{3.5.18}$$

$$\partial\rho/\partial t + \operatorname{div}(\rho\mathbf{u}) = 0, \tag{3.5.19}$$

которые выписаны для идеально проводящей невязкой среды. В уравнении движения (18) учтены только давление и пондермоторная сила $c^{-1}[\mathbf{jH}]$. При написании (18) используется уравнение $\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}$, справедливое при пренебрежении током смещения, что в низкочастотном случае обычно обоснованно. Электрическое поле $\mathbf{E}$ можно найти из соотношения (2.3.87).

По аналогии с (3.1.4)

$$\nabla p = \gamma \varkappa T M^{-1} \nabla\rho = c_s^2 \nabla\rho, \tag{3.5.20}$$

где M — масса, приходящаяся на одну частицу (в сильноионизированной плазме $M \approx M_i$), и c_s — скорость звука. Коэффициент γ

характеризует вклад теплообмена в распространение волн ($\gamma = 1$ соответствует изотермическим процессам и т. д.).

Линеаризуя уравнение (12), (17)—(19), полагаем, что $\mathbf{u}_0 = 0$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \mathbf{H}'$, $\rho = \rho_0 + \rho'$, $p = p_0 + p'$, где все штрихованные величины по абсолютному значению малы по сравнению с равновесными. В результате для возмущений получаем систему уравнений

$$\partial \mathbf{H}'/\partial t = \mathrm{rot}\,[\mathbf{u}\mathbf{H}_0], \quad \mathrm{div}\,\mathbf{H}' = 0,$$
$$\partial \rho'/\partial t + \rho_0\,\mathrm{div}\,\mathbf{u} = 0, \tag{3.5.21}$$
$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = -\frac{c_s^2}{\rho_0}\nabla\rho' - \frac{1}{4\pi\rho_0}[\mathbf{H}_0\,\mathrm{rot}\,\mathbf{H}'].$$

Рассматривая в однородной среде распространение плоских волн по оси z (все переменные величины изменяются по закону $\exp(i\omega t - ikz)$) и считая, что магнитное поле $\mathbf{H}_0$ лежит в плоскости yz, из (21) имеем

$$v_\Phi H_x' = -u_x H_{0z}, \quad v_\Phi u_x = -\frac{H_{0z}}{4\pi\rho_0}H_x',$$
$$v_\Phi H_y' = -u_y H_{0z} + u_z H_{0y}, \quad v_\Phi u_y = -\frac{H_{0z}}{4\pi\rho_0}H_y'; \tag{3.5.22}$$

$$\left(v_\Phi^2 - c_s^2\right)u_z = \frac{v_\Phi H_{0y}}{4\pi\rho_0}H_y', \quad \rho' = \rho_0\frac{u_z}{v_\Phi}. \tag{3.5.23}$$

Из (22), (23) видно, что имеются два типа решений с отличающимися поляризациями. Так, можно принять $H_x' \neq 0$, $u_x \neq 0$, считая, что все другие переменные величины в (22) обращаются в нуль. Другим решением является такое, что u_y, u_z, H_y' и ρ' отличны от нуля, а $u_x = H_x' = 0$.

Из (22) вытекает, что распространение волн с $u_x \neq 0$, $H_x' \neq 0$ возможно, когда

$$v_{\Phi 2} = H_0 \cos\alpha/\sqrt{4\pi\rho_0}. \tag{3.5.24}$$

Из (24) $n_2^2 = c^2/v_A^2\cos^2\alpha$, что совпадает с формулами (6), (7) для альвеновской волны [поэтому в (24) и поставлен индекс 2].

Условие существования ненулевых решений подсистемы уравнений (23) сводится к следующему уравнению для v_Φ^2:

$$v_\Phi^4 - v_\Phi^2\left(c_s^2 + v_A^2\right) + c_s^2 v_A^2\cos^2\alpha = 0, \tag{3.5.25}$$

откуда

$$v_{\Phi 1,3}^2 = \frac{1}{2}\left[\left(c_s^2 + v_A^2 + 2c_s v_A\cos\alpha\right)^{1/2} \pm \right.$$
$$\left. \pm\left(c_s^2 + v_A^2 - 2c_s v_A\cos\alpha\right)^{1/2}\right]. \tag{3.5.25a}$$

Как и ранее (при использовании соотношений квазипродольного приближения), считаем, что $\cos\alpha > 0$. Корень $v_\Phi = v_{\Phi 1}$ со знаком

плюс соответствует быстрой магнитозвуковой волне, а корень со знаком минус — медленной магнитозвуковой волне.

При $c_s \to 0$ (холодная плазма) $v_{\Phi 1} = v_A$ и $v_{\Phi 3} = 0$, т. е. можно говорить только об одной магнитозвуковой волне. При $\alpha = 0$ $v_{\Phi 1} = v_A$ и $v_{\Phi 3} = c_s$. Если же $\alpha = \pi/2$, то остается лишь волна с $v_\Phi = v_{\Phi 1} = (v_A^2 + c_s^2)^{1/2}$ $(v_{\Phi 3} = 0)$.

При условии

$$v_A^2 \gg c_s^2 \tag{3.5.26}$$

из (25а)

$$v_{\Phi 1}^2 \approx v_A^2, \quad v_{\Phi 3}^3 \approx c_s^2 \cos^2 \alpha.$$

Если же

$$v_A^2 \ll c_s^2, \tag{3.5.27}$$

то

$$v_{\Phi 1}^2 \approx c_s^2, \quad v_{\Phi 3}^2 \approx v_A^2 \cos^2 \alpha.$$

Таким образом, волна типа 1 может в зависимости от условий (26), (27) иметь совершенно разные скорости распространения. То же самое относится и к волне типа 3. Параметр, равный c_s^2/v_A^2, хорошо известен в физике плазмы. Точнее, чаще используется обозначаемое β отношение давления плазмы p_p к магнитному давлению $H_0^2/8\pi$ $(\beta = 8\pi p_p/H_0^2)$; $\beta = c_s^2/v_A^2$ при $\gamma = 1$.

В заключение заметим, что в альвеновских волнах (24) скорости движения плазмы ортогональны как направлению распространения, так и магнитному полю $\mathbf{H}_0$. Для волн с $v_\Phi^2 = v_{\Phi 1,3}^2$ движение плазмы происходит в плоскости, образованной векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{H}_0$.

3.6. О нелинейных продольных волнах в плазме

До сих пор анализ распространения волн в плазме на основе квазигидродинамических уравнений проводился при их линеаризации. Учет нелинейных членов в этих уравнениях будет приводить не только к «искажению» полученных решений, но и к появлению принципиально новых особенностей. Обратимся к их краткой иллюстрации на примере однородной двухкомпонентной плазмы при $\mathbf{H}_0 = 0$. Будем пренебрегать тепловым движением ионов $(T_i = 0)$, полагая одновременно $T_e \neq 0$. Рассмотрение проведем для продольных волн, когда магнитное поле в волнах отсутствует (п. 3.2). Для потенциала φ электрического поля $\mathbf{E}$ имеем уравнение

$$\partial^2\varphi/\partial z^2 = 4\pi e(N_i - N_e), \tag{3.6.1}$$

выписанное для одномерного распространения, когда все переменные величины зависят только от координаты z $(E_{x,y} = 0,\ E_z = -\partial\varphi/\partial z)$. В отсутствие волнового возмущения направленного движения электронов и ионов нет и $\mathbf{E}_0 = 0$.

Полагая, как и ранее, что $\nabla p_e = \gamma_e \varkappa T_e \nabla N_e$, воспользуемся квазигидродинамическими уравнениями для бесстолкновительной плазмы. С учетом сделанных замечаний имеем систему уравнений

$$\frac{\partial N_e}{\partial t} + \frac{\partial (N_e u_e)}{\partial z} = 0, \tag{3.6.2}$$

$$\frac{\partial u_e}{\partial t} + u_e \frac{\partial u_e}{\partial z} = \frac{e}{m} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\gamma_e \varkappa T_e}{m N_e} \frac{\partial N_e}{\partial z}, \tag{3.6.3}$$

$$\frac{\partial N_i}{\partial t} + \frac{\partial (N_i u_i)}{\partial z} = 0, \tag{3.6.4}$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_i \frac{\partial u_i}{\partial z} = -\frac{e}{M} \frac{\partial \varphi}{\partial z}, \tag{3.6.5}$$

где u_e и u_i — значения продольных компонент скоростей.

Считаем выполненными неравенства

$$v_{T_e}^2 = \varkappa T_e/m \gg u_e^2, \quad e\varphi \gg m u_e^2,$$

означающие, что часть кинетической энергии электронов, связанная с направленным их движением, мала по сравнению с энергией их теплового движения (внутренней энергией) и энергией частиц в поле волны. Тогда уравнение (3) можно упростить и написать в виде

$$\frac{e}{\gamma_e \varkappa T_e} \frac{\partial \varphi}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \ln N_e = 0.$$

Интегрируя, имеем

$$N_e = N_{e0} \exp (e\varphi/\gamma_e \varkappa T_e), \tag{3.6.6}$$

где N_{e0} — концентрация электронов при $\varphi = 0$. Таким образом, при пренебрежении инерционными эффектами получается квазиравновесное распределение (6). При этом изменение φ в волне сопровождается изменениями N_e. Описание поведения на основе (6) иногда называют адиабатическим приближением [18].

Отыскивая стационарное решение (1)—(5), мы должны принять, что все переменные величины в этих уравнениях зависят от переменной

$$\xi = z - Vt,$$

где V — постоянная скорость, которая интерпретируется как скорость распространения волны. Имея в виду, что $\partial\xi/\partial t = -V$ и $\partial\xi/\partial z = 1$, из уравнений (4), (5) с учетом (6) получаем

$$\frac{d}{d\xi} [N_i (u_i - V)] = 0, \quad \frac{d}{d\xi} \left\{ \frac{(u_i - V)^2}{2} + \frac{e\varphi}{M} \right\} = 0.$$

Интегралами этих уравнений являются

$$N_i (u_i - V) = N_{i0} u_{i0}, \quad \frac{(u_i - V)^2}{2} + \frac{e\varphi}{M} = \frac{u_{i0}^2}{2}, \tag{3.6.7}$$

где u_{i0}, N_{i0} — скорость и концентрация ионов в точке, потенциал которой равен нулю. В частности, если скорость V определить как скорость частиц в точке с нулевым потенциалом, то из (7) следует, что

$$N_i (u_i - V) = -N_{i0} V, \quad \frac{(u_i - V)^2}{2} + \frac{e\varphi}{M} = \frac{V^2}{2}. \tag{3.6.8}$$

Исключая в соотношениях (8) u_i, получаем выражение, определяющее распределение ионов в поле волны:

$$N_i = N_{i0}\,(1 - 2e\varphi/MV^2)^{-1/2}. \qquad (3.6.9)$$

Уравнение для электрического потенциала (1) с учетом (6), (9) имеет вид [14, 19]

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} = -4\pi e\left\{\frac{N_{i0}}{(1-2e\varphi/MV^2)^{1/2}} - N_{e0}\exp\left(\frac{e\varphi}{\gamma_e \varkappa T_e}\right)\right\}. \qquad (3.6.10)$$

Отыскание из (10) зависимости $\varphi(\xi)$ в явном виде связано со значительными математическими трудностями. Для того чтобы иметь в дальнейшем возможность найти аналитическое решение именно в таком виде и провести его сравнительно несложное исследование, будем считать, что справедливы неравенства

$$2e\varphi/MV^2 \ll 1, \quad e\varphi/\varkappa T_e \ll 1. \qquad (3.6.11)$$

Учитывая (11), разложим выражение под радикалом и экспоненту в правой части (10) с точностью до первых нелинейных членов. В итоге получаем

$$\frac{d^2\varphi}{d\xi^2} = -4\pi e\,(N_{i0} - N_{e0}) + \left(\omega_{i0}^2/V^2 + \omega_{e0}^2/\gamma_e v_{T_e}^2\right)\varphi + \\ + e\left(\omega_{e0}^2/2m\gamma_e^2 v_{T_e}^4 - 3\omega_{i0}^2/2MV^4\right)\varphi^2. \qquad (3.6.12)$$

При решении уравнений (10), (12) полезна простая механическая аналогия. Поскольку в правые части этих уравнений входит только φ и не входит ξ, можно рассматривать (10), (12) как уравнения движения материальной точки единичной массы в силовом поле, описываемом потенциальной функцией

$$U(\varphi) = 4\pi e \int [N_i(\varphi) - N_e(\varphi)]\,d\varphi. \qquad (3.6.13)$$

При использовании (13) с учетом (9) уравнения (10), (12) приобретают вид [5]

$$d^2\varphi/d\xi^2 = -dU(\varphi)/d\varphi. \qquad (3.6.14)$$

Проводя интегрирование в (13), получим, соответственно, для (10) и (12)

$$U_{10} = 4\pi e\left\{N_{i0}MV^2(1-2e\varphi/MV^2)^{1/2} + N_{e0}\gamma_e\varkappa T_e\exp(e\varphi/\gamma_e\varkappa T_e)\right\}, \qquad (3.6.15)$$

$$U_{12} = 4\pi e\,(N_{i0}-N_{e0})\,\varphi - \left(\omega_{i0}^2/V^2 + \omega_{e0}^2/\gamma_e v_{T_e}^2\right)\frac{\varphi^2}{2} - \\ - e\left(\omega_{e0}^2/m\gamma_e^2 v_{T_e}^4 - 3\omega_{i0}^2/MV^4\right)\frac{\varphi^3}{6}. \qquad (3.6.16)$$

Если использовать указанную аналогию, то в уравнениях (13)—(16) φ играет роль координаты материальной точки, а ξ — времени. Вводя «скорость» $d\varphi/dt \equiv \dot\varphi$ и переходя к системе характеристических уравнений, вместо уравнения второго порядка (14) получаем

$$\dot\varphi^2 = 2(\mathscr{E} - U), \qquad (3.6.17)$$

где $\mathscr{E}$ играет роль полной энергии частицы. Обратимся к соотношению (16). В общем случае при $N_{e0} \neq N_{i0}$ U_{12} представляет собой функцию, имеющую один минимум и один максимум. Поведение U_{12} при $\varphi = \pm\infty$ зависит от знака величины $\left(\omega_{e0}^2/m\gamma_e^2 v_{T_e}^4 - 3\omega_{i0}^2/MV^4\right)$. Пусть для конкретности $U_{12} \to \infty$ при $\varphi \to \infty$ (рис. 3.11). Тогда, продолжая механическую аналогию,

все частицы, для которых выполнено $\varphi_1 \leqslant \varphi \leqslant \varphi_2$, окажутся «запертыми» внутри потенциальной ямы ABC. Перенесем точку B в начало отсчета на плоскости φU (рис. 3.12). В этой точке

$$U = 0, \quad \varphi = \dot{\varphi} = 0. \tag{3.6.18}$$

Функция $U_{10}(\varphi)$ в общем случае качественно ведет себя так же, как и

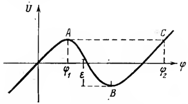

Рис. 3.11. Потенциальная функция $U(\varphi)$, вводимая при использовании аналогии между движением частицы и распространением нелинейной продольной волны.

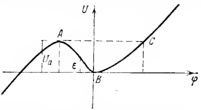

Рис. 3.12. Иллюстрация захвата частицы, которому соответствуют электростатические нелинейные продольные волны.

$U_{12}(\varphi)$, т. е. образует потенциальную яму. Если потребовать для U_{10}, чтобы выполнялись условия (18), то из (15), (17) при учете $\partial\varphi/\partial z = \partial\varphi/\partial\xi$ следует

$$\dot{\varphi}^2 = E^2 = 8\pi\left\{N_{e0}\gamma_e \varkappa T_e\left\{\exp\left(e\varphi/\gamma_e \varkappa T_e\right) - 1\right\} + \right.$$
$$\left. + N_{i0}MV^2\left\{\left(1 - 2e\varphi/MV^2\right)^{1/2} - 1\right\}\right\}, \tag{3.6.19}$$

где $E = -\partial\varphi/\partial z$ — напряженность электрического поля.

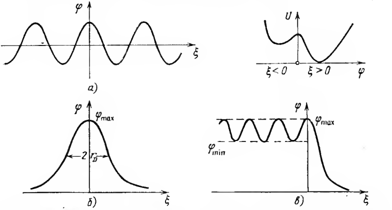

Рис. 3.13. Потенциал φ электрического поля: *а*) в стационарной периодической волне; *б*) для уединенной волны; *в*) для нелинейной волны с осцилляциями.

Обратимся опять к рис. 3.12. Пока $\mathscr{E} < U_a$, «частица» будет совершать периодические колебания относительно положения устойчивого равновесия (точка B), т. е. $\varphi(\xi)$ описывает периодическую стационарную волну*)

*) Объяснение структуры волн при использовании построения траекторий на фазовой плоскости $\varphi\dot{\varphi}$ можно найти, например, в [5].

(рис. 3.13, *а*). Амплитуда потенциала $\varphi_{\max}$ находится из условия $\dot{\varphi} = 0$. Тогда из (19) получаем

$$N_{e0}\gamma_e \varkappa T_e \left\{\exp\left(\frac{e\varphi_{\max}}{\gamma_e \varkappa T_e}\right) - 1\right\} + N_{i0}MV^2\left\{\left(1 - \frac{2e\varphi_{\max}}{MV^2}\right)^{1/2} - 1\right\} = 0. \tag{3.6.20}$$

Из (19) можно также найти $\xi(\varphi)$:

$$\xi = \pm \int d\varphi \Big/ \sqrt{E^2(\varphi)} = \pm\, 1/\sqrt{8\pi} \int \{N_{e0}\gamma_e \varkappa T_e [\exp(e\varphi/\gamma_e \varkappa T_e) - 1] + N_{i0}MV^2[(1 - 2e\varphi/MV^2)^{1/2} - 1]\}^{-1/2} d\varphi. \tag{3.6.21}$$

Поскольку в системе координат, движущейся со скоростью V, волновая картина стационарна, расстояние от какой-то впадины до соседней [для функции $\varphi(\xi)$] будет длиной волны. Из (21) находим

$$\lambda = 1/\sqrt{2\pi} \int_0^{\varphi_{\max}} \{N_{e0}\gamma_e \varkappa T_e \{\exp(e\varphi/\gamma_e \varkappa T_e) - 1\} + N_{i0}MV^2\{(1 - 2\varphi e/MV^2)^{1/2} - 1\}\}^{-1/2},$$

где $\varphi_{\max}$ определяется соотношением (20).

В пределе, при $\mathscr{E} = U_a$ (рис. 3.12), появляется новый тип волны — уединенная волна или солитон. В рамках механической аналогии материальная точка при этом скатывается из положения неустойчивого равновесия A, приходит в C и бесконечно долго возвращается в точку A. Такое решение возможно, если одновременно в некоторой точке $\dot{\varphi} = 0$, $N_{e0} = N_{i0}$ [14]. Амплитуда уединенной волны находится из (20) при $N_{e0} = N_{i0}$. Можно показать, что это уравнение имеет решение лишь при $\varphi_{\max} > 0$. Из этого же соотношения следует связь между V и амплитудой солитона в форме

$$V = (\varkappa T/2M)^{1/2}\{\exp(e\varphi_{\max}/\varkappa T_e) - 1\} \times \{\exp(e\varphi_{\max}/\varkappa T_e) - 1 - e\varphi_{\max}/\varkappa T_e\}^{-1/2}, \tag{3.6.22}$$

где мы положили $\gamma_e = 1$. Отсюда, в частности, получается, что при $e\varphi_{\max} \ll \varkappa T_e$ $V \approx \sqrt{\varkappa T_e/2M}$.

Поскольку $\varphi_{\max} > 0$, то $N_{e,\max} = N_{e0}\exp(e\varphi_{\max}/\varkappa T_e) > N_{e0}$, $N_{i,\max} = N_{i0}(1 - 2e\varphi_{\max}/MV^2)^{1/2} < N_{i0}$.

Обратимся опять к упрощенному уравнению (12). Полагая $\omega_{e0}^2/\gamma_e v_{T_e}^2 \gg \omega_{i0}^2/V^2$, можно показать, что решение этого уравнения запишется в виде

$$\varphi = -\left(4r_D^2\gamma_e\right)^{-1} 3e\left(\omega_{e0}^2/m\gamma_e^2 v_{T_e}^4 - 3\omega_{i0}^2/MV^4\right)\operatorname{ch}^{-2}(\xi/2r_D\sqrt{\gamma}). \tag{3.6.23}$$

Поскольку $\varphi_{\max} > 0$, то должно выполняться условие

$$3\omega_{i0}^2/MV^4 > \omega_{e0}^2/m\gamma_e^2 v_{T_e}^4.$$

Отсюда при $\gamma_e = 1$ получается, что $V < 1{,}3\sqrt{\varkappa T_e/M}$. Кроме того, из (22) следует, что $V > \sqrt{\varkappa T_e/M}$. Таким образом, область существования уединенной волны определяется неравенствами

$$\sqrt{\varkappa T_e/M} < V < 1{,}3\sqrt{\varkappa T_e/M}. \tag{3.6.24}$$

Максимально возможное значение амплитуды уединенной волны можно связать со скоростью V при помощи энергетического соотношения

$$MV^2/2 = e\varphi_{\max}. \tag{3.6.25}$$

Соотношения (22) и (25) можно рассматривать как систему уравнений относительно V и φ_{max}. Численное решение этой системы позволяет получить, что [14]

$$\varphi_{max} \approx 1{,}3\varkappa T_e/e, \qquad V \approx 1{,}6\sqrt{\varkappa T_e/M}.$$

Это значение скорости V следует принять за верхнюю границу области существования солитона.

Зависимость $\varphi(\xi)$ для уединенной волны приведена на рис. 3.13, *б*. Видно, что характерная «толщина» солитона порядка $2r_D$.

Рассмотрим качественно еще один случай распространения стационарной волны в бесстолкновительной плазме. Если нарушается симметрия пространственного распределения заряда относительно точки $\xi = 0$, то это приводит к искажению потенциальной функции $U(\varphi)$. Со стороны натекающего на солитон потока заряженных частиц, т. е. при $\xi > 0$ потенциальная функция $U(\varphi)$ такая же, как и на рис. 3.12 (напоминаем, что рассмотрение происходит в системе отсчета, движущейся со скоростью V). Если же $N_{e0} \neq \neq N_{i0}$, $\xi < 0$ (нарушение нейтральности может происходить за счет частичного отражения ионов от потенциального барьера), то кривая $U(\varphi)$ смещается подобным образом вдоль вертикальной оси. При «дефиците» ионов это смещение происходит вверх и, говоря на языке механической аналогии, частица при той же энергии $\mathscr{E}$, $\xi < 0$, оказывается в области существования осциллирующих $\varphi(\xi)$. Качественная зависимость $\varphi(\xi)$ для этого случая приведена на рис. 3.13, *в*. Толщина переходной области здесь порядка r_D. Такие волны называют бесстолкновительными ударными или квазиударными волнами.

Заметим, что чем больше разница $N_{i0} - N_{e0}$, тем меньше величина осцилляций потенциала $\varphi_{max} - \varphi_{min}$ за фронтом квазиударной волны. Кроме того, если учесть слабые столкновения между частицами, то осцилляции будут затухать.

Подобные волны должны наблюдаться в межпланетной плазме. Так, например, висячая квазиударная волна формируется на границе солнечного ветра с магнитосферой Земли. Хотя здесь имеется связь с проведенным рассмотрением, для образования головной ударной волны существенно влияние магнитного поля.

Учет нелинейности плазмы усложняет картину волновых процессов даже при использовании квазигидродинамического описания. Представленные здесь результаты составляют лишь малую часть того, что имеется только в монографической литературе. Поэтому укажем на монографию по ударным волнам [20], на книги по физике плазмы [18, 19, 21] и на обзор [22]. Многие вопросы нелинейной динамики плазмы рассматривались и в цитированных ранее книгах [8, 14].

ГЛАВА 4

КИНЕТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В МАГНИТОАКТИВНОЙ ПЛАЗМЕ

4.1. Продольные ленгмюровские и ионно-звуковые волны

В гл. 2 анализ вопросов теории распространения волн в однородной плазме, находящейся во внешнем магнитном поле $\mathbf{H}_0$, был проведен на базе квазигидродинамического описания. При этом давления электронов и ионов считались изотропными. Такой подход обычно достаточен в столкновительной плазме. Естественно, то же самое относится и к случаю пренебрежения тепловым движением заряженных частиц (холодная плазма).

Но при учете теплового движения частиц для бесстолкновительной плазмы квазигидродинамическое приближение даже не может быть строго обосновано. Оправданием же его частого применения здесь может быть только относительная простота расчетов. Так, можно, например, провести грубую классификацию волн и выделить случаи, когда можно пользоваться идеализацией холодной плазмы. Но в то же время квазигидродинамическое рассмотрение (даже в усложненной форме) не дает возможности правильно получить дисперсионные характеристики волн и, в особенности, затухание. Только кинетический подход дает возможность установить факт существования и определить величину специфического бесстолкновительного затухания. Последнее можно условно подразделить на черенковское (затухание Ландау) и гирорезонансное поглощение [1—8].

Мы не будем здесь приводить выражения для компонент тензора диэлектрической проницаемости магнитоактивной плазмы, полученные на основе метода кинетического уравнения, что могло бы дополнить результаты предшествующей главы. Вывод этих компонент в общем виде достаточно громоздкий. Мы сосредоточим основное внимание на получении дисперсионных зависимостей в частных, но очень важных случаях распространения в направлении поля $\mathbf{H}_0$ и перпендикулярно к нему.

Исходим, как и ранее, из уравнений (2.1.23)—(2.1.26), где мы не учитываем сторонние токи и заряды. Используя систему уравнений с самосогласованными полями $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$, имеем

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi e}{c}\left(\int \mathbf{v}_i f_i d\mathbf{v}_i - \int \mathbf{v}_e f_e d\mathbf{v}_e\right), \tag{4.1.1}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \tag{4.1.2}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi e\left(\int f_i d\mathbf{v}_i - \int f_e d\mathbf{v}_e\right), \tag{4.1.3}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \tag{4.1.4}$$

$$\frac{\partial f_e}{\partial t} + \mathbf{v}_e \nabla_{\mathbf{r}} f_e - \frac{e}{m}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}_e \mathbf{H}_0]\right)\frac{\partial f_e}{\partial \mathbf{v}_e} = J_e, \tag{4.1.5}$$

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \mathbf{v}_i \nabla_{\mathbf{r}} f_i + \frac{e}{M}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{v}_i \mathbf{H}_0]\right)\frac{\partial f_i}{\partial \mathbf{v}_i} = J_i, \tag{4.1.6}$$

где в кинетических уравнениях учтены только электромагнитные силы. При написании силы Лоренца для простоты принимается во внимание лишь наличие внешнего магнитного поля $\mathbf{H}_0$. Слагаемые с J_e и J_i в (5), (6) отражают вклад столкновений. Будем рассматривать сначала распространение волн малой амплитуды, когда справедливо линейное приближение и можно представить функции f_e и f_i в форме (2.2.4). Равновесные функции f_{e0} и f_{i0} считаем изотропными (в конечном счете выбираем их максвелловскими). Тогда после линеаризации из (1)—(6)

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi e}{c}\left(\int \mathbf{v}_i f_{i1} d\mathbf{v}_i - \int \mathbf{v}_e f_{e1} d\mathbf{v}_e\right), \tag{4.1.7}$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \tag{4.1.8}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = 4\pi e\left(\int f_{i1} d\mathbf{v}_i - \int f_{e1} d\mathbf{v}_e\right), \tag{4.1.9}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0, \tag{4.1.10}$$

$$\frac{\partial f_{e1}}{\partial t} + \mathbf{v}_e \nabla_{\mathbf{r}} f_{e1} - \frac{e}{m}\frac{(\mathbf{E}\mathbf{v}_e)}{v_e}\frac{df_{e0}}{dv_e} - \frac{e}{mc}[\mathbf{v}_e \mathbf{H}_0]\frac{\partial f_{e1}}{\partial \mathbf{v}_e} + \bar{\nu}_e f_{e1} = 0, \tag{4.1.11}$$

$$\frac{\partial f_{i1}}{\partial t} + \mathbf{v}_i \nabla_{\mathbf{r}} f_i - \frac{e}{M}\frac{(\mathbf{E}\mathbf{v}_i)}{v_i}\frac{df_{i0}}{dv_i} + \frac{e}{Mc}[\mathbf{v}_i \mathbf{H}_0]\frac{\partial f_{i1}}{\partial \mathbf{v}_i} + \bar{\nu}_i f_{i1} = 0, \tag{4.1.12}$$

где самосогласованные поля $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ какими-то дополнительными индексами снабжаться не будут. Использовалось предположение об изотропности функций $f_{e0}(v_e)$ и $f_{i0}(v_i)$.

Наличие столкновений учтено посредством введения релаксационных слагаемых $\bar{\nu}_e f_{e1}$ и $\bar{\nu}_i f_{i1}$, где частоты столкновений $\bar{\nu}_e$ и $\bar{\nu}_i$ считаются не зависящими от скорости. Это ограничение существенно, но не менее важно то, что такого рода запись не удовлетворяет всем общим требованиям, предъявляемым к интегралу столкновений. Однако имеются важные случаи, когда несовершенство такой записи может и не привести к ошибкам. Например, это относится к волнам высокой частоты, когда $\omega \gg \nu_e$. В целом же формулировку J_e и J_i в столь простой модельной

форме нужно рассматривать как ориентировочную, которую можно использовать только для грубых заключений (и то не всегда).

В этой главе при анализе поведения некоторых волн нам необходим предельный переход к исчезающим столкновениям. Для этой цели простая запись столкновительных членов в (11), (12) вполне достаточна.

В однородной стационарной безграничной среде можно разложить все переменные в интегралы Фурье, полагая, например, что

$$\mathbf{E} = \int \mathbf{E}_{\mathbf{k}\omega} \exp(i\omega t - i\mathbf{kr})\, d\omega\, d\mathbf{k}. \tag{4.1.13}$$

В линейном приближении можно независимо рассматривать компоненты с заданными ω и $\mathbf{k}$. Выпишем, опираясь на (7)—(12), систему уравнений для фурье-составляющих с определенными ω и $\mathbf{k}$, имея в виду, что каждая из переменных содержит фактор $\exp(-i\mathbf{kr} + i\omega t)$:

$$[\mathbf{kH}] = -\frac{\omega}{c}\mathbf{E} + \frac{4\pi ei}{c}\left(\int \mathbf{v}_i f_{i1} d\mathbf{v}_i - \int \mathbf{v}_e f_{e1} d\mathbf{v}_e\right), \tag{4.1.14}$$

$$[\mathbf{kE}] = \frac{\omega}{c}\mathbf{H}, \tag{4.1.15}$$

$$\mathbf{kE} = 4\pi ei\left(\int f_{i1} d\mathbf{v}_i - \int f_{e1} d\mathbf{v}_e\right), \tag{4.1.16}$$

$$\mathbf{kH} = 0, \tag{4.1.17}$$

$$i(\omega - \mathbf{kv}_e) f_{e1} - \frac{e}{m}\frac{(\mathbf{v}_e\mathbf{E})}{v_e}\frac{df_{e0}}{dv_e} - \frac{e}{mc}[\mathbf{v}_e\mathbf{H}_0]\frac{\partial f_{e1}}{\partial \mathbf{v}_e} + \bar{\nu}_e f_{e1} = 0, \tag{4.1.18}$$

$$i(\omega - \mathbf{kv}_i) f_{i1} + \frac{e}{M}\frac{(\mathbf{v}_i\mathbf{E})}{v_i}\frac{df_{i0}}{dv_i} + \frac{e}{Mc}[\mathbf{v}_i\mathbf{H}_0]\frac{\partial f_{i1}}{\partial \mathbf{v}_i} + \bar{\nu}_i f_{i1} = 0. \tag{4.1.19}$$

При произвольной ориентации волнового вектора $\mathbf{k}$ по отношению к $\mathbf{H}_0$ волны нельзя строго считать ни продольными ($[\mathbf{kE}] = 0$), ни поперечными ($\mathbf{kE} = 0$). Однако при распространении вдоль $\mathbf{H}_0$ продольные и поперечные волны в однородной среде в линейном приближении отделяются.

При коллинеарности векторов $\mathbf{k}$ и $\mathbf{H}_0$ проще всего сначала выделить электростатические волны с продольным электрическим полем $\mathbf{E}$. Поскольку они являются безвихревыми ($\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$), переменное магнитное поле $\mathbf{H}$ в этих волнах отсутствует. Если поле $\mathbf{E}$ направлено по $\mathbf{H}_0$, то внешнее магнитное поле не должно влиять на свойства волн. Это позволяет в рассматриваемом случае опустить в (18), (19) члены с $[\mathbf{v}_e\mathbf{H}_0](\partial f_{e1}/\partial \mathbf{v}_e)$ и $[\mathbf{v}_i\mathbf{H}_0](\partial f_{i1}/\partial \mathbf{v}_i)$. Такого рода аргументация вполне достаточна. Формально же в

этом можно было бы убедиться следующим образом. Переходя в пространстве скоростей от декартовых координат v_x, v_y, v_z к цилиндрическим v_ρ, v_z, ψ (с осью вдоль v_z), легко получить уравнения, определяющие зависимость f_{e1} и f_{i1} от угла ψ. Накладывая очевидные требования периодичности по углу ψ $f_{e1}(2\pi)=f_{e1}(0)$, $f_{i1}(2\pi)=f_{i1}(0)$, для продольных волн приходим к выводу о независимости f_{e1} и f_{i1} от ψ $(\partial f_{e1}/\partial\psi=\partial f_{i1}/\partial\psi=0)$, что означает отсутствие вклада поля $\mathbf{H}_0$.

Заметим, что для поперечных волн зависимость f_{e1} и f_{i1} от ψ сохраняется. Подробные вычисления будут проведены в следующем параграфе. При этом будет сделано соответствующее замечание по поводу продольных волн.

Опуская поле $\mathbf{H}$, приходим к системе уравнений для продольных волн:

$$\mathbf{kE}=kE_\parallel=4\pi ei\,(f_{i1}d\mathbf{v}_i-f_{e1}d\mathbf{v}_e), \tag{4.1.20}$$

$$i\,(\omega-\mathbf{kv}_e)\,f_{e1}-\frac{e\,(\mathbf{v}_e\mathbf{E})}{v_e}\,\frac{df_{e0}}{dv_e}+\bar{\nu}_e f_{e1}=0, \tag{4.1.21}$$

$$i\,(\omega-\mathbf{kv}_i)\,f_{i1}+\frac{e\,(\mathbf{v}_i\mathbf{E})}{v_i}\,\frac{df_{i0}}{dv_i}+\bar{\nu}_i f_{i1}=0, \tag{4.1.22}$$

где $E_\parallel$ представляет проекцию поля $\mathbf{E}$ на волновой вектор $\mathbf{k}$. Далее в этом параграфе знак параллельности опускаем.

Определяя из (21), (22) функции f_{e1} и f_{i1} и подставляя в (20), приходим к соотношению

$$kE=-4\pi e^2\left\{\int\frac{\mathbf{v}_i\mathbf{E}}{v_iM}\,\frac{(df_{i0}/dv_i)\,d\mathbf{v}_i}{\omega-\mathbf{kv}_i-i\bar{\nu}_i}+\int\frac{\mathbf{v}_e\mathbf{E}}{v_em}\,\frac{(df_{e0}/dv_e)\,d\mathbf{v}_e}{\omega-\mathbf{kv}_i-i\bar{\nu}_e}\right\}. \tag{4.1.23}$$

Считая распределения f_{e0} и f_{i0} максвелловскими (2.2.5), после интегрирования по поперечным по отношению к $\mathbf{k}$ скоростям v_x и v_y (ось z направлена вдоль поля $\mathbf{E}$) приходим к дисперсионному уравнению

$$1+\frac{\omega_{e0}^2}{\sqrt{2\pi}\,k}\left(\frac{m}{\varkappa T_e}\right)^{3/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{v_{ez}\exp\left(-mv_{ez}^2/2\varkappa T_e\right)dv_{ez}}{\omega-kv_{ez}-i\bar{\nu}_e}+$$
$$+\frac{\omega_{i0}^2}{\sqrt{2\pi}\,k}\left(\frac{M}{\varkappa T_i}\right)^{3/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{v_{iz}\exp\left(-Mv_{iz}^2/2\varkappa T_i\right)dv_{iz}}{\omega-kv_{iz}-i\bar{\nu}_i}=0. \tag{4.1.24}$$

Напомним, что в (24) $\omega_{e0}=\sqrt{4\pi e^2N_0/m}$ и $\omega_{i0}=\sqrt{4\pi e^2N_0/M}$ — плазменные частоты электронов и ионов.

Ленгмюровские волны. Рассмотрим сначала высокочастотные плазменные волны, получившие название ленгмюровских. При $\omega\sim\omega_{e0}$ вклад ионов малосуществен. В конечном счете, как уже оговаривалось, столкновения будем считать слабыми $(\omega\gg\bar{\nu}_e)$.

После несложных преобразований в подынтегральном выражении в первом из интегралов (24) с учетом того очевидного обстоятельства, что $\int\limits_{-\infty}^{\infty} v_z \exp\left(-mv_z^2/2\varkappa T\right) dv_z = 0$, приходим к следующей формулировке дисперсионного уравнения:

$$1 - \frac{\omega_{e0}^2}{\sqrt{2\pi}\,\omega}\left(\frac{m}{\varkappa T_e}\right)^{3/2} \int \frac{v_{ez}^2 + \left(i\bar{\nu}_e/k\right) v_{ez}}{\omega - kv_{ez} - i\bar{\nu}_e} \exp\left(-\frac{mv_{ze}^2}{2\varkappa T_e}\right) dv_{ez} = 0. \qquad (4.1.25)$$

При анализе (25) возникает неопределенность, обусловленная обращением в нуль для бесстолкновительной плазмы при $\omega = kv_{ez}$ знаменателя подынтегрального выражения. В силу этого интеграл в (25) не имеет ясного смысла, если не указан путь интегрирования. Возникшая трудность связана с использованием однородных уравнений для фурье-компонент на основе представления (13). В простейших случаях (например, для холодной плазмы) такой подход при исследовании дисперсионных характеристик волн и их столкновительного поглощения вполне достаточен. Необходимая определенность может быть внесена, если решать задачи о волнах (колебаниях) плазмы в конкретной постановке. Одна из таких постановок [8] связана с заданием в однородной плазме при $t = 0$ функции $f_{e1}(0, \mathbf{r}, \mathbf{v}_e) \simeq f_{e1}(0, \mathbf{v}_e)\, e^{-i\mathbf{kr}}$. Требуется найти поведение функции $f_{e1}(t, \mathbf{v}_e)$. Оказывается, что при использовании непрерывных функций $f_{e1}(0, \mathbf{v}_e)$ гармоническая зависимость вида $\exp(-i\omega t + i\mathbf{kr})$ возникает лишь асимптотически при больших t (фактически при $t \gg \omega_{e0}^{-1}$). Тогда и открывается возможность использовать уравнение (25). При этом для действительных $\mathbf{k}$ частота ω оказывается комплексной, так что

$$\omega = \bar{\omega} + i\gamma, \qquad (4.1.25a)$$

где $\bar{\omega}$ — действительная часть ω и γ — декремент затухания. Очень существенно, что $\gamma \neq 0$ и при $\nu_e \to 0$, т. е. имеется некоторое дополнительно бесстолкновительное затухание. Если пространственная структура поля фиксирована (определяется действительными $\mathbf{k}$), то обычно говорят о колебаниях плазмы. Возможна, как уже обсуждалось в гл. 3, и другая постановка, когда считается заданной и действительной частота ω, и определяются значения $\mathbf{k}$. При этом распространяющиеся в пространстве плазменные волны должны быть затухающими (в том числе и при $\bar{\nu}_e = 0$).

Прежде чем указать контур интегрирования в (25), приведем некоторые аргументы, позволяющие частично обойти трудности с выбором этого контура.

Перейдем к колебаниям в бесстолкновительной плазме, имея в виду, что в пределе $\bar{\nu}_e \to +0$ (в силу положительности частоты столкновений). При малых $\bar{\nu}_e$ полюс сместится с главной оси в

точку $v_{ez} = (\omega - i\nu_e)/k$. Тогда можно воспользоваться предельным соотношением

$$\lim_{\nu \to +0} \frac{1}{x + i\nu} = \frac{\mathscr{P}}{x} + i\pi\delta(x), \qquad (4.1.26)$$

где символ $\mathscr{P}$ указывает, что при определении интеграла, для которого используется этот переход, следует вычислить его главное значение. Используя (26), из (25) приходим к уравнению

$$1 - \frac{\omega_{e0}^2}{\sqrt{2\pi}\,\omega}\left(\frac{m}{\varkappa T_e}\right)^{3/2} \int v_{ez}^2 \{\mathscr{P}(\omega - kv_{ez})^{-1} + i\pi\delta(\omega - kv_{ez})\} \times$$
$$\times \exp\left(-\frac{mv_{ez}^2}{2\varkappa T_e}\right) dv_{ez} = 0. \qquad (4.1.27)$$

Наличие второго члена в фигурных скобках свидетельствует о том, что даже в отсутствие столкновений имеется некоторое затухание. Бесстолкновительное поглощение плазменных волн носит название *затухания Ландау* [1, 3, 8]. Его появление обусловлено полюсом в интеграле, который входит в (26). Его положение при $\nu_e = 0$ определяется соотношением

$$\omega = kv_{ez} = \mathbf{kv}_e, \qquad (4.1.28)$$

где учтено, что распространение происходит вдоль оси z. Это равенство представляет собой хорошо известный критерий черенковского излучения электронами волны с фазовой скоростью $v_ф = \omega/k$. Так как излучение в равновесных системах с помощью довольно общих соотношений связано с поглощением, то здесь лучше говорить о черенковском поглощении, которое для ленгмюровских волн эквивалентно затуханию Ландау.

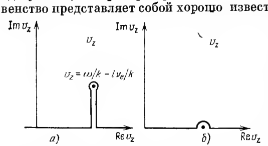

Рис. 4.1. Контур интегрирования в дисперсионном уравнении для продольной волны: *а*) при конечной частоте столкновений ν_e; *б*) при $\nu_e \to 0$.

В соответствии с рецептом (27) для определения действительной и мнимой частей в уравнении (25) можно ввести в последнее контурное интегрирование, как это представлено на рис. 4.1, *а*. При слабом столкновительном и бесстолкновительном затухании этот контур в плоскости комплексного переменного v_z можно выбрать в форме, представленной на рис. 4.1, *б*. В этом случае необходимо наряду с условием $\omega \gg \nu_e$ принять выполнение неравенства (2.2.6) $\omega \gg kv_{T_e}$, означающего, что фазовая скорость много больше скорости теплового движения электронов. Используя (26) при $\gamma \ll \omega$, мы, в первом приближении, сначала

вообще можем не учитывать особенности в подынтегральном выражении (24а). Тогда с учетом (2.2.6) из (24а)

$$\frac{\omega_{e0}^2}{\omega^2}\left(1+\frac{3\varkappa T_e k^2}{m\omega^2}\right)=1.$$

Имея в виду ограничение (2.2.6), в соответствии с которым $\omega^2 \approx \omega_{e0}^2$, найдем

$$\omega^2 = \omega_{e0}^2 + 3\varkappa T_e m^{-1} k^2 = \omega_{e0}^2\left(1+3k^2 r_D^2\right). \qquad (4.1.29)$$

Аналогичное дисперсионное уравнение (3.2.24) было получено на основе квазигидродинамического подхода. Для перехода к (29) нужно в (3.2.24) положить $\gamma_e = 3$. Однако еще раз отметим, что квазигидродинамический подход не дает возможности учесть факт существования бесстолкновительного поглощения. В данном случае ограничение (2.2.6) можно сформулировать в виде

$$k^2 r_D^2 \ll 1, \qquad (4.1.30)$$

означающем, что длина волны $\lambda\!\!\!^{-} = \lambda/2\pi$ плазменных волн много больше дебаевского радиуса. При условии (30) специфическое бесстолкновительное поглощение будет действительно слабым.

Интеграл в (25) по контуру, представленному на рис. 4.1, *б*, складывается из интеграла вдоль действительной оси и интеграла по полуокружности, сводящемуся к πi, умноженному на вычет относительно полюса. Будем считать, что

$$\nu_e \ll k v_{T_e}. \qquad (4.1.31)$$

Согласно (31) длина волны $\lambda\!\!\!^{-}$ (точнее, $\lambda/2\pi$) много меньше длины свободного пробега $l_{\text{св}}$. Критерий (31) соответствует переходу к бесстолкновительной плазме. При условии (31) можно пренебречь слагаемым $\nu_e v_{ez}/k$ в числителе подынтегрального выражения (25), а также при вычислении вычета не считаться с наличием столкновений. В итоге из (25) приходим к уравнению

$$\frac{\omega_{e0}^2}{\omega\left(\omega - i\bar{\nu}_e\right)}\left(1+3k^2r_D^2\right) + \\ + \pi i\,\frac{\omega_{e0}^2}{\sqrt{2\pi}}\,\frac{\omega}{k^3}\left(\frac{m}{\varkappa T_e}\right)^{3/2}\exp(-m\omega^2/2\varkappa T_e k^2) = 1.$$

Решая это уравнение при $\gamma \ll \bar{\omega}$, в первом приближении приходим к старому результату (29). В следующем приближении с учетом замены (29) в экспоненциальной части и более грубой замены $\omega_{e0}^2 = \omega^2$ в предэкспоненциальном множителе имеем

$$\gamma = \frac{\bar{\nu}_e}{2} + \sqrt{\frac{\pi}{8}}\,\omega_{e0}\,(kr_D)^{-3}\exp\left(-\frac{2}{k^2r_D^2}-\frac{3}{2}\right). \qquad (4.1.32)$$

Естественно, что при условии (30) и при $\omega \gg \bar{\nu}_e$ колебания являются слабозатухающими ($\gamma \ll \omega$). При этом часть, представ-

ляющая бесстолкновительное затухание Ландау, экспоненциально мала. Но имеется тенденция увеличения γ при приближении длины волны λ к дебаевскому радиусу r_D. Анализ случая $k^2r_D^2 \gg 1$ показывает, что здесь существование слабозатухающих возмущений невозможно. Поэтому расстояние порядка дебаевского радиуса при распространении электростатических волн в отсутствие внешнего магнитного поля $\mathbf{H}_0$ определяет некоторый предельный наименьший масштаб. Возможны только квазимонохроматические, коллективные колебания электронов с пространственными периодами, превышающими r_D.

Выше в этом параграфе волновой вектор $\mathbf{k}$ считался вещественным и из дисперсионного уравнения определялась комплексная частота $\omega = \bar{\omega} + i\gamma$. Это отвечает задаче с начальными условиями. Не менее часто применяется и другой подход, когда вещественной является частота ω, а комплексным — волновой вектор. Такая постановка, соответствующая задачам с граничными условиями (например, при возбуждении волн излучателями), фактически (в неявном виде) использовалась в гл. 3. Здесь уже целесообразно говорить не о колебаниях плазмы, а о распространении ленгмюровских волн. Если последнее происходит по оси z и характеризуется показателями преломления n и поглощения q, то все переменные величины зависят от z и t одинаковым образом, а именно, по закону

$$\exp\left(i\omega t - i\frac{\omega}{c}nz - q\frac{\omega}{c}z\right).$$

В пренебрежении поглощением приходим к (29). Имея в виду, что $n = ck/\omega$, из (29) получаем

$$n^2 = \left(1 - \omega_{e0}^2/\omega^2\right)/3\beta_{T_e}^2 = (1 - v_e)/3\beta_{T_e}^2, \qquad (4.1.33)$$

где $\beta_{T_e}^2 = \varkappa T_e/mc^2$ (в нерелятивистской плазме $\beta_{T_e}^2 \ll 1$).

Фазовая скорость при заданной частоте ω определяется из соотношения

$$v_\text{ф} = c/n = \left(1 - \omega_{e0}^2/\omega^2\right)^{-1/2} 3v_{T_e}. \qquad (4.1.34)$$

Так как для слабозатухающих ленгмюровских волн $\omega_{e0}^2 \approx \omega^2$, то $v_\text{ф} \gg v_{T_e}$. В частности, при $(\omega - \omega_{e0}) < (3/2)\beta_{T_e}^2\omega_{e0}$ $v_\text{ф} > c$.

Групповая скорость, которая направлена по $\mathbf{k}$, равна

$$v_\text{гр} = \frac{\partial\omega}{\partial k} = \frac{3kv_{T_e}}{\omega_{e0}} v_{T_e} = 3kr_D v_{T_e}. \qquad (4.1.35)$$

В силу условия (30) $v_\text{гр} \ll v_{T_e}$.

При слабом затухании $(\gamma \ll \bar{\omega})$ и поглощении $(q \ll n)$ можно связать величины γ и q. Пусть дисперсионное уравнение для изотропной среды представлено в виде $\omega = F_1(k) + iF_2(k)$, где F_1 и F_2 — вещественные функции. Если частота ω комплексна, а вол-

новое число k действительно $(\bar{k}=k)$, то $\bar{\omega}=F_1(\bar{k})$ и $\gamma=F_2(\bar{k})$. При действительных ω и комплексных $k=\bar{k}-i\frac{\omega}{c}q$ имеем $\omega=F_1\left(\bar{k}-i\frac{\omega}{c}q\right)+iF_2\left(\bar{k}-i\frac{\omega}{c}q\right)$. Пренебрегая в силу малости $|F_2|$ по сравнению с $|F_1|$ зависимостью F_2 от q, получаем приближенно

$$\bar{\omega}=F_1(\bar{k})-i\frac{\omega}{c}q\frac{\partial F_1(\bar{k})}{\partial\bar{k}}+iF_2(\bar{k}).$$

Имея в виду, что $\bar{\omega}=F_1(\bar{k})$ и $\gamma=F_2(\bar{k})$, окончательно находим

$$q=\frac{c}{\omega}\left(\frac{\partial\omega}{\partial k}\right)^{-1}\gamma=\frac{c}{\omega}v_{\text{гр}}^{-1}\gamma. \tag{4.1.36}$$

Используя (36), можно сразу же на основе (32), (35) получить соотношение для q в форме

$$q=\frac{1}{6}\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\beta_{T_e}n)^{-5}n\exp\left(-\frac{1}{2\beta_{T_e}^2n^2}-\frac{3}{2}\right). \tag{4.1.37}$$

Поглощение, определяемое (37), является слабым ($q\ll n$). При $q\sim n$ формула (37) несправедлива. Однако она правильно передает тенденцию роста q с увеличением $\beta_{T_e}n$ и дает правильный в качественном плане результат $q\sim n$ при $\beta_{T_e}n\sim 1$ (здесь фазовая скорость сравнивается со скоростью теплового движения электронов v_{T_e}).

Ионно-звуковые волны. Помимо высокочастотных ленгмюровских волн ($\omega\approx\omega_{e0}$) распространение слабозатухающих продольных волн возможно и на более низких частотах. Однако избежать сильного поглощения низкочастотные волны могут только в неизотермической плазме, где $T_e\gg T_i$.

Рассмотрим распространение продольных волн в интервале частот ω, когда

$$kv_{T_i}\ll\omega\ll kv_{T_e}. \tag{4.1.38}$$

Заметим, что подобные ограничения уже использовались в п. 3.2 при анализе поведения низкочастотных волн в квазигидродинамическом приближении.

Обращаясь к уравнению (24) для «ионной части», в силу условия $\omega\gg kv_{T_i}$ используем способ интегрирования, который привел нас к соотношению (32). Для другого интеграла в (24) можно применить рецептуру (26), принимая во внимание неравенство $\omega\ll kv_{T_e}$. Тогда из (24) имеем

$$1+\frac{\omega_{e0}^2}{k^2v_{T_e}^2}\left(1+i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega}{kv_{T_e}}\right)-$$
$$-\frac{\omega_{i0}^2}{\omega^2}\left\{1+\frac{3k^2v_{T_i}^2}{\omega^2}-i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega^3}{k^3v_{T_i}^3}\exp\left(-\frac{\omega^2}{2k^2v_{T_i}^2}\right)\right\}=0. \tag{4.1.39}$$

Рассмотрим случай слабозатухающих колебаний. Полагая $\gamma \ll \bar{\omega}$, в первом приближении при определении $\bar{\omega}$ мнимыми слагаемыми в (39) пренебрежем. Тогда приходим к дисперсионному уравнению

$$\bar{\omega}^2 = \frac{\omega_{i0}^2 \left[1 + 3k^2 r_D^2 (T_i/T_e)\left(1 + k^{-2} r_D^{-2}\right)\right]}{1 + k^{-2} r_D^{-2}}. \qquad (4.1.40)$$

Для больших длин волн, когда $k^2 r_D^2 \ll 1$, что отвечает требованию (30), из (40) получаем

$$\bar{\omega}^2 = k^2(\varkappa T_e/M)(1 + 3T_i/T_e). \qquad (4.1.41)$$

Как уже указывалось в гл. 3, возмущения этого типа называют ионно-звуковыми колебаниями (волнами). Требование $\gamma \ll \bar{\omega}$, как будет показано далее, приводит к ограничению $T_e \gg T_i$. Выводы квазигидродинамического и кинетического рассмотрения для ионно-звуковых волн при выполнении последнего неравенства приближенно совпадают, если принять в (3.2.33) $\gamma_e = 1$, что приводит к значениям $v_\Phi^2 \approx \varkappa T_e/M$.

При $T_e \gg T_i$ давление плазмы $N\varkappa(T_i + T_e) \approx N\varkappa T_e = p_e$. Ее плотность $N(M + m) \approx MN$ приближенно равна плотности ионной компоненты. Определяя квадрат скорости звука, как это делается, через $\partial p/\partial\rho$, мы для изотермических процессов приходим к только что выписанной формуле для v_Φ^2, вытекающей из (41). При $T_e \gg T_i$ можно отказаться от ограничения (30), сохранив, однако, требование $k^2 r_D^2 (T_i/T_e) \ll 1$. Только в последнем случае необходимо удовлетворить одному из ограничений (38), а именно, $\bar{\omega} \gg k v_{T_i}$. Примем теперь, что $k^2 r_D^2 \gg 1$ $\left(k^2 r_D^2 (T_i/T_e) \ll 1\right)$. Тогда из формулы (40)

$$\bar{\omega}^2 = \omega_{i0}^2 + 3k^2 \varkappa T_i M^{-1}. \qquad (4.1.42)$$

Этот тип возмущений, рассмотренный ранее в п. 3.2, называют ионными плазменными колебаниями [по аналогии с электронными колебаниями (29)] *). Нужно только подчеркнуть определенную противоречивость условий применимости (42), когда одновременно необходимо удовлетворить требованиям $k^2\varkappa T_e/4\pi e^2 N \gg 1$ и $k^2 \varkappa T_i/4\pi e^2 N \ll 1$, что возможно только при выполнении неравенства $T_e \gg T_i$ с большим запасом.

Определяя при $\gamma \ll \bar{\omega}$ величину декремента затухания, из (39) при обращении в нуль мнимой части этого равенства имеем

$$\gamma = \sqrt{\frac{\pi}{8}}\, \frac{M}{m} \frac{\bar{\omega}^4}{k^3 v_{T_e}^3} \left\{1 + \sqrt{\frac{M}{m}} \left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{\bar{\omega}^2}{2k^2 v_{T_i}^2}\right)\right\}. \qquad (4.1.43)$$

---

*) Полученное ранее для этих волн соотношение (3.2.34) переходит в (42) при $\gamma_i = 3$.

Для ионно-звуковых колебаний (41) из (43) получаем

$$\gamma = \sqrt{\frac{\pi}{8}}\sqrt{\frac{m}{M}}\,\bar{\omega} + \sqrt{\frac{\pi}{8}}\,\bar{\omega}\left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{T_e}{2T_i}-\frac{3}{2}\right). \quad (4.1.44)$$

Условие $\gamma \ll \omega$ выполняется только при $T_e \gg T_i$. Имеется как экспоненциально малое слагаемое, так и член, при учете которого $\gamma/\omega = \sqrt{\pi/8}\sqrt{m/M} \ll 1$.

При использовании (42), когда приближенно $\omega^2 \approx \omega_{i0}^2$, из (43) находим

$$\gamma = \sqrt{\frac{\pi}{8}}\sqrt{\frac{m}{M}}\,\frac{\bar{\omega}}{k^3 r_D^3}\left(\frac{T_i}{T_e}\right)^{3/2} + \sqrt{\frac{\pi}{8}}\,\frac{\bar{\omega}}{k^3 r_D^3}\exp\left(-\frac{T_e}{2k^2 r_D^2 T_i}\right). \quad (4.1.45)$$

Опираясь на связь (36), найдем для двух частных случаев формулы для показателя поглощения низкочастотных продольных волн. При $k^2 r_D^2 \ll 1$, когда справедлива формула (41), мы видим, что ионно-звуковые волны распространяются без дисперсии. Тогда скорости $v_ф$ и $v_{гр}$ совпадают. В итоге из (36), (44) получаем

$$q = n\left\{\sqrt{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\frac{m}{M}} + \sqrt{\frac{\pi}{8}}\left(\frac{T_e}{T_i}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{T_e}{2T_i}-\frac{3}{2}\right)\right\}, \quad (4.1.46)$$

где, в соответствии с (41), $n = c\sqrt{M/\varkappa T_e}(1+3T_i/T_e)^{-1/2}$. В другом случае ионных колебаний плазмы (42), (45), реализующемся только при очень сильной ее неизотермичности (большом превышении T_e над T_i) по аналогии с (35), где $\omega \approx \omega_{e0}$, справедлива формула

$$v_{гр} v_ф = 3\varkappa T_i/M.$$

При ее использовании из (42), (45)

$$q = c\sqrt{\frac{M}{\varkappa T_i}}\sqrt{1+\frac{3T_i}{T_e}}\,\frac{1}{k^3 r_D^3}\left\{\sqrt{\frac{\pi}{8}}\sqrt{\frac{m}{M}}\left(\frac{T_i}{T_e}\right)^{3/2} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\frac{\pi}{8}}\exp\left(-\frac{T_e}{2k^2 r_D^2 T_i}\right)\right\}. \quad (4.1.47)$$

Таким образом, существование слабозатухающих низкочастотных волн в бесстолкновительной плазме возможно только при $T_e \gg T_i$. Особенно убедительным превышение T_e над T_i должно быть для волн, описываемых уравнением (42). При $T_e \sim T_i$ волны будут сильно затухать за время, соизмеримое с периодом колебаний $2\pi/\omega$ (на расстоянии порядка длины волны λ). Для «поддержания» волн при $T_e \sim T_i$ необходимо наличие в плазме условий, способствующих ее нестабильности (токи, потоки частиц, градиенты электронной концентрации и др.).

4.2. Поперечные волны при распространении в направлении постоянного магнитного поля

Рассмотрим теперь задачу о распространении электромагнитных волн (необыкновенных и обыкновенных) вдоль поля $\mathbf{H}_0$. Из установленного в предшествующем параграфе для продольного распространения факта строгого отделения продольных волн следует вывод о поперечности рассматриваемых здесь волн. Используя вытекающее из (4.1.14), (4.1.15) уравнение

$$[\mathbf{k}[\mathbf{kE}]]+\frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{E}=\frac{4\pi e i\omega}{c^2}\left(\int \mathbf{v}_i f_{i1} d\mathbf{v}_i-\int \mathbf{v}_e f_{e1} d\mathbf{v}_e\right)$$

и уравнения (4.1.18), (4.1.19), при распространении вдоль оси z получаем

$$i(\omega-kv_{ez}-i\bar{\nu}_e)f_{e1}+\omega_H\left(v_{ex}\frac{\partial f_{e1}}{\partial v_{ey}}-v_{ey}\frac{\partial f_{e1}}{\partial v_{ex}}\right)=$$
$$=\frac{e}{m}\frac{df_{e0}}{dv_e}(v_{ex}E_x+v_{ey}E_y),\quad (4.2.1)$$

$$i(\omega-kv_{iz}-i\bar{\nu}_i)f_{i1}-\Omega_H\left(v_{ix}\frac{\partial f_{i1}}{\partial v_{iy}}-v_{iy}\frac{\partial f_{i1}}{\partial v_{ix}}\right)=$$
$$=-\frac{e}{Mv_i}\frac{df_{i0}}{dv_i}(v_{ix}E_x+v_{iy}E_y),\quad (4.2.2)$$

$$(c^2k^2-\omega^2)E_{x,y}=4\pi e i\omega\left(\int v_{ex,y}f_{e1}d\mathbf{v}_e-\int v_{ix,y}f_{i1}d\mathbf{v}_i\right).\quad (4.2.3)$$

Далее целесообразно перейти в пространстве скоростей $\mathbf{v}_e$ и $\mathbf{v}_i$ от декартовых координат v_x, v_y, v_z к цилиндрическим v_ρ, v_z, ψ. При этом, используя формулу

$$v_x\frac{\partial f}{\partial v_y}-v_y\frac{\partial f}{\partial v_x}=\frac{\partial f}{\partial \psi},$$

из (1), (2) получаем для максвелловских распределений f_{e0}, f_{i0} уравнения

$$\frac{\partial f_{e1}}{\partial\psi_e}+i\left(\frac{\omega-kv_{ez}-i\bar{\nu}_e}{\omega_H}\right)f_{e1}=K_e\exp\left(-\frac{mv_e^2}{2\varkappa T_e}\right)\times$$
$$\times\{\cos\psi_e v_{e\rho}(\varphi_{ex}[f_{e1}]+\varphi_{ix}[f_{i1}])+\sin\psi_e v_{e\rho}(\varphi_{ey}[f_{e1}]+\varphi_{iy}[f_{i1}])\},\quad (4.2.4)$$

$$\frac{\partial f_{i1}}{\partial\psi_i}-i\left(\frac{\omega-kv_{iz}-i\bar{\nu}_i}{\Omega_H}\right)f_{i1}=K_i\exp\left(-\frac{Mv_i^2}{2\varkappa T_i}\right)\times$$
$$\times\{\cos\psi_i v_{i\rho}(\varphi_{ex}[f_{e1}]+\varphi_{ix}[f_{i1}])+v_{i\rho}\sin\psi_i(\varphi_{ey}[f_{e1}]+\varphi_{iy}[f_{i1}])\},\quad (4.2.5)$$

где

$$K_e=\frac{eN}{\omega_H\varkappa T_e}\left(\frac{m}{2\pi\varkappa T_e}\right)^{3/2},\quad K_i=-\frac{eN}{\Omega_H\varkappa T_i}\left(\frac{M}{2\pi\varkappa T_i}\right)^{3/2},$$
$$\varphi_{ex,y}[f_{e1}]=\frac{4\pi e i\omega}{c^2k^2-\omega^2}\int v_{ex,y}f_{e1}d\mathbf{v}_e,\quad (4.2.6)$$
$$\varphi_{ix,y}[f_{i1}]=\frac{4\pi e i\omega}{c^2k^2-\omega^2}\int v_{ix,y}f_{i1}d\mathbf{v}_i.$$

Здесь и ниже (в этом параграфе) квадратные скобки будут служить обозначением функциональной зависимости, определяемой соотношением (6). Так, например, чтобы получить $\varphi_{ex}[a]$, нужно в первое из соотношений (6) подставить вместо f_{e1} величину a.

Если бы написать аналогичные (4) — (6) уравнения для продольных волн, распространяющихся вдоль $\mathbf{H}_0$, то в их правых частях члены, содержащие угол ψ, отсутствовали бы. Это, как указывалось в предшествующем параграфе, означает, что, несмотря на формальное присутствие гирочастот ω_H и Ω_H, распространение характеризуется такими же зависимостями, как и в изотропной плазме.

Введем для электронов и ионов следующие комбинации:

$$\varphi_{e1,\,i1} = \varphi_{ex,\,ix} + i\varphi_{ey,\,iy}; \quad \varphi_{e2,\,i2} = \varphi_{ex,\,ix} - i\varphi_{ey,\,iy}.$$

При учете (6)

$$\begin{aligned} \varphi_{e1,2} &= \frac{4\pi e i\omega}{c^2k^2 - \omega^2} \int v_{e\rho} \exp(\pm i\psi_e) f_{e1} d\mathbf{v}_e, \\ \varphi_{i1,2} &= -\frac{4\pi e i\omega}{c^2k^2 - \omega^2} \int v_{i\rho} \exp(\pm i\psi_i) f_{i1} d\mathbf{v}_i. \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

Используя обозначение (7), можно записать уравнения (4), (5) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_{e1}}{\partial \psi_e} + G_e f_{e1} &= h_{e1}(\varphi_{e1}[f_{e1}] + \varphi_{i1}[f_{i1}]) + h_{e2}(\varphi_{e2}[f_{e1}] + \varphi_{i2}[f_{i1}]), \\ \frac{\partial f_{i1}}{\partial \psi_i} + G_i f_{i1} &= h_{i1}(\varphi_{e1}[f_{e1}] + \varphi_{i1}[f_{i1}]) + h_{i2}(\varphi_{e2}[f_{e1}] + \varphi_{i2}[f_{i1}]), \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

где

$$G_e = \frac{i(\omega - kv_{ez} - i\bar{\nu}_e)}{\omega_H}, \quad G_i = -\frac{i(\omega - kv_{iz} - i\bar{\nu}_i)}{\Omega_H},$$

$$h_{e1,2} = \frac{1}{2} K_e \exp\left(-mv_e^2/2\varkappa T_e\right) v_{e\rho} \exp(\mp i\psi_e),$$

$$h_{i1,2} = \frac{1}{2} K_i \exp\left(-Mv_i^2/2\varkappa T_i\right) v_{i\rho} \exp(\mp i\psi_i).$$

При интегрировании уравнений (8) нужно учесть, что функционалы $\varphi_{1,2}$ от ψ_e, ψ_i не зависят. Тогда, используя стандартный метод решения линейных дифференциальных уравнений 1-го порядка, получаем

$$\begin{aligned} f_{e1}(\psi_e) &= a_e\alpha_e(\psi_e) + \alpha_e(\psi_e)(\varphi_{e1}[f_{e1}] + \varphi_{i1}[f_{i1}]) \times \\ &\times \int_0^{\psi_e} \frac{h_{e1}(x)}{\alpha_e(x)} dx + \alpha_e(\psi_e)(\varphi_{e2}[f_{e1}] + \varphi_{i2}[f_{i1}]) \int_0^{\psi_e} \frac{h_{e2}(x)}{\alpha_e(x)} dx, \\ f_{i1}(\varphi_i) &= a_i\alpha_i(\psi_i) + \alpha_i(\psi_i)(\varphi_{e1}[f_{e1}] + \varphi_{i1}[f_{i1}]) \times \\ &\times \int_0^{\psi_i} \frac{h_{i1}(x)}{\alpha_i(x)} dx + \alpha_i(\psi_i)(\varphi_{e2}[f_{e1}] + \varphi_{i2}[f_{i1}]) \int_0^{\psi_i} \frac{h_{i2}(x)}{\alpha_i(x)} dx, \end{aligned} \tag{4.2.9}$$

где

$$\alpha_e(\psi_e) = \exp\left(-\int_0^{\psi_e} G_e(x)\,dx\right), \quad \alpha_i(\psi_i) = \exp\left(-\int_0^{\psi_i} G_i(x)\,dx\right).$$

Обозначим через γ_{e1}, γ_{e2}, γ_{i1}, γ_{i2} выражения

$$\gamma_{e1,e2} = \alpha_e(\psi_e) \int\limits_0^{\psi_e} \frac{h_{e1,2}(x)}{\alpha_e(x)}\, dx,$$
$$\gamma_{i1,i2} = \alpha_i(\psi_i) \int\limits_0^{\psi_i} \frac{h_{i1,2}(x)}{\alpha_i(x)}\, dx. \qquad (4.2.10)$$

Применим к обеим частям (9) операции, определяемые функциями φ_{e1} [для первого из уравнений (9)] и φ_{i1} [для второго из уравнений (9)], и сложим полученные соотношения. Те же операции проделаем, используя функционалы φ_{e2} и φ_{i2}. В итоге получаем

$$(\varphi_{e1}[f_{e1}] + \varphi_{i1}[f_{i1}])(1 - \varphi_{e1}[\gamma_{e1}] - \varphi_{i1}[\gamma_{i1}]) =$$
$$= \varphi_{e1}[a_e\alpha_e] + \varphi_{i1}[a_i\alpha_i] + (\varphi_{e2}[f_{e1}] + \varphi_{i2}[f_{i1}])(\varphi_{e1}[\gamma_{e2}] + \varphi_{i1}[\gamma_{i2}]),$$
$$(4.2.11)$$
$$(\varphi_{e2}[f_{e1}] + \varphi_{i2}[f_{i1}])(1 - \varphi_{e2}[\gamma_{e2}] - \varphi_{i2}[\gamma_{i2}]) =$$
$$= \varphi_{e2}[a_e\alpha_e] + \varphi_{i2}[a_i\alpha_i] + (\varphi_{e1}[f_{e1}] + \varphi_{i1}[f_{i1}])(\varphi_{e2}[\gamma_{e1}] + \varphi_{i2}[\gamma_{i1}]).$$

Далее воспользуемся периодичностью функций f_{e1} относительно ψ_e и f_{i1} относительно ψ_i. Из условия $f_{e1}(2\pi) = f_{e1}(0)$ и $f_{i1}(2\pi) = f_{i1}(0)$ определяем постоянные интегрирования a_e и a_i:

$$a_e = \{\gamma_{e1}(2\pi)(\varphi_{e1}[f_{e1}] + \varphi_{i1}[f_{i1}]) + \gamma_{e2}(2\pi)(\varphi_{e2}[f_{e1}] +$$
$$+ \varphi_{i2}[f_{i1}])\}[1 - \alpha_i(2\pi)]^{-1},$$
$$a_i = \{\gamma_{i1}(2\pi)(\varphi_{e1}[f_{e1}] + \varphi_{i1}[f_{i1}]) + \gamma_{i2}(2\pi)(\varphi_{e2}[f_{e1}] + \qquad (4.2.12)$$
$$+ \varphi_{i2}[f_{i1}])\}[1 - \alpha_i(2\pi)]^{-1}.$$

Подставляя значения a_e и a_i (12) в (11) и обозначая

$$\Phi_1 = \varphi_{e1}[f_{e1}] + \varphi_{i1}[f_{i1}], \quad \Phi_2 = \varphi_{e2}[f_{e1}] + \varphi_{i2}[f_{i1}], \qquad (4.2.13)$$

приходим к системе алгебраических уравнений для Φ_1 и Φ_2:

$$\left\{1 - \varphi_{e1}\left[\gamma_{e1} + \alpha_e \frac{\gamma_{e1}(2\pi)}{1 - \alpha_e(2\pi)}\right] - \varphi_{i1}\left[\gamma_{i1} + \alpha_i \frac{\gamma_{i1}(2\pi)}{1 - \alpha_i(2\pi)}\right]\right\}\Phi_1 -$$
$$- \left\{\varphi_{e1}\left[\gamma_{e2} + \alpha_e \frac{\gamma_{e2}(2\pi)}{1 - \alpha_e(2\pi)}\right] - \varphi_{i1}\left[\gamma_{i2} + \alpha_i \frac{\gamma_{i2}(2\pi)}{1 - \alpha_i(2\pi)}\right]\right\}\Phi_2 = 0,$$
$$(4.2.14)$$
$$\left\{\varphi_{i2}\left[\gamma_{i1} + \alpha_i \frac{\gamma_{i1}(2\pi)}{1 - \alpha_i(2\pi)}\right] - \varphi_{e2}\left[\gamma_{e1} + \alpha_e \frac{\gamma_{e1}(2\pi)}{1 - \alpha_e(2\pi)}\right]\right\}\Phi_1 +$$
$$+ \left\{1 - \varphi_{e2}\left[\gamma_{e2} + \alpha_e \frac{\gamma_{e2}(2\pi)}{1 - \alpha_e(2\pi)}\right] - \varphi_{i2}\left[\gamma_{i2} + \alpha_i \frac{\gamma_{i2}(2\pi)}{1 - \alpha_i(2\pi)}\right]\right\}\Phi_2 = 0.$$

Используя определения α_e, α_i и $\gamma_{1,2}$ (10), после элементарного интегрирования имеем

$$\alpha_e = \exp\left\{-i\left(\frac{\omega - kv_{ez} - i\bar{\nu}_e}{\omega_H}\right)\psi_e\right\},$$

$$\gamma_{e1,2} = \frac{1}{2} K_e \exp\left(-\frac{mv_e^2}{2\varkappa T_e}\right) v_{e\rho}\left[\exp(\alpha_e\psi_e) - \exp(\mp i\psi_e)\right],$$

$$\alpha_i = \exp\left\{i\left(\frac{\omega - kv_{iz} - i\bar{\nu}_i}{\Omega_H}\right)\psi_i\right\}, \tag{4.2.15}$$

$$\gamma_{i1,2} = \frac{1}{2} K_i \exp\left(-\frac{Mv_i^2}{2\varkappa T_i}\right) v_{i\rho}\left[\exp(\alpha_i\psi_i) - \exp(\mp i\psi_i)\right].$$

Подставляя в (7) вместо f_{e1} или f_{i1} величины, заключенные в фигурные скобки, проинтегрируем по ψ_e и ψ_i, а затем по v_ρ. При этом нужно учесть, что $v^2 = v_z^2 + v_\rho^2$, и воспользоваться формулой

$$\int_0^\infty v_\rho^2 \exp\left(-\frac{mv_\rho^2}{2\varkappa T}\right) dv_\rho = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\varkappa T}{m}\right)^{3/2}.$$

В результате при интегрировании по ψ_e и ψ_i можно легко показать, что

$$\varphi_{e1}\left\{\gamma_{e2} + \alpha_e \frac{\gamma_{e2}(2\pi)}{1-\alpha_e(2\pi)}\right\} = \varphi_{e2}\left\{\gamma_{e1} + \alpha_e \frac{\gamma_{e1}(2\pi)}{1-\alpha_e(2\pi)}\right\} =$$

$$= \varphi_{i1}\left\{\gamma_{i2} + \alpha_i \frac{\gamma_{i2}(2\pi)}{1-\alpha_i(2\pi)}\right\} = \varphi_{i2}\left\{\gamma_{i1} + \alpha_i \frac{\gamma_{i1}(2\pi)}{1-\alpha_i(2\pi)}\right\} = 0. \tag{4.2.16}$$

Обращение в нуль этих величин означает распадение дисперсионного уравнения (14) на два сомножителя, представляющие дисперсионные уравнения распространяющихся вдоль $\mathbf{H}_0$ поперечных волн с $\tilde{n}^2 = \tilde{n}_+^2$ и $\tilde{n}^2 = \tilde{n}_-^2$. После интегрирования по v_ρ и ψ приходим к совокупности идентичных соотношений:

$$\varphi_{e1,2}\left\{\gamma_{e1} + \alpha_e \frac{\gamma_{e1}(2\pi)}{1-\alpha_e(2\pi)}\right\} =$$

$$= -\frac{4\pi e^2\omega N}{m(c^2k^2-\omega^2)}\left(\frac{m}{2\pi\varkappa T_e}\right)^{1/2}\int \frac{\exp\left(-mv_{ez}^2/2\varkappa T_e\right) dv_{ez}}{\omega - kv_{ez} - i\bar{\nu}_e \mp \omega_H},$$

$$\varphi_{i1,2}\left\{\gamma_{i1} + \alpha_i \frac{\gamma_{i1}(2\pi)}{1-\alpha_i(2\pi)}\right\} = \tag{4.2.17}$$

$$= -\frac{4\pi e^2\omega N}{M(c^2k^2-\omega^2)}\left(\frac{M}{2\pi\varkappa T_i}\right)^{1/2}\int \frac{\exp\left(-Mv_{iz}^2/2\varkappa T_i\right) dv_{iz}}{\omega - kv_{iz} - i\bar{\nu}_i \pm \Omega_H}.$$

Используя (17), приходим с учетом (16) к дисперсионным уравнениям

$$c^2k^2 - \omega^2 - \omega_{e0}^2\left(\frac{m}{2\pi\varkappa T_e}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega \exp\left(-mv_{ez}^2/2\varkappa T_e\right) dv_{ez}}{\omega - kv_{ez} - \omega_H - i\bar{\nu}_e} -$$

$$- \omega_{i0}^2\left(\frac{M}{2\pi\varkappa T_i}\right)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega \exp\left(-Mv_{iz}^2/2\varkappa T_i\right) dv_{iz}}{\omega - kv_{iz} + \Omega_H - i\bar{\nu}_i} = 0, \tag{4.2.18}$$

$$c^2k^2-\omega^2-\omega_{e0}^2\left(\frac{m}{2\pi\varkappa T_e}\right)^{1/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega\exp\left(-mv_{ez}^2/2\varkappa T_e\right)dv_{ez}}{\omega-kv_{ez}+\omega_H-i\bar{\nu}_e}-$$

$$-\omega_{i0}^2\left(\frac{M}{2\pi\varkappa T_i}\right)^{1/2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\omega\exp\left(-Mv_{iz}^2/2\varkappa T_i\right)dv_{iz}}{\omega-kv_{iz}-\Omega_H-i\bar{\nu}_i}=0. \quad (4.2.19)$$

Первое из них, как показывает переход к холодной плазме, отвечает волне, для которой $\tilde{n}^2=\tilde{n}_-^2$, а для второй $\tilde{n}^2=\tilde{n}_+^2$. Например, из (18), опуская член с kv_{ez} и столкновения, получаем

$$c^2k^2-\omega^2-\frac{\omega_{e0}^2\omega}{\omega-\omega_H}-\frac{\omega_{i0}^2\omega}{\omega+\Omega_H}=0,$$

что приводит к формуле для $n^2=c^2k^2/\omega^2$ $(n^2>0)$ вида

$$n_-^2=1-v_e/(1-\sqrt{u_e})-v_i/(1+\sqrt{u_i}).$$

Последняя без учета движения ионов совпадает с (3.3.24). Учет влияния ионов в этом случае имеет очевидный характер.

По отношению к интегралам в дисперсионных уравнениях (18), (19) можно сделать те же замечания, что и для продольной волны (п. 4.1). Интегралы в (18), (19) при исчезновении столкновений содержат особенности в подынтегральных выражениях при $\omega\pm\omega_H=kv_{ez}$ или $\omega\mp\Omega_H=kv_{iz}$. В большей степени существенны особенности со знаком минус, которые можно записать в виде

$$\omega-\omega_H=\mathbf{kv}_e,\quad \omega-\Omega_H=\mathbf{kv}_i. \quad (4.2.20)$$

Излучение волн с $n^2=n_-^2$ при выполнении первого из условий (2) и волн с $n^2=n_+^2$ при выполнении второго из этих условий называют *гирорезонансным*. Такое же наименование относят и к связанному с этим излучением бесстолкновительному поглощению, являющемуся для поперечных волн аналогом затухания Ландау для продольных волн. Гирорезонансное затухание для поперечных волн методом кинетического уравнения впервые было рассмотрено в [9].

Обратимся сначала к уравнению для волны (18). В этом случае условие гирорезонанса выполнено для электронов. При не очень малой расстройке $|\omega-\omega_H|$, когда

$$|\omega-\omega_H|\gg kv_{T_e}, \quad (4.2.21)$$

это соотношение написано для малых частот столкновений $\bar{\nu}_e$. Справа вместо средней скорости v_{T_e} можно написать v_{ez}.

При учете особенности в первом из интегралов (18) мы, как это уже делалось в предшествующем параграфе, перейдем к случаю исчезающих столкновений. Заменим интегрирование вдоль действительной оси от $-\infty$ до ∞ интегрированием по контуру типа, изображенного на рис. 4.1, *б*. Необходимо только учесть, что особая точка на действительной оси будет иметь координату

$\operatorname{Re} v_z = (\omega - \omega_H)/k$. Условие (21) обеспечивает слабость гирорезонансного затухания, что было учтено при выборе пути интегрирования.

В результате в отсутствие столкновений из (18) получаем

$$c^2k^2 - \omega^2 + \frac{\omega_{e0}^2\omega}{\omega - \omega_H} - \frac{\omega_{e0}^2\omega k^2}{(\omega - \omega_H)^3}\frac{\varkappa T_e}{m} + \frac{\omega_{i0}^2\omega}{\omega + \Omega_H} - \\ - \frac{\omega_{i0}^2\omega k^2}{(\omega + \Omega_H)^3}\frac{\varkappa T_i}{M} - i\frac{\omega\pi\omega_{e0}^2}{k}\left(\frac{m}{2\pi\varkappa T_e}\right)^{1/2}\exp\left\{-\frac{m(\omega - \omega_H)^2}{2\varkappa T_e k^2}\right\} = 0. \tag{4.2.22}$$

Последний член равен πi, умноженному на вычет относительно полюса подынтегрального выражения в (18).

Как и ранее, при решении (22) используем последовательные приближения. Считая частоту ω комплексной (4.1.26), при $\gamma \ll \overline{\omega}$ в первом приближении затухания не рассмативаем. Тогда из (22) имеем

$$c^2k^2 - \overline{\omega}^2 - \frac{\omega_{e0}^2\overline{\omega}}{\overline{\omega} - \omega_H} + \frac{\omega_{e0}^2\overline{\omega}k^2}{(\overline{\omega} - \omega_H)^3}\frac{\varkappa T_e}{m} - \\ - \frac{\omega_{i0}^2\overline{\omega}}{\overline{\omega} + \Omega_H} + \frac{\omega_{i0}^2\omega k^2}{(\omega + \Omega_H)^3}\frac{\varkappa T_i}{M} = 0. \tag{4.2.23}$$

Рассмотрим высокочастотный случай, когда

$$\overline{\omega} \gg \Omega_H. \tag{4.2.24}$$

Слагаемыми, связанными с движением ионов, в (23) можно пренебречь. В результате получаем формулу для показателя преломления волны с $n^2 = n_-^2$, а именно,

$$n_-^2 = \left(1 - \frac{v_e}{1 - \sqrt{u_e}}\right)\left\{1 + \frac{\beta_{T_e}^2 v_e}{(1 - \sqrt{u_e})^3}\right\}^{-1}. \tag{4.2.25}$$

Легко установить, что добавочное слагаемое в знаменателе имеет поправочный характер по отношению к приближению холодной плазмы, так как в силу (21) $|1 - \sqrt{u_e}| \gg \beta_{T_e} n$ и грубо $n^2 \approx v_e/(\sqrt{u_e} - 1)$.

Бесстолкновительное электронное гирорезонансное затухание представляет, естественно, основной интерес в высокочастотном случае, когда $\omega \approx \omega_H$. Из (22), отделяя мнимую часть в уравнении (22), с учетом (25) получаем формулу для декремента затухания

$$\gamma = \frac{\overline{\omega}(\omega_H - \overline{\omega})}{k}\left(\frac{m\pi}{2\varkappa T_e}\right)^{1/2}\exp\left\{-\frac{m(\overline{\omega} - \omega_H)^2}{2\varkappa T_e k^2}\right\}. \tag{4.2.26}$$

Затухание (26) получено при дополнительном условии $\omega_{e0}^2/(\omega_H - \overline{\omega})\overline{\omega} \gg 1$, которое выполняется в плотной плазме или

при достаточной близости частот ω_H и $\bar{\omega}$. Заметим, что выполнимость последнего неравенства и положительность γ (26) обеспечиваются только при $\omega_H > \bar{\omega}$. При $\omega_H < \bar{\omega}$ ($\bar{\omega} \approx \omega_H$) из (25) можно убедиться, что $\tilde{n}_-^2 < 0$ (плазма непрозрачна и распространение волн типа (25) становится невозможным).

В терминах задачи о колебаниях плазмы случай $\tilde{n}^2 < 0$ здесь сводится к следующему. В отсутствие бесстолкновительного затухания при действительных k решение с частотами $\omega \approx \omega_H$ вообще отсутствует.

В силу (21) затухание (26) экспоненциально мало. В то же время имеется тенденция роста γ при фиксированных kv_{T_e} с уменьшением расстройки $|\omega_H - \omega|$. Формально при $|\omega_H - \omega| \approx \approx kv_{T_e}$ $\gamma \sim \omega$. Этот вывод подтверждается строгими вычислениями [1], проведенными при отказе от ограничения (21). Заметим также, что при $\omega_H \approx \omega$ формула (26) явно несправедлива. Расчеты, однако, показывают, что и здесь $\gamma \sim \omega$.

Область частот $\omega \approx \Omega_H$ интересна тем, что здесь создаются условия для гирорезонанса ионов. Об этом резонансе можно говорить, имея в виду волну типа (19). При условии

$$|\omega - \Omega_H| \gg v_{T_i} k, \tag{4.2.27}$$

дополненного ограничением $|\omega - \Omega_H|/\omega \ll 1$, мы, действуя так же, как и ранее в этом параграфе, в первом приближении имеем дисперсионное уравнение

$$c^2k^2 - \omega^2 - \frac{\omega_{i0}^2 \omega}{\omega - \Omega_H} - \frac{\omega_{i0}^2 \omega k^2}{(\omega - \Omega_H)^3} \frac{\varkappa T_i}{M} = 0, \tag{4.2.28}$$

откуда для показателя преломления получаем аналогичное (25) соотношение

$$n_+^2 = \left(1 - \frac{v_i}{1 - \sqrt{u_i}}\right)\left\{1 + \frac{\beta_{T_i}^2 v_i}{(1 - \sqrt{u_i})^3}\right\}^{-1}. \tag{4.2.29}$$

Волны, описываемые (28) или (29), называют *электромагнитными ионными циклотронными волнами*. В силу аналогичности зависимостей для γ получается формула, которую можно выписать, используя лишь переобозначения в соотношении (26),

$$\gamma = \frac{\bar{\omega}\left(\Omega_H - \bar{\omega}\right)}{k}\left(\frac{\pi M}{2\varkappa T_i}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{M(\omega - \Omega_H)^2}{2\varkappa T_i k^2}\right\}. \tag{4.2.30}$$

Естественно, что $\gamma > 0$, так как распространение ионных циклотронных волн возможно лишь при $\Omega_H > \omega$ ($\Omega_H \approx \omega$).

На низких частотах

$$\omega \ll \Omega_H, \tag{4.2.31}$$

как уже было показано в п. 3.5, имеет место распространение магнитогидродинамических волн. Выпишем формулы для этих

волн с учетом тепловых поправок. Пренебрегая малыми в силу неравенства $M \gg m$ членами, из уравнения (28), дополненного учетом ионного гирорезонансного поглощения, получаем

$$c^2k^2 - \omega^2 - \frac{\omega_{i0}^2\omega^2}{\Omega_H^2} + \frac{\omega_{i0}^2}{\Omega_H^3} k^2 \frac{\varkappa T_i}{M} + \\ + \pi i\omega \frac{\omega_{i0}^2}{k}\left(\frac{M}{2\pi\varkappa T_i}\right)^{1/2} \exp\left(-\frac{M\Omega_H^2}{2\varkappa T_i k^2}\right) = 0. \qquad (4.2.32)$$

Отсюда в первом приближении

$$n_-^2 = \left(1 + \frac{v_i}{u_i}\right)\left(1 + \beta_{T_i}^2 \frac{v_i}{u_i}\right)^{-1}. \qquad (4.2.33)$$

Нужно учесть, что $v_i/u_i = c^2H_0^2/4\pi NM = c^2/v_A^2$, где $v_A^2 = H_0/\sqrt{4\pi NM}$ — альвеновская скорость. Обычно интерес представляют случаи, когда $v_A \ll c$. Тогда можно пренебречь в числителе (33) единицей. После этого легко получить формулу для фазовой скорости $v_\Phi = \omega/k$. В результате, используя (33),

$$v_\Phi^2 = \frac{c^2}{n_-^2} = v_A^2\left(1 + \frac{v_{T_i}^2}{v_A^2}\frac{\omega}{\Omega_H}\right). \qquad (4.2.34)$$

Формула (34) является результатом предельного перехода в область частот (31) для волны (18). Если же этот переход сделать для другой волны, то мы приходим к соотношению

$$v_{\Phi+}^2 = \frac{c}{n_+^2} = v_A^2\left(1 - \frac{v_{T_i}^2}{v_A^2}\frac{\omega}{\Omega_H}\right). \qquad (4.2.35)$$

Формулы (34), (35) получены при условии $\Omega_H \gg kv_{T_i}$. Полагая $\omega/k = v_A$, получаем, что $v_{T_i}\omega/v_A\Omega_H \ll 1$. Отсюда следует, что в наиболее важном случае $v_A > v_{T_i}$ тепловые поправки малы. Они могут быть заметными при хорошем выполнении требования $v_{T_i} > v_A$. Как уже говорилось, более типичен обратный случай, $v_A \gtrsim v_{T_i}$ (или даже $v_A \gg v_{T_i}$). Тогда скорости $v_{\Phi-}$ и $v_{\Phi+}$ совпадают, так что $v_{\Phi-}^2 = v_{\Phi+}^2 = v_A^2$. Напишем теперь формулу для декремента затухания магнитогидродинамических волн, которая получается из (32) при $v_\Phi^2 = v_A^2$ и является одинаковой для волн разных типов:

$$\gamma = \Omega_H \frac{v_A\Omega_H}{v_{T_i}\omega}\sqrt{\frac{\pi}{8}}\exp\left(-\frac{v_A^2\Omega_H^2}{v_{T_i}^2\omega^2}\right). \qquad (4.2.36)$$

Это соотношение при использовании равенства $\omega/k = v_A$ и определения гирорадиуса ионов $r_{Hi} = v_{T_i}/\Omega_H$ может быть записано в виде

$$\gamma = \Omega_H (kr_{Hi})^{-1}\sqrt{\pi/2}\exp\left(-1/k^2r_{Hi}^2\right).$$

Таким образом, требование малости затухания сводится к малости гирорадиуса по сравнению с длиной волны λ (точнее, с $\lambda/2\pi$).

Для поперечных волн более характерной является задача не о колебаниях, а о распространении волн, когда частота ω считается вещественной и заданной, а значения k считаются комплексными (вводятся показатели преломления и поглощения, так что $k=\frac{\omega}{c}n-i\frac{\omega}{c}q$) *). Без учета поглощения ($n\gg q$) формулы для показателя преломления уже были выписаны. Остается найти значения q, характеризующие бесстолкновительное поглощение. Достаточно воспользоваться (4.1.36). Задача сводится к определению групповой скорости $v_{\text{гр}}$. Для магнитогидродинамических волн, когда $v_A \gtrsim v_{T_i}$, дисперсия отсутствует и групповая скорость $v_{\text{гр}}=v_A$. Из (4.1.36)

$$q=\frac{c}{\omega}v_A^{-1}\gamma=\frac{c}{v_{T_i}}\frac{\Omega^2{}_H}{\omega^2}\sqrt{\frac{\pi}{8}}\exp\left(-\frac{v_A^2\Omega_H^2}{v_{T_i}^2\omega^2}\right). \tag{4.2.37}$$

Приведем значения показателя поглощения для гирорезонансного поглощения в высокочастотном случае, соответствующего декременту затухания (26). Определение q будет сделано при $(\omega_H-\omega)/\omega\ll 1$, когда можно использовать соотношение $n^2=$ $=v_e/(\sqrt{u_e}-1)$. Тогда $v_{\text{гр}}=d\omega/dk=2(c/n)\ (\omega_H-\omega)/\omega_H$. Используя связь (4.1.36), которая применима для слабого поглощения, из (26) при учете приведенной формулы для $v_{\text{гр}}$ находим

$$q=\frac{1}{\sqrt{2}\beta_{T_e}}\exp\left\{-\frac{(\sqrt{u_e}-1)^2}{2\beta_{T_e}^2n^2}\right\}. \tag{4.2.38}$$

Формула (38), согласно которой отношение q/n является экспоненциально малым, позволяет установить правильную тенденцию нарастания q с уменьшение расстройки. При $\beta_e n\sim(\sqrt{u_e}-1)$ $(kv_{T_e}\sim(\omega_H-\omega))$ по оценкам из (38) $q\sim n$. В то же время нужно подчеркнуть, что полученное соотношение применимо только при ограничении (21), и переход к исчезающей расстройке здесь не является законным.

4.3. Волны при распространении в направлении, поперечном к внешнему магнитному полю

При перпендикулярных $\mathbf{k}$ и $\mathbf{H}_0$, как было установлено в гл. 3, существует связь между необыкновенной и плазменной волнами. Например, при изменении параметра $v_e=\omega_{e0}^2/\omega^2$ (при фиксиро-

*) Когда n считается комплексным (гл. 3) и принимается $n=n'-in''$, где n'' — характеризует поглощение волн, то $n''=q$.

ванных $u_e = \omega_H^2/\omega^2$) этим волнам соответствуют разные части одних и тех же дисперсионных кривых.

В то же время при $\alpha = \pi/2$ полностью отделяется дисперсионное уравнение для обыкновенной волны. На примере этой волны мы и попытаемся проследить некоторые особенности поперечного распространения при учете теплового движения электронов. Движение ионов рассматриваться не будет, так как на низких частотах, $\omega \ll \omega_{e0}$, плазма оказывается непрозрачной для волн обыкновенного типа. Кроме того, мы сделаем также замечание и о распространении безвихревых (электростатических) волн. В чистом виде такие волны не существуют, однако их приближенное выделение возможно. Как было показано в гл. 3, при $\alpha = \pi/2$ обыкновенные волны поляризованы линейно (вектор $\mathbf{E}$ направлен по $\mathbf{H}_0$). Этот вывод сохраняется и при кинетическом подходе. С ним связана и сама возможность отделения обыкновенной волны. Далее в этом параграфе примем, что поле $\mathbf{H}_0$ направлено по оси z, а волновой вектор $\mathbf{k}$ — по оси x. Для простоты опустим частоты столкновений, поскольку здесь вопрос о предельном переходе $\nu_e \to 0$ в той форме, как это было сделано в п. 4.1, не возникает.

Учитывая сразу же линейный характер поляризации в обыкновенной волне и то, что функция f_{e1} зависит от времени t по гармоническому закону, выпишем кинетическое уравнение в цилиндрических координатах. Такая запись уже фигурировала в предшествующем параграфе. Часть введенных там обозначений используется ниже. Из уравнения (4.1.18) в рассматриваемом случае имеем

$$\frac{\partial f_{e1}}{\partial \psi} + i\left(\frac{\omega - kv_\rho \cos\psi}{\omega_H}\right) f_{e1} = K_e \exp\left(-\frac{mv_e^2}{2\varkappa T_e}\right) v_{ez} E_z. \quad (4.3.1)$$

Из уравнений электродинамики (4.1.14), (4.1.15) (см. также п. 4.2) при сделанных оговорках получаем

$$E_z = \frac{4\pi i\omega e}{c^2k^2 - \omega^2} \int v_{ez} f_{e1} d\mathbf{v}_e. \quad (4.3.2)$$

Решение (1) складывается из общего решения без правой части и частного с правой частью (не зависящей от ψ). Интегрируя (1), находим

$$f_{e1} = b_0 \exp\left(-\frac{i\omega\psi + ikv_\rho \sin\psi}{\omega_H}\right) + \\ + K_e \exp\left(-\frac{mv_e^2}{2\varkappa T_e}\right) v_{ez} E_z \exp\left(-\frac{i\omega\psi + ikv_\rho \sin\psi}{\omega_H}\right) \times \\ \times \int_0^\psi \exp\left(\frac{i\omega\xi + ikv_\rho \sin\xi}{\omega_H}\right) d\xi. \quad (4.3.3)$$

Далее, нужно найти постоянную интегрирования b_0, для чего воспользуем-

ся условием периодичности $f_{e1}(0) = f_{e1}(2\pi)$. Отсюда получаем

$$b_0 = \frac{v_{ez}E_zK_e \exp\left(-mv_e^2/2\varkappa T_e\right) I(2\pi)}{\exp(2\pi i\omega/\omega_H) - 1},$$

где $I(\psi) = \int\limits_0^\psi \exp\left(\frac{i\omega\xi + ikv_\rho \sin\xi}{\omega_H}\right) d\xi$. Подставляя значение b_0 в (3), получаем

$$f_{e1} = v_{ez}E_zK_e \exp\left(-\frac{mv_e^2}{2\varkappa T_e}\right) \exp\left(-\frac{i\omega\psi + ikv_\rho \sin\psi}{\omega_H}\right)\times$$
$$\times\left\{\exp\left(-\frac{2\pi i\omega}{\omega_H}\right) I(2\pi) + I(\psi)\right\}. \quad (4.3.4)$$

Используя соотношение

$$\exp\left(-\frac{ikv_\rho \sin\psi}{\omega_H}\right) = \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} J_n\left(\frac{kv_\rho}{\omega_H}\right) \exp(-in\psi), \quad (4.3.5)$$

где J_n — функция Бесселя, для f_{e1} (4) после несложных преобразований получаем

$$f_{e1} = iK_e v_{ez} E_z \exp\left(-mv_e^2/2\varkappa T_e\right)\times$$
$$\times \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} J_n\left(\frac{kv_\rho}{\omega_H}\right) \exp\left(-in\psi + i\sin\psi\frac{kv_\rho}{\omega_H}\right)\left(n - \frac{\omega}{\omega_H}\right)^{-1}. \quad (4.3.6)$$

Подставляя распределение (6) в (2) и используя при интегрировании по ψ соотношение (5) (без знака минус во всех экспонентах), приходим к дисперсионному уравнению для обыкновенной волны

$$\frac{\omega_{e0}^2\omega}{c^2k^2 - \omega^2}\frac{m}{\varkappa T_e}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\int\limits_0^\infty J_n^2\left(\frac{kv_\rho}{\omega_H}\right)(\omega - n\omega_H)^{-1}\times$$
$$\times v_\rho \exp\left(-\frac{mv_\rho^2}{2\varkappa T_e}\right) dv_\rho = 1. \quad (4.3.7)$$

При выполнении ограничения

$$\delta = k^2 v_{T_e}^2/\omega_H^2 \ll 1 \quad (4.3.8)$$

влияние теплового движения будет относительно незначительным. Последнее неравенство означает малость гирорадиуса электронов по сравнению с длиной волны $\lambda = 2\pi/k$. Учитывая тепловые поправки, ограничимся только первым приближением, когда при суммировании будут учтены члены с $J_0^2(kv_\rho/\omega_H)$ и $J_1^2(kv_\rho/\omega_H)$. Так как при условии (8) $J_0 \approx 1 - k^2v_\rho^2/4\omega_H^2$ и $J_1 \approx kv_\rho/2\omega_H$, то они, вообще говоря, дадут одинаковый вклад в поправочный член. Мы же учтем, что относительный вклад этих поправок возрастает вблизи гирорезонанса $\omega = \omega_H$, и оставим только члены порядка δ в (7), обусловленные вкладом $J_1^2(kv_\rho/\omega_H)$. Тогда из (7) с использованием

формулы

$$\int_0^\infty v_\rho^{2k+1} \exp\left(-\frac{mv_\rho^2}{2\varkappa T_e}\right) dv_\rho = \left(\frac{\varkappa T_e}{m}\right)^{k+1} \frac{k!}{2}$$

после интегрирования по v_ρ при $\omega \approx \omega_H$ получаем

$$\frac{\omega_{e0}^2}{c^2k^2 - \omega^2}\left(1 + \frac{\varkappa T_e}{m}\frac{k^2}{\omega^2 - \omega_H^2}\right) = 1. \tag{4.3.9}$$

Из (9) приходим к формуле [1, 10] для показателя преломления обыкновенной волны с учетом тепловых поправок

$$n_2^2 = (1 - v_e)\left(1 + \beta_{T_e}^2 \frac{v_e}{1 - u_e}\right)^{-1}. \tag{4.3.10}$$

Отсюда следует, что и при $\alpha = \pi/2$, если учитывать тепловое движение частиц, n_2^2 зависит от величины магнитного поля. При полном неучете теплового движения приходим к простой формуле для холодной изотропной плазмы

$$n_2^2 = 1 - v_e.$$

Обращает на себя внимание наличие в знаменателе подынтегрального выражения в (7) множителей, которые обращаются в нуль при $\omega = \pm n\omega_H$ (n — целое). В силу положительности ω и ω_H существенны только резонансы

$$\omega = n\omega_H \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots). \tag{4.3.11}$$

При условии (8) с ростом n вклад резонансов все слабее и слабее. Действительно, если при $\delta \ll 1$ провести интегрирование в (7), то с точностью до слагаемых порядка δ^3 включительно получаем

$$n_2^2 = 1 - v_e\left\{1 + \frac{\delta}{1 - u_e} + \frac{\delta^2}{4(1 - 4u_e)} + \frac{\delta^3}{24(1 - 9u_e)}\right\}. \tag{4.3.12}$$

При пренебрежении вкладом членов с δ^2 и δ^3 приходим к формуле (10). Если фиксировать относительные расстройки $|(\omega - \omega_H)/\omega|$, $|(\omega - 2\omega_H)/\omega|$, $|(\omega - 3\omega_H)/\omega|$, то при $\delta \ll 1$ вклад слагаемых, отвечающих более высоким n, становится все слабее. Если же рассматривать интервалы отклонений от резонансных частот, внутри которых мы грубо имеем одинаковые поправки, вносимые в соотношение $n_2^2 = 1 - v_e$, то эти интервалы с ростом номера гирорезонанса будут сужаться. Так, например, полагая, что $|\delta/(1 - u_e)| \sim 1$ и $|\delta^2/4(1 - 4u_e)| \sim 1$, получаем соответственно при $n_2^2 \sim 1$, что $|(\omega - \omega_H)/\omega| \sim \beta_e^2$ и $|(\omega - 2\omega_H)/\omega| \sim \beta_e^4$.

Появление особенностей в узких областях вблизи ω_H и ее гармоник — характерное следствие кинетического рассмотрения процесса распространения волн при $\cos\alpha = 0$. Если обратиться к (10), то для рассматриваемых волн с линейной поляризацией поля $\mathbf{E}$ (в направлении $\mathbf{H}_0$) вблизи $\omega \approx \omega_H$ имеется только одно значение n^2. В то же время, начиная с области частот $\omega \approx 2\omega_H$,

порядок дисперсионного уравнения (12) по отношению к n^2 повышается (укажем, что параметр δ можно написать в виде $\delta = \beta_{T_e}^2 n^2/u_e$). Таким образом, в областях гирорезонанса не только увеличивается вклад тепловых эффектов в распространение известных типов волн, но возможно существование и новых волн. Фактически решение вопроса об этих волнах не является простым. Волны могут оказаться сильно затухающими. Далее при очень больших n^2 нарушается важное условие (8) и анализ теряет наглядность. Очень существенно, что неустранимые особенности в дисперсионном уравнении при $\omega = n\omega_H$ имеют место только для бесстолкновительной плазмы. Наряду со столкновениями в областях $\omega \approx n\omega_H$ существенно использование релятивистского подхода, заключающегося в учете зависимости массы электрона от скорости теплового движения. Для обыкновенной волны это было сделано впервые в [12] и показано, что резонансные частотные особенности при $\omega = n\omega_H$ как бы замываются, и в данном случае нет оснований говорить о появлении каких-то новых ветвей для n^2, $\omega \approx n\omega_H$.

Использованный метод можно применить и для получения при $\alpha = \pi/2$ дисперсионного уравнения для продольной (плазменной) волны. Но эту волну можно рассматривать изолированно от необыкновенной волны лишь приближенно. Критерий, определяющий такую возможность, грубо соответствует хорошему выполнению условия $n^2 \gg 1$.

Так как плазменная волна является продольной, а поле направлено в ней по оси x, то в уравнении (1) нужно сделать замену $v_{ez}E_z$ на $v_{ex}E_x$. Как и ранее, в этом параграфе не рассматриваем для простоты движение ионов, при учете которых можно сходным образом получить соответствующие обобщающие результаты.

Из уравнений электродинамики для продольной волны имеем в интересующих нас здесь условиях уравнение

$$E_x = -\omega^{-1} 4\pi i e \int v_{ex} f_{e1} d\mathbf{v}_e. \qquad (4.3.13)$$

Возможна также запись соотношения для E_x в форме (4.1.20). Естественно, что обе формы записи эквивалентны. При решении уравнения (1) и переходе к соотношению, аналогичному (6), нужно иметь в виду, что $v_x = v_\rho \sin\psi$ зависит от угла ψ. Это существенно при определении постоянной интегрирования уравнения для f_{e1}. В итоге приходим к следующему, соответствующему (6), выражению для функции распределения:

$$f_{e1} = iK_e v_{e\rho} E_x \exp\left(-\frac{mv_e^2}{2\varkappa T_e}\right) \times$$
$$\times \sum_{n=-\infty}^{n=\infty} J_n\left(\frac{kv_\rho}{\omega_H}\right)\left\{\exp\left(-i(n+1) + i\frac{kv_\rho}{\omega_H}\sin\psi\right)\left(n+1-\frac{\omega}{\omega_H}\right)^{-1} + \right.$$
$$\left. + \exp\left(-i(n-1)\psi + i\frac{kv_\rho}{\omega_H}\sin\psi\right)\left(n-1-\frac{\omega}{\omega_H}\right)^{-1}\right\}.$$

Подставляя это выражение в (13), используя при преобразованиях (5) и интегрируя по v_{ez} и углу ψ, приходим к дисперсионному уравнению

$$-\frac{\omega_{e0}^2 m^2}{4\omega\varkappa^2 T_e^2}\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}\int_0^\infty \left\{J_n\left(\frac{kv_\rho}{\omega_H}\right)+J_{n+2}\left(\frac{kv_\rho}{\omega_H}\right)\right\}^2 \times$$

$$\times\left[\omega-(n+1)\,\omega_H\right]^{-1} v_\rho \exp\left(-mv_\rho^2/2\varkappa T_e\right)dv_\rho = 1. \quad (4.3.14)$$

Используем бесселевы функции при $n = 1, 2, 3, \ldots$:

$$J_n(x)+J_{n+2}(x)=\frac{2(n+1)}{x}J_{n+1}(x)$$

и связь $J_n(x)=(-1)^n J_{-n}(x)$ и сделаем переобозначение, заменив $n+1$ на n. В результате из (14) имеем

$$1-\frac{2\omega_{e0}^2 m^2}{k^2\varkappa^2 T_e^2}\sum_{n=1}^\infty \frac{n^2\omega_H^2}{\omega^2-n^2\omega_H^2}\int_0^\infty J_n^2\left(\frac{kv_\rho}{\omega_H}\right)\exp\left(-mv_\rho^2/2\varkappa T_e\right)v_\rho dv_\rho = 1. \quad (4.3.15)$$

Используем формулу

$$\int_0^\infty \exp\left(-a^2v^2\right)J_n^2(bv)\,v\,dv=\frac{1}{2a^2}\exp\left(-b^2/2a^2\right)I_n\left(b^2/2a^2\right),$$

где I_n — функция Бесселя от мнимого аргумента [при целых n $I_n(x)=i^{-n}J_n(ix)$]. Интегрируя в (15) по v_ρ, получаем

$$1-\frac{2\omega_{e0}^2 m}{k^2\varkappa T_e}\sum_{n=1}^\infty \frac{n^2\omega_H^2}{\omega^2-n^2\omega_H^2}\exp\left(-\frac{k^2\varkappa T_e}{\omega_H^2 m}\right)I_n\left(\frac{k^2\varkappa T_e}{\omega_H^2 m}\right)=0. \quad (4.3.16)$$

Как и для волны 2, здесь формально поглощение отсутствует, но сохраняются особенности при $\omega = n\omega_H$. При учете релятивистских эффектов или при малых отклонениях угла α от $\alpha=\pi/2$ появляется бесстолкновительное затухание, а при учете соударений — столкновительное. Уравнение (16) можно использовать в двух направлениях. С одной стороны, из него получается условие для резонансной (верхней гибридной) частоты $\omega=\left(\omega_{e0}^2+\omega_H^2\right)^{1/2}$ и соотношения для n_3^2. С другой стороны, можно обратиться к особенностям в областях частот, примыкающих к резонансным, и рассмотреть возможность существования медленных волн вблизи гармоник гирочастоты. Такие волны при $\alpha=\pi/2$ существуют и получили наименование *волн (мод) Берстейна* [11, 13, 14]. При выполнении условия (8) $\delta \ll 1$ ограничимся в (16) сначала учетом слагаемых либо не содержащих температуры T_e, либо пропорциональных T_e. Тогда из (16) имеем

$$1-\frac{v_e}{1-u_e}\left(1-\frac{\beta_{T_e}^2 n^2}{u_e}\right)-\frac{v_e}{1-4u_e}\frac{\beta_{T_e}^2 n^2}{u_e}=0. \quad (4.3.17)$$

Отсюда при $\delta=0$ получаем соотношение, определяющее значения верхней гибридной частоты

$$v_e+u_e=1, \quad \omega^2=\omega_{e0}^2+\omega_H^2, \qquad (4.3.18)$$

а в следующем приближении получаем формулу для показателя преломления плазменной волны [1, 10]

$$n_3^2=[(1-u_e-v_e)(1-4u_e)]/3v_e\beta_{T_e}^2. \qquad (4.3.19)$$

Применимость (19) определяется условием $\beta_{T_e}^2 n^2 \ll u_e$ и требованием $n^2 \gg 1$. Последнее обусловлено предположением о безвихревом (потенциальном) характере плазменных волн. При $\alpha=\pi/2$ существование таких волн возможно только при $n^2 \gg 1$ (см. гл. 3). Если частоты ω удалены от $2\omega_H$ и грубо $u_e \sim 1$, то мы получаем, что условие (8) выполнено только в окрестности резонансной частоты (17), когда $|1-u_e-v_e| \ll 1$. В то же время нельзя использовать в (19) строгое равенство $1-v_e-u_e=0$, так как это противоречит требованию медленности волн.

При $\omega \approx 2\omega_H$ здесь нельзя говорить о появлении новой волны, так как корень n_3^2 является единственным.

Но в то же время другое по сравнению с (18) условие на частоту (с независимостью положения резонансного уровня от v_e) выделяет область $u_e=1/4$. Из вида n_3^2 (19) следует вывод, что имеются два уровня, вблизи которых могут существовать медленные волны с длиной λ, много большей гирорадиуса электронов: при $\omega=\left(\omega_{e0}^2+\omega_H^2\right)^{1/2}$ и при $\omega=2\omega_H$. Еще раз подчеркнем, что использовать (19) строго при $u_e=1/4$ нельзя, так как здесь нарушается потенциальность (продольность) волн.

При ограничении (8) можно упростить дисперсионное уравнение с сохранением возможного вклада высоких резонансов. Сделаем это с учетом членов до $n=4$ включительно. При $n=2, 3, 4$ сохраняем только резонансные слагаемые наибольшей величины. Используя представления для I_n при малых значениях аргумента, имеем

$$1-\frac{v_e}{1-u_e}-\frac{v_e\delta}{1-4u_e}-\frac{3v_e\delta^2}{8(1-9u_e)}-\frac{v_e\delta^3}{12(1-16u_e)}=0. \quad (4.3.20)$$

Мы видим, что, по крайней мере при $\delta \ll 1$, интервалы частот, в которых явно проявляются резонансные особенности, с ростом n сужаются. Например, если при $\omega \approx 2\omega_H$ для выполнения условия (8) необходимо ограничение $|(\omega-2\omega_H)/\omega| \ll 1$, то при $\omega \approx 3\omega_H$ здесь требуется, чтобы $|(\omega-3\omega_H)/\omega| \ll \delta$, а при $\omega \approx 4\omega_H$ $|(\omega-4\omega_H)/\omega| \ll \delta^2$. Качественно выводы о ширинах интервалов, где наблюдаются особенности в поведении n^2, сохраняются и в отсутствии допущения (8). Начиная с резонанса $n=3$ порядок

уравнения для n^2 больше единицы, так что можно говорить о возникновении его новых корней.

Уравнение (16) может быть решено численно. Так, на рис. 4.2 приведены зависимости ω/ω_H от $k\sqrt{\varkappa T_e/m}\,\omega_H^{-1}$. Обращает на себя внимание наличие при заданном k нескольких ветвей. Имеются провалы по частоте, где при действительных ω и k дисперсионное уравнение не имеет решений. На начальных участках (при малых k, когда $k\omega_H^{-1}\sqrt{\varkappa T_e/m} \lesssim \beta_{T_e}$) дисперсионное уравнение (16) из-за неучета вихревых членов несправедливо.

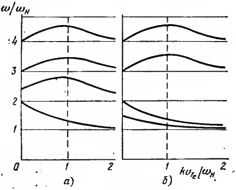

Рис. 4.2. Дисперсионные зависимости для волн Берстейна: *а*) $\omega_{e0} > \omega_H$; *б*) $\omega_{e0} < \omega_H$.

Запись дисперсионного уравнения (16) очевидным образом обобщается и на случай учета движения ионов. Получим соотношение для n_3^2 вблизи нижней гибридной частоты $\omega \approx \approx \sqrt{\omega_H\Omega_H}$. Считая, что гирорадиусы электронов и ионов меньше длины волны (выполнены условия (8) и $\beta_{T_i}^2 n^2 \ll u_i$, где $\beta_{T_i}^2 = \varkappa T_i/Mc^2$), и обобщая уравнение (17), имеем

$$1 - \frac{v_e}{1-u_e}\left(1 - \frac{\beta_{T_e}^2 n^2}{u_e}\right) - \frac{v_i}{1-u_i}\left(1 - \frac{\beta_{T_i}^2 n^2}{u_i}\right) - \\ - \frac{v_e}{1-4u_e}\frac{\beta_{T_e}^2 n^2}{u_e} - \frac{v_i}{1-4u_i}\frac{\beta_{T_i}^2 n^2}{u_i} = 0. \quad (4.3.21)$$

При $\omega = \sqrt{\omega_H\Omega_H}$ $u_i \ll 1$ и $u_e \gg 1$. Далее, можно для достаточно плотной плазмы пренебречь в (21) единицей и воспользоваться хорошо выполняющимся при $T_e \sim T_i$ неравенством $\beta_{T_e}^2/u_e \ll \ll \beta_{T_i}^2/u_i$. В итоге приходим к соотношению

$$n_3^2 = 4\left(\sqrt{u_e u_i} - 1\right)/3\beta_{T_e}^2. \quad (4.3.22)$$

Условие $\beta_{T_i}^2 n^2/u_i \ll 1$ будет выполняться в соответствии с (22), когда $|\sqrt{u_e u_i} - 1| \ll 1$. Действительно, $\beta_{T_i}^2 n^2/u_i = \beta_{T_e}^2 n^2/\sqrt{u_e u_i} \approx \approx \beta_{T_e}^2 n^2$ (если $\omega \approx \sqrt{\omega_H\Omega_H}$). Итак, описание на основе (22) электростатической волны на нижней гибридной частоте возможно, только если $|\omega^2 - \omega_H\Omega_H| \ll \omega^2$.

4.4. Электростатические высокочастотные волны при произвольном направлении распространения

В пп. 4.2 и 4.3 на основе метода кинетического уравнения было проанализировано распространение волн в магнитоактивной плазме в направлении поля $\mathbf{H}_0$ и перпендикулярно к нему. Здесь направление распространения будет произвольным. Если угол α не фиксирован, то многие выводы формул, а также их написание становятся довольно громоздкими. Поэтому мы не будем в этом параграфе учитывать движение ионов, ограничиваясь только высокочастотными волнами. Далее формулы для черенковского и гирорезонансного поглощений не только выводиться, но и даже выписываться не будут.

Фактически мы остановимся только на свойствах показателя преломления плазменной волны. Для этой волны наличие теплового движения частиц играет кардинальную роль, тогда как при определении показателей преломления обыкновенной и необыкновенной волн это движение приводит обычно лишь к малым поправкам.

Поскольку бесстолкновительное поглощение здесь не рассматривается, полезно привести [1] качественные критерии для высокочастотных волн, обеспечивающие его незначительность. В изотропной плазме условие слабости бесстолкновительного поглощения (затухания Ландау) уже фигурировало в п. 4.1. Оно сводится к требованию $v_ф = \omega/k \gg v_{T_e}$, которое можно переписать в виде

$$\beta_{T_e}^2 n^2 \ll 1. \qquad (4.4.1)$$

При наличии магнитного поля $\mathbf{H}_0$ вне гирорезонансных областей это условие остается в силе, когда поле $\mathbf{H}_0$ не препятствует перемещению электрона на расстояние порядка $k_\perp^{-1}$ ($k_\perp$ — проекция $\mathbf{k}$ на поперечное к $\mathbf{H}_0$ направление). Ясно, что нужно сравнивать с гирорадиусом r_{He} именно $k_\perp^{-1}$, поскольку вдоль $\mathbf{H}_0$ поле на движение частиц не влияет. Имея в виду, что $k_\perp = k \sin\alpha$, получаем условие малосущественности влияния магнитного поля $k r_{He} \sin\alpha \gg 1$ $(\beta_{T_e}^2 n^2 \sin^2\alpha/u_e \gg 1)$. В этом случае и при наличии поля $\mathbf{H}_0$ сохраняется критерий (1).

Если же выполнено ограничение

$$(\beta_{T_e}^2 n^2/u_e)\sin^2\alpha \ll 1, \qquad (4.4.2)$$

то поперечное к $\mathbf{H}_0$ перемещение электрона за период колебаний незначительно. Частица может беспрепятственно двигаться только вдоль $\mathbf{H}_0$ и в направлении $\mathbf{k}$ смещается со скоростью порядка $v_{T_e}\cos\alpha$. Тогда вместо (1) приходим к более слабому критерию малосущественности черенковского поглощения, связанного с тепловым движением электронов, а именно,

$$\beta_{T_e}^2 n^2 \cos^2\alpha \ll 1. \qquad (4.4.3)$$

К условиям (2), (3) нужно добавить еще требование малости гирорезонансного поглощения $|\omega-\omega_H|\gg kv_{T_e}\cos\alpha$ или

$$(1-\sqrt{u_e})^2\gg\beta_{T_e}^2n^2\cos^2\alpha. \qquad (4.4.4)$$

При $\sin\alpha\neq0$ и $\cos\alpha\neq0$ существует гирорезонансное затухание вблизи частот $2\omega_H$, $3\omega_H$ ... Показатель для этого поглощения здесь мал $(q\ll n)$, хотя само поглощение может представлять иногда значительный интерес. Условия типа $(1-2\sqrt{u_e})^2\gg\gg\beta_{T_e}^2n^2\cos^2\alpha$ $\left((\omega-2\omega_H)^2\gg k^2v_{T_e}^2\cos^2\alpha\right)$ обеспечивают экспоненциальную малость этого поглощения.

Нужно заметить, что гирорезонансное поглощение при $\omega\approx\approx\omega_H$ может быть велико при обратном (3) ограничении только при распространении, очень близком к продольному, когда $\sin^2\alpha\ll\beta_{T_e}^2n^2$ [1, 4].

В гл. 3 обсуждался вопрос о показателе преломления плазменной волны в квазигидродинамическом приближении. Поскольку к тому же в рамках этого приближения давление считалось изотропным, что относилось и к равновесным и к возмущенным его значениям. В итоге формулу (3.3.29) для n_3^2 можно рассматривать лишь как ориентировочную и явно нуждающуюся в уточнении. Последнее можно осуществить, используя метод кинетического уравнения.

Соответствующий вывод соотношения для n_3^2 проведен нами в пп. 4.1 и 4.3 для частных случаев, когда $\alpha=0$ и $\alpha=\pi/2$. Выкладки, приводящие к соотношению для n_3^2 при произвольных α, аналогичны тем, которые привели нас к соотношению (4.3.19), но только более громоздкие. Мы соответствующие вычисления проводить не будем, так как во многих чертах структуру соотношения для n_3^2 можно установить, используя некоторые общие соображения, а также предельные переходы к случаям $\alpha=0$ и $\alpha=\pi/2$. Чтобы воспользоваться полученными результатами, достаточно предположить выполнение условий (2)—(4). Действительно, эти условия и используются при выводе наиболее простого соотношения для n_3^2 [1, 10, 11].

Плазменная волна приближенно может считаться линейно поляризованной, продольной волной. Поэтому формула для $\tilde{n}_3^2$ не должна меняться при изменении направления на противоположное или при таком же изменении направления $\mathbf{H}_0$. Сказанное означает, что величина $\tilde{n}_3^2$ должна зависеть от гирочастоты ω_H через параметр $u_e=\omega_H^2/\omega^2$. Что же касается зависимости от угла α, то она должна получить свое отражение в наличии в соотношениях для $\tilde{n}_3^2$ слагаемых типа $\cos^2\alpha$ или $\sin^2\alpha$.

Имея это в виду, а также необходимость перехода к изотропному случаю и с учетом аналогии с выводами квазигидродинамического подхода, можно написать, что

$$\tilde{n}_3^2=\frac{1-u_e-v_e+u_ev_e\cos^2\alpha}{\beta_{T_e}^2\left[P\sin^4\alpha+Q\sin^2\alpha\cos^2\alpha+R\cos^4\alpha\right]}. \qquad (4.4.5)$$

При $\sin^2\alpha = 0$ это соотношение должно привести к соотношению $n_3^2 = (1-v_e)/3v_e\beta_{T_e}^2$, что позволяет найти $R = 3(1-u_e)$. Аналогичный переход при $\cos^2\alpha = 0$ к (4.3.19) означает, что $P = 3/(1-4u_e)$. Для установления зависимости $Q(u_e)$ необходимы детальные расчеты, которые приводят к результату $Q = \left(u_e^2 - 3u_e + 6\right)/(1-u_e)^2$ [1, 10]. Из общей формулировки дисперсионного уравнения можно предусмотреть появление в знаменателе этого выражения степени $(1-u_e)^2$. Наличие в числителе свободного члена, равного 6, находится в соответствии с требованиями необходимости перехода к формуле (4.1.33) при $u_e = 0$. Тогда $Q(u_e = 0) = 3(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)^2 = 3$. Все сказанное, конечно, позволяет понять характерную структуру формулы (5), но не избавляет полностью от необходимости непосредственного расчета Q.

Итак, для $\widetilde{n}_3^2$ имеем соотношение

$$\widetilde{n}_3^2 = \left(1 - u_e - v_e + u_e v_e \cos^2\alpha\right)/\beta_{T_e}^2 v_e D, \tag{4.4.6}$$

где

$$D = \frac{3\sin^4\alpha}{1-4u_e} + \frac{u_e^2 - 3u_e + 6}{(1-u_e)^2}\sin^2\alpha\cos^2\alpha + 3(1-u)\cos^4\alpha. \tag{4.4.7}$$

Область применимости (6) лимитируется в первую очередь неравенствами (2)—(4). К ним следует добавить и ограничение $\left(1 - 2\sqrt{u_e}\right)^2 \gg \beta_{T_e}^2 n_3^2 \cos^2\alpha$. Последнее, а также (4) предполагают удаленность частоты волны ω от ω_H или $2\omega_H$ на «расстояния» $\Delta\omega$, превышающие $kv_{T_e}\cos\alpha$. Заметим, что в силу (3) $\Delta\omega/\omega \ll 1$, фактор D (7) при $\cos^2\alpha \neq 0$ и $\sin^2\alpha \neq 0$ существенно возрастает, если $|1-4u_e| \ll 1$ или $(1-u_e)^2 \ll 1$. Более того, при переходе через уровень $u_e = 1/4$ меняется знак D. Особенность при $(1-u_e)^2 \ll 1$ интереса здесь не представляет, так как в этом случае

$$\widetilde{n}_3^2 \approx -(1-u_e)^2/4\beta_{T_e}^2\cos^2\alpha$$

и $\widetilde{n}_3^2 < 0$. Таким образом, здесь плазма непрозрачна по отношению к прохождению через нее волны типа 3.

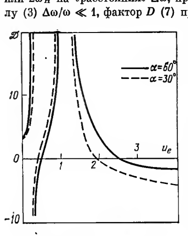

Рис. 4.3. Вид функции $D(u_e)$.

На рис. 4.3 показаны зависимости $D(u_e)$ при различных углах α. Наиболее существенным здесь представляется изменение знака $D(u_e)$ вблизи $u_e = 1/4$.

Вне гирорезонансных областей пределы применимости (6), (7) определяют ограничения (2), (3), которые грубо сводятся к требованию

$$\left|1 - u_e - v_e + u_e v_e \cos^2\alpha\right| \ll 1. \tag{4.4.8}$$

В то же время слишком убедительное выполнение этого неравенства нарушит условие

$$n_3^2 \gg 1, \tag{4.4.9}$$

необходимое в силу электростатической природы волны 3. Из (9) следует, в частности, что формула (6) при строгом равенстве $1 - u_e - v_e + u_e v_e \cos^2\alpha = 0$ неприменима.

Поведение волн при изменении v_e вблизи уровня, где $1 - u_e - v_e + u_e v_e \cos^2\alpha = 0$, можно провести здесь на основе уравнения третьего по-

рядка по n^2, которое уже рассматривалось в квазигидродинамическом приближении [см. (3.3.27)].

Естественно, что нужно уточнить результаты квазигидродинамического рассмотрения и заменить в (3.3.27) фактор $1-u_e\cos^2\alpha$ в слагаемом с $\tilde{n}^6$ на величину D (7). Тогда получаем

$$\beta_{T_e}^2 v_e D\tilde{n}^6 - \left(1-u_e-v_e+u_e v_e\cos^2\alpha\right)\tilde{n}^4 + \left[2(1-v_e)^2+u_e v_e\cos^2\alpha-u_e(2-v_e)\right]\tilde{n}^2 + (1-v_e)\left[u_e-(1-v_e)^2\right]=0. \quad (4.4.10)$$

При $v=v_\infty=(1-u_e)/(1-u_e\cos^2\alpha)$ $\tilde{n}^2 \gg 1$, что дает возможность опустить в (10) свободный член. Коэффициент перед $\tilde{n}^2$ запишем в более компактном виде, приближенно заменяя v на v_∞. В результате имеем

$$\beta_{T_e}^2 v_e D\tilde{n}^4 - \left(1-u_e-v_e+u_e v_e\cos^2\alpha\right)\tilde{n}^2 + uv\sin^2\alpha\left(1+u\cos^2\alpha\right)\left(u\cos^2\alpha-1\right)^{-1}=0. \quad (4.4.11)$$

При пренебрежении последним слагаемым, что возможно при

$$\left|1-u_e-v_e+u_e v_e\cos^2\alpha\right| \gg \beta_{T_e}, \quad (4.4.12)$$

приходим к формуле (6). Если же строго $v=v_\infty$, то из (11) находим

$$\tilde{n}^4=\frac{u_e\sin^2\alpha\left(1+u_e\cos^2\alpha\right)}{\beta_{T_e}^2\left(1-u_e\cos^2\alpha\right)D}. \quad (4.4.13)$$

Если $D>0$ и одновременно $u_e\cos^2\alpha<1$, то вблизи уровня $v_e=v_{e\infty}$ происходит для n^2 непрерывный переход необыкновенной волны в плазменную. Так, например, при $u_e<1/4$ $D>0$ (см. рис. 4.3). Если к тому же

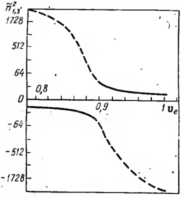

Рис. 4.4. Поведение $\tilde{n}^2$ вблизи резонансной частоты при вещественных значениях $\tilde{n}^2\left(u_e=0{,}1;\ \beta_{T_e}^2=10^{-5};\ \alpha=\pi/2\right)$.

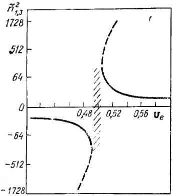

Рис. 4.5. Поведение $\tilde{n}^2$ вблизи резонансной частоты ($u_e=0{,}5$, $\beta_{T_e}^2=10^{-5}$, $\alpha=\pi/2$). Имеется область комплексных значений $\tilde{n}^2$.

$u_e\cos^2\alpha<1$, то кривые $\tilde{n}^2(v_e)$ имеют вблизи плазменного резонанса вид, изображенный на рис. 4.4. При $v_e=v_{e\infty}$, когда справедлива формула (13), волну нельзя отнести ни к одному из указанных типов. На рис. 4.4 изобра-

жена и кривая с $\tilde{n}^2 < 0$, где плазма непрозрачна. Если же $1/4 < u_e < 1$, то согласно рис. 4.3 более характерны случаи, когда $D < 0$. Если же, по-прежнему, $u_e \cos^2 \alpha < 1$, то получаем для $\tilde{n}^2$ из (13) мнимые значения (для $\tilde{n}$ — комплексные значения). Например, при $\alpha = \pi/2$ из (7), (13) имеем $\tilde{n}^4 = u_e(1-4u_e)/3\beta_{T_e}^2$. Действительно, $\tilde{n}^4 < 0$ при $u_e > 1/4$.

Появление здесь корней с комплексными $\tilde{n}$ не есть результат поглощения, поскольку диссипативные процессы во внимание не принимались. Такого рода свойства волн обусловлены наличием пространственной дисперсии. Вид кривых $\tilde{n}^2(v_e)$ вблизи уровня $v_e = v_{e\infty}$ показан на рис. 4.5, где область с мнимыми $\tilde{n}^2$ заштрихована. Наклон участков кривых $\tilde{n}^2(v_e)$ в области действительных $\tilde{n}^2$, соответствующих ветвям плазменных волн, имеет другой знак, по сравнению с наклоном кривых на аналогичных участках на рис. 4.4. Неслучайно, что заштрихованная область приходится на «зону» перехода волн типа 1 в волны типа 3.

В заключение заметим, что при $u_e > 1$ и $u_e \cos^2 \alpha > 1$ переход происходит уже между волнами 2 и 3. При $u_e > 1$ и $u_e \cos^2 \alpha < 1$ резонанс для холодной электронной плазмы отсутствует.

ГЛАВА 5

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ ПЛАЗМЕ

5.1. Приближение геометрической оптики

Из гл. 1 ясно, что многие основные параметры приземной и космической плазмы (концентрация заряженных частиц, их температуры и др.) существенным образом зависят от координат. В силу этого при изучении процесса распространения волн необходимо учитывать неоднородность среды. Наряду с зависимостью от координат параметры плазмы изменяются и во времени. Однако, как правило, интервалы времени, в которые происходят заметные изменения состояния плазмы, много больше характерных длительностей распространения волн. Тогда нестационарностью плазмы можно пренебречь.

Уравнения последовательных приближений. В линейном приближении для стационарных сред можно рассматривать отдельные частотные фурье-составляющие, полагая, что все напряженности полей пропорциональны фактору $\exp i\omega t$. Тогда уравнения электродинамики (2.1.21), (2.1.39), (2.1.43) в отсутствие сторонних токов принимают вид

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -ik_0\mathbf{H}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{H} = ik_0\mathbf{D}', \quad \mathbf{D}' = \hat{\varepsilon}'(\omega, \mathbf{r})\mathbf{E}. \qquad (5.1.1)$$

Неоднородность среды здесь учитывается зависимостью компонент тензора комплексной диэлектрической проницаемости $\varepsilon'_{ij}(\omega, \mathbf{r})$ от координат. В (1) для этого тензора используется обозначение $\hat{\varepsilon}'$. Выражения для компонент тензора ε'_{ij} в различных приближениях были получены в гл. 2—4.

При учете неоднородности плазмы или внешнего магнитного поля $\mathbf{H}_0$ получение строгих решений (1) сопряжено со значительными математическими трудностями и часто оказывается неосуществимым. Поэтому здесь широко используются приближенные методы. Одним из наиболее простых и хорошо известных является метод геометрической оптики.

Прежде чем переходить к построению решения в приближении геометрической оптики, напомним, что в безграничной однородной среде решениями (1) являются плоские волны вида $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(0)}\exp(-i\mathbf{kr})$ и $\mathbf{H} = \mathbf{H}^{(0)}\exp(-i\mathbf{kr})$ (п. 2.2). Амплитуды $\mathbf{E}^{(0)}$, $\mathbf{H}^{(0)}$ и волновой вектор $\mathbf{k}$ здесь от координат не зависят. Фаза $\mathbf{kr} - \omega t$ существенно изменяется на длине волны λ (или на длине $\lambda\!\!\!^{-} = k^{-1}$).

Рассмотрим слабонеоднородную плазму, полагая, что компоненты тензора ε'_{ij} заметно меняются на расстояниях порядка L. При $L \gg \lambda\!\!\!^{-}$ естественно предположить, что структура решений будет сходна с имеющей место для однородных сред. Векторы $\mathbf{E}^{(0)}$, $\mathbf{H}^{(0)}$ и $\mathbf{k}$ будут медленно изменяющимися функциями координат. Характерным расстоянием, на котором происходят существенные изменения этих величин, должен быть масштаб L. Напряженности полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ сильно изменяются на длине волны $\lambda\!\!\!^{-}$, которая теперь является медленно изменяющейся функцией координат. Таким образом, среда является как бы локально однородной на расстояниях порядка $\lambda\!\!\!^{-}$ и существенно неоднородной на расстояниях, превышающих L.

Задача о распространении волн имеет малый параметр $\lambda\!\!\!^{-}/L \ll 1$ и решение можно искать в виде разложения амплитуды по этому параметру. Будем формально отыскивать решение уравнений (1) в виде асимптотических рядов

$$\mathbf{E} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathbf{E}^{(m)}}{(ik_0)^m} e^{-ik_0\psi}, \quad \mathbf{H} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathbf{H}^{(m)}}{(ik_0)^m} e^{-ik_0\psi}, \tag{5.1.2}$$

где $k_0\psi$ характеризует изменение фазы волны, а $\psi(\mathbf{r})$ называют эйконалом.

Подставляя разложения (2) в первые два уравнения (1), умножая все члены на $(-ik_0)^{-1}$ и группируя члены по степеням $(ik_0)^{-1}$, имеем

$$\begin{gathered}
-[\nabla\psi\mathbf{E}^{(0)}] + \mathbf{H}^{(0)} + (ik_0)^{-1}(-[\nabla\psi\mathbf{E}^{(1)}] + \mathbf{H}^{(1)} + \operatorname{rot}\mathbf{E}^{(0)}) + \\
+ (ik_0)^{-2}(-[\nabla\psi\mathbf{E}^{(2)}] + \mathbf{H}^{(2)} + \operatorname{rot}\mathbf{E}^{(1)}) + \ldots \\
\ldots + (ik_0)^{-m}(-[\nabla\psi\mathbf{E}^{(m)}] + \mathbf{H}^{(m)} + \operatorname{rot}\mathbf{E}^{(m-1)}) \ldots = 0,
\end{gathered} \tag{5.1.3}$$

$$\begin{gathered}
-[\nabla\psi\mathbf{H}^{(0)}] + \hat{\varepsilon}'\mathbf{E}^{(0)} + (ik_0)^{-1}(-[\nabla\psi\mathbf{H}^{(1)}] + \hat{\varepsilon}'\mathbf{E}^{(1)} + \operatorname{rot}\mathbf{H}^{(0)}) + \\
+ (ik_0)^{-2}(-[\nabla\psi\mathbf{H}^{(2)}] + \hat{\varepsilon}'\mathbf{E}^{(2)} + \operatorname{rot}\mathbf{H}^{(1)}) + \ldots \\
\ldots + (ik_0)^{-m}(-[\nabla\psi\mathbf{H}^{(m)}] + \hat{\varepsilon}'\mathbf{E}^{(m)} + \operatorname{rot}\mathbf{H}^{(m-1)}) + \ldots = 0.
\end{gathered}$$

Множители $(ik_0)^{-1}$, $(ik_0)^{-2}\ldots$ имеют разные порядки малости. Чтобы уравнения (3) удовлетворялись, необходимо потребовать обращения в нуль выражений в скобках, перед которыми стоят степени ik_0. Отсюда получаем связанную систему уравнений последовательных приближений

$$\begin{gathered}
[\nabla\psi\mathbf{E}^{(m)}] - \mathbf{H}^{(m)} = \operatorname{rot}\mathbf{E}^{(m-1)}, \\
[\nabla\psi\mathbf{H}^{(m)}] + \hat{\varepsilon}'\mathbf{E}^{(m)} = \operatorname{rot}\mathbf{H}^{(m-1)}.
\end{gathered} \tag{5.1.4}$$

Формально параметр малости k_0^{-1} имеет размерность длины. Можно установить, что истинным малым параметром разложений (2) является безразмерная величина порядка $(k_0L)^{-1} = \lambda\!\!\!^{-}_0/L$. Это довольно естественное утверждение будет подтверждено последующими результатами.

В нулевом приближении ($m=0$)

$$[\nabla\psi \mathbf{E}^{(0)}] - \mathbf{H}^{(0)} = 0, \quad [\nabla\psi \mathbf{H}^{(0)}] + \hat{\varepsilon}' \mathbf{E}^{(0)} = 0. \qquad (5.1.5)$$

Система (5), в которую входят три компонента вектора $\mathbf{E}^{(0)}$ и три $\mathbf{H}^{(0)}$, внешне не отличается от аналогичной системы (3.2.1), (3.2.2) в однородной среде. Однако в (5) в отличие от однородной среды все величины являются функциями координат. Для того чтобы совокупность уравнений (5) имела неравные тождественно нулю решения, необходимо обращение в нуль определителя системы, так что

$$F(\omega, \nabla\psi, \mathbf{r}) \equiv \left\| (\nabla\psi)^2 \delta_{ij} - \frac{\partial\psi}{\partial x_i}\frac{\partial\psi}{\partial x_j} - \varepsilon'_{ij}(\omega, \mathbf{r}) \right\| = 0. \qquad (5.1.6)$$

Уравнение (6) аналогично (3.2.12) и при замене $\nabla\psi = \mathbf{n}$ совпадает с дисперсионным уравнением в однородной среде. Однако в данном случае в силу зависимости ε'_{ij} от координат уравнение (6) будет не алгебраическим, а нелинейным дифференциальным уравнением первого порядка. Его называют *уравнением эйконала* [1] (иногда локальным дисперсионным уравнением). После его интегрирования мы получаем зависимость эйконала ψ от координат при заданных начальных условиях. Уравнение (6) относится к классу уравнений Гамильтона — Якоби, к которому относят уравнения в частных производных первого порядка, когда искомая функция ψ в явном виде не входит [2]. Естественно, что в теории распространения волн могут быть применены методы решения подобных уравнений, развитые в аналитической динамике и квантовой механике [2—7].

Выпишем уравнения эйконала для некоторых конкретных случаев в явном виде. Ранее указывалось, что по форме записи эти уравнения совпадают с соответствующими дисперсионными уравнениями, если считать $\mathbf{n} = \nabla\psi$. В изотропной среде для формулировки уравнения эйконала нужно использовать для поперечных волн (3.2.8) и для продольных волн (3.2.9). Хотя уравнения (1) сформулированы без пространственной дисперсии, уравнение эйконала можно и при ее учете получить из соответствующего дисперсионного уравнения заменой $\mathbf{k} = k_0\mathbf{n}$ на $k_0\nabla\psi$. Заметим также, что из (3.2.12) можно получить уравнение эйконала и в случае нестационарной среды, если в (3.2.12) заменить ω и $\mathbf{k}$ соответственно на $-k_0\,\partial\psi/\partial t$ и $k_0\nabla\psi$ и рассматривать далее $\psi = \psi(\mathbf{r}, t)$ [8].

Если использовать равенство $\mathbf{n} = \nabla\psi$ как обозначение для производных от ψ, то для холодной плазмы, когда поле $\mathbf{H}_0$ направлено по оси z, из (3.3.26) можно прийти к дифференциальному уравнению

$$\varepsilon'_{xx}\left(n_x^4 + 2n_x^2 n_y^2 + n_y^4\right) + \left(\varepsilon'_{xx} + \varepsilon'_{zz}\right) n_z^2 \left(n_x^2 + n_y^2\right) - \\ - \left(\varepsilon'^2_{xx} + \varepsilon'_{xx}\varepsilon'_{zz} + \varepsilon'^2_{xz}\right)\left(n_x^2 + n_y^2\right) - 2n_z^2 \varepsilon'_{xx}\varepsilon'_{zz} - \\ - \varepsilon'_{zz}\left(\varepsilon'^2_{xx} + \varepsilon'^2_{xy}\right) = 0. \qquad (5.1.7)$$

Аналогичным образом можно найти уравнения эйконала и в других случаях (п. 5.5). Заметим, что уравнение (6) не меняет своей формы в любой ортогональной криволинейной системе координат ξ_1, ξ_2, ξ_3. Необходимо сделать в (6) замену $\partial\psi/\partial x$ на $L_1\partial\psi/\partial\xi_1$, $\partial\psi/\partial y$ на $L_2\partial\psi/\partial\xi_2$ и $\partial\psi/\partial z$ на $L_3\partial\psi/\partial\xi_3$, где $L_i = \{(\partial\xi_i/\partial x)^2 + (\partial\xi_i/\partial y)^2 + (\partial\xi_i/\partial z)^2\}^{1/2}$ — коэффициенты Ламе.

Вернемся к системе (4) и выпишем уравнения первого приближения ($m = 1$)

$$[\nabla\psi\mathbf{E}^{(1)}] - \mathbf{H}^{(1)} = \operatorname{rot}\mathbf{E}^{(0)},$$
$$[\nabla\psi\mathbf{H}^{(1)}] + \hat{\varepsilon}'\mathbf{E}^{(1)} = \operatorname{rot}\mathbf{H}^{(0)}. \tag{5.1.8}$$

Левые части (8) имеют тот же вид, что и уравнения однородной системы (5). В соответствии с (6) определитель, составленный из коэффициентов левых частей (8), также обращается в нуль.

Далее необходимо потребовать, чтобы система (8) была совместна. Условием совместности неоднородной системы уравнений типа (8) является ортогональность правых частей каждому из решений транспонированной однородной системы [эти решения могут быть найдены для уравнения (5)]. Далее рассмотрим отдельно волны в изотропных и анизотропных средах.

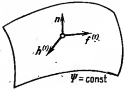

Рис. 5.1. Собственные вектора электрического поля в приближении геометрической оптики.

Для поперечных волн в изотропной плазме, когда $\varepsilon_{ij} = \varepsilon\delta_{ij}$ (поглощение не учитывается), однородная система (5) симметрична и решения транспонированной системы совпадают с решениями основной системы. Два корня уравнения эйконала совпадают, так что $\mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2 = \mathbf{n}$. Равны между собой и фазовые скорости волн.

Совокупность собственных векторов для электрического поля в (5) можно взять в виде $\mathbf{f}^{(1)} = \mathbf{f}$ и $\mathbf{f}^{(2)} = [\mathbf{pf}]$, где $\mathbf{p} = \mathbf{n}/n$ (рис. 5.1). Соответственно для магнитного поля $\mathbf{h}^{(1)} = n[\mathbf{pf}]$ и $\mathbf{h}^{(2)} = [\mathbf{n}[\mathbf{pf}]] = -n\mathbf{f}$. Итак, совокупности уравнений (5) отвечают пары векторов $\mathbf{f}$, $n[\mathbf{pf}]$ и $[\mathbf{pf}]$, $-n\mathbf{f}$.

Сформулируем условия совместности (8). Используя полученные выражения собственных векторов для первой и для второй их пар, имеем

$$-n[\mathbf{pf}]\operatorname{rot}\mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{f}\operatorname{rot}\mathbf{H}^{(0)} = 0,$$
$$n\mathbf{f}\operatorname{rot}\mathbf{E}^{(0)} + [\mathbf{pf}]\operatorname{rot}\mathbf{H}^{(0)} = 0.$$

Полагая $\mathbf{E}^{(0)} = E^{(0)}\mathbf{f}$ и умножая каждое из этих уравнений на $E^{(0)}$, получим

$$\mathbf{H}^{(0)}\operatorname{rot}\mathbf{E}^{(0)} - \mathbf{E}^{(0)}\operatorname{rot}\mathbf{H}^{(0)} = \operatorname{div}[\mathbf{E}^{(0)}\mathbf{H}^{(0)}] = 0, \tag{5.1.9}$$
$$n^2\mathbf{E}^{(0)}\operatorname{rot}\mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{H}^{(0)}\operatorname{rot}\mathbf{H}^{(0)} = 0. \tag{5.1.10}$$

В анизотропном случае уравнение эйконала имеет два несовпадающих решения, чему соответствуют корни $\mathbf{n}_1 = \nabla\psi_1$, $\mathbf{n}_2 = \nabla\psi_2$

и два вектора поляризации $\mathbf{f}^{(1)}$ и $\mathbf{f}^{(2)}$. Для транспонированной системы (5) заменяем $\mathbf{n}_1$ на $\tilde{\mathbf{n}}_1$ и $\mathbf{n}_2$ на $\tilde{\mathbf{n}}_2$, а векторы поляризации — на $\tilde{\mathbf{f}}^{(1)}$ и $\tilde{\mathbf{f}}^{(2)}$ *). Условия совместности системы (8) приобретают вид

$$(\tilde{\mathbf{E}}^{(0)} \operatorname{rot} \mathbf{H}^{(0)} - \tilde{\mathbf{H}}^{(0)} \operatorname{rot} \mathbf{E}^{(0)})_{1,\,2} = 0, \tag{5.1.11}$$

где значки 1 и 2 обозначают, что требование (11) относится к двум волнам (необыкновенной и обыкновенной).

Некоторые замечания о методах решения уравнений эйконала. Как указывалось выше, уравнение эйконала принадлежит к классу уравнений Гамильтона — Якоби. Можно применить общие методы решения этого класса уравнений к интересующему нас здесь вопросу. Остановимся кратко на этих методах.

Первое замечание касается циклических переменных. Пусть коэффициенты уравнения (6), записанного в криволинейных координатах ξ_1, ξ_2, ξ_3, не зависят от переменной ξ_1. Это будет в том случае, когда такая зависимость отсутствует для компонент тензора ε'_{ij} и коэффициентов Ламе L_i. Тогда переменную ξ_1 называют циклической. В этом случае $\partial\psi/\partial\xi_1 = B_1 = \mathrm{const}$ (B_1 находится из начальных условий). В аналитической механике подобный результат означает сохранение соответствующей компоненты обобщенного импульса. Если аналогичные требования выполнены и для переменной ξ_2, то $\partial\psi/\partial\xi_2 = B_2 = \mathrm{const}$. Тогда компоненты вектора $\mathbf{n} = \nabla\psi$ имеют вид

$$n_1 \equiv \nabla_{\xi_1}\psi = L_1 \partial\psi/\partial\xi_1 = L_1 B_1, \quad n_2 \equiv \nabla_{\xi_2}\psi = L_2 \partial\psi/\partial\xi_2 = L_2 B_2. \tag{5.1.12}$$

В случае декартовых координат ($\xi_1 = x$, $\xi_2 = y$, $\xi_3 = z$) для плоскослоистой среды $\left(\varepsilon'_{ij} = \varepsilon'_{ij}(z)\right)$ $n_x = \mathrm{const}$ и $n_y = \mathrm{const}$. Уравнение (6) для n_z становится алгебраическим. Определяем n_z и интегрируя, имеем

$$\psi(x, y, z) = n_x x + n_y y + \int n_z dz. \tag{5.1.13}$$

В сферических координатах $\left(r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ \vartheta = \operatorname{arctg}\left(\sqrt{x^2 + y^2}/z\right)\right.$ и $\left.\Phi = \operatorname{arctg}(y/x)\right)$ [9], если $\varepsilon'_{ij} = \varepsilon'_{ij}(r)$ (среда со сферической слоистостью), то при распространении в плоскости с фиксированным Φ

$$\psi(r, \vartheta) = \frac{\partial\psi}{\partial\vartheta}\vartheta + \int n_r dr. \tag{5.1.14}$$

Для неплоских слоистых сред соотношения (12) могут быть названы обобщенными законами Снеллиуса, так как они в приближении слабонеоднородных сред дают связь между углами преломления на разных уровнях.

Рассмотрим теперь метод характеристик Гамильтона [1, 8]. Пусть уравнение эйконала записано в виде $F(\omega, \mathbf{k}, \mathbf{r}, t) = 0$, обобщающем формулировку (3.1.12). Ему может быть сопоставлена система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} d\mathbf{r}/d\tau &= \partial F/\partial\mathbf{k}, & d\mathbf{k}/d\tau &= -\partial F/\partial\mathbf{r}, \\ d\omega/d\tau &= \partial F/\partial t, & dt/d\tau &= -\partial F/\partial\omega, \end{aligned} \tag{5.1.15}$$

где введено время τ, используемое в качестве параметра. Величины ω и $\mathbf{k}$ здесь нужно рассматривать как обозначения. Их смысл был раскрыт ра-

---

*) Компоненты векторов $\tilde{\mathbf{f}}^{(1)}$ и $\tilde{\mathbf{f}}^{(2)}$ определяют из уравнений (3.3.13). Компоненты векторов $\tilde{\mathbf{f}}^{(1)}$ и $\tilde{\mathbf{f}}^{(2)}$ находят аналогичным образом, но нужно в (3.3.13) вместо T_{ij} подставить элементы транспонированной матрицы $\tilde{T}_{ij}$.

нее. Зависимость F от времени t учтена с целью упрощения интерпретации последующих результатов.

Кривую $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\tau)$, $t = t(\tau)$ в пространстве-времени $\mathbf{r}$, t, являющуюся решением (15), называют *характеристикой*. В стационарной среде $\partial F/\partial t = 0$ и частота ω не меняется.

Определяя производную с учетом (15)

$$d\mathbf{r}/dt = (d\mathbf{r}/d\tau)(dt/d\tau)^{-1} = (\partial F/\partial \mathbf{k})(\partial F/\partial \omega)^{-1} = \partial \omega/\partial \mathbf{k}, \qquad (5.1.16)$$

устанавливаем, что она совпадает с групповой скоростью $\mathbf{v}_{\text{гр}}$.

Если бы уравнения (15) удалось проинтегрировать, то легко можно найти изменения фазы φ, которые связаны с эйконалом ψ ($\varphi = k_0\psi$). Дифференцируя фазу φ, получаем

$$d\varphi/d\tau = \nabla\varphi \; d\mathbf{r}/d\tau - (\partial\varphi/\partial t)(dt/d\tau) = \mathbf{k}\, \partial F/\partial \mathbf{k} + \omega\, \partial F/\partial \omega.$$

Отсюда, учитывая (15), (16),

$$\varphi(\tau) = \varphi_0 + \int \left(\mathbf{k}\frac{\partial F}{\partial \mathbf{k}} + \omega \frac{\partial F}{\partial \omega}\right) d\tau = \varphi_0 + \int (\omega - \mathbf{k}\mathbf{v}_{\text{гр}}) \frac{\partial F}{\partial \omega}\, d\tau =$$

$$= \varphi_0 + \int (\mathbf{k}\mathbf{v}_{\text{гр}} - \omega)\, dt, \qquad (5.1.17)$$

где φ_0 — начальное значение φ, определяемое в исходной точке характеристики x_0, y_0, z_0 в начальный момент времени t_0.

В частности, если рассматривается эйконал при $\partial F/\partial t = 0$, входящий в (2), то

$$\psi = \psi_0 + \int \mathbf{k}\,(\partial F/\partial \mathbf{k})\, d\tau = \psi_0 + \int \mathbf{n}\,(\partial F/\partial \mathbf{n})\, d\tau,$$

где ψ_0 — начальное значение эйконала. В этом случае векторы $d\mathbf{r}/d\tau$ и $\partial F/\partial \mathbf{k}$ совпадают по направлению с $\mathbf{v}_{\text{гр}} = \partial\omega/\partial\mathbf{k}$. Таким образом, характеристика в каждой точке параллельна $\mathbf{v}_{\text{гр}}$ [12] и перенос энергии волной происходит вдоль $\mathbf{v}_{\text{гр}}$. Эти характеристические линии называют *лучами*.

Обычно в аналитическом виде интегрировать систему (15) столь же трудно, как и исходные уравнения (6). Однако использованию системы (15) часто отдается предпочтение при численном интегрировании [1, 10—13]. Кроме того, запись в виде (15) полезна при формулировке в квадратурах решений в более высоких приближениях по k_0^{-1}.

Отметим, что для получения точных решений уравнения эйконала использовались метод разделения переменных и метод Лагранжа — Шарпи. Применительно к изотропной среде они изложены в [1], а возможности применения первого метода в магнитоактивной плазме обсуждены в [14].

При решении задач о рефракции волн (в частности, о рефракции радиоволн в ионосфере) часто используется теория возмущений. Ее применение оправдано, если тензор $\varepsilon'_{ij}(\mathbf{r})$ можно представить в виде

$$\varepsilon'_{ij}(\mathbf{r}) = \varepsilon'_{ij0} + \varepsilon'_{ij1}(\mathbf{r}) = \varepsilon'_{ij0} + \mu\eta'_{ij}(\mathbf{r}), \qquad (5.1.18)$$

где $|\varepsilon'_{ij1}| \ll |\varepsilon'_{ij0}|$ или

$$|\eta'_{ij}(\mathbf{r})| \sim |\varepsilon'_{ij0}|, \quad \mu \ll 1. \qquad (5.1.19)$$

Представляя эйконал в виде ряда

$$\psi = \psi_0 + \mu\psi_1 + \mu^2\psi_2 \qquad (5.1.20)$$

и подставляя (20) в (6), получим систему уравнений, из которой выпишем три первых:

$$F_0(\mathbf{n}_0, \omega, \mathbf{r}) = \| n_0^2\delta_{ij} - n_{i0}n_{j0} - \varepsilon'_{ij0}(\omega, \mathbf{r}) \| = 0, \qquad (5.1.21)$$

$$(\partial F/\partial n_i)_0\, n_{i,1} = -\left(\partial F/\partial \varepsilon'_{ij}\right)\eta'_{ij} \equiv R_1, \qquad (5.1.22)$$

$$(\partial F/\partial n_i)_0\, n_{i,2} = -\frac{1}{2}\left\{\left(\partial^2 F/\partial n_i \partial n_j\right)_0 n_{i,1}n_{j,1} + \right.$$
$$\left. + 2\left(\partial^2 F/\partial \varepsilon'_{ik}\partial n_j\right)_0 n_{j,0}\eta'_{ik} + \left(\partial^2 F/\partial \varepsilon'_{ij}\partial \varepsilon'_{jl}\right)_0 \eta_{ik}\eta_{jl}\right\} \equiv R_2, \qquad (5.1.23)$$

где $\mathbf{n}_0 = \nabla\psi_0$, $\mathbf{n}_1 = \nabla\psi_1 \ldots$

Пусть решение невозмущенного уравнения (21) $\psi_0(\mathbf{r})$ найдено и известно. Воспользуемся уравнениями характеристик для невозмущенного луча

$$d\mathbf{r}/d\tau = \partial F_0/\partial \mathbf{n}, \quad d\mathbf{n}/d\tau = -\partial F_0/\partial \mathbf{r}. \qquad (5.1.24)$$

Для эйконала в невозмущенных условиях

$$\psi_0 = \psi_{00} + \int \mathbf{n}\left(\partial F_0/\partial \mathbf{n}\right) d\tau,$$

где интегрирование проводится вдоль невозмущенного луча $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0(\tau)$.

Рассмотрим левые части уравнений (22), (23). Учитывая (24), имеем

$$(\partial F/\partial n_i)_0 n_{i,k} = (\partial\psi/\partial x_i)(dx_{i,0}/d\tau) = d\psi_k/d\tau.$$

Отсюда следует

$$\psi_k = \int R_k(\tau)\, d\tau. \qquad (5.1.25)$$

Если среда изотропна, то [1]

$$R_1(\mathbf{r}) = \eta(\mathbf{r}), \quad R_2(\mathbf{r}) = n_1^2(\mathbf{r}), \quad (\partial F/\partial \mathbf{n})_0\, \mathbf{n}_1 = 2\mathbf{n}_0\nabla\psi_1.$$

Тогда

$$\psi_1(\mathbf{r}) = (1/2)\int \eta(\mathbf{r})\, d\tau, \quad \psi_2(\mathbf{r}) = -(1/2)\int n_1^2 d\tau.$$

Уравнения переноса в изотропной плазме. Учитывая, что вектор потока энергии электромагнитного поля определяется соотношением [15] (гл. 3)

$$\mathbf{S} = \frac{c}{4\pi}[\mathbf{EH}], \qquad (5.1.26)$$

мы видим, что (9) представляет собой закон сохранения энергии в волне. Рассмотрим лучевую трубку, аналогичную трубке тока в гидродинамике. Ограничим ее двумя произвольным образом выбранными сечениями, характеризуемыми векторами $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$ (рис. 5.2). Абсолютные значения этих векторов равны площади сечений, а их ориентацию определяют внешние нормали. Интегрируя (9) по объему V участка трубки между указанными сечениями, имеем равенство $\frac{c}{4\pi}\int\limits_V \mathrm{div}\,[\mathbf{EH}]\, dV = 0$. В изотропной

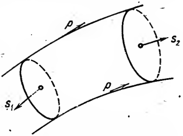

Рис. 5.2. Элемент объема, введенный при рассмотрении закона сохранения энергии.

среде $[\mathbf{EH}] = [\mathbf{E}[\mathbf{nE}]] = E^2\mathbf{n}$. Если воспользоваться формулой Гаусса — Остроградского, то приходим к формулировке закона сохранения потока энергии

$$\frac{c}{4\pi}\int\limits_{s_1}[\mathbf{EH}]\,d\mathbf{s}_1 = \frac{c}{4\pi}\int\limits_{s_2}[\mathbf{EH}]\,d\mathbf{s}_2,$$

где учтено, что поток через боковую поверхность трубки (рис. 5.2) отсутствует, так как $\mathbf{E}\|\mathbf{n}$.

Таким образом, в нулевом приближении метода геометрической оптики поток вектора Пойнтинга через любое сечение заданной лучевой трубки сохраняется.

Для того чтобы найти амплитуду волны, подставим в (9) выражения

$$\mathbf{E}^{(0)} = A\mathbf{f}, \quad \mathbf{H}^{(0)} = A[\mathbf{nf}] = An[\mathbf{pf}]. \tag{5.1.27}$$

Получаем

$$\operatorname{div}(A^2\mathbf{n}) = \mathbf{p}\nabla(A^2 n) + A^2 n \operatorname{div}\mathbf{p} = 0.$$

Имея в виду, что $\mathbf{p}\nabla(A^2n) = (d/d\tau)(A^2n)$, и интегрируя в последнем равенстве, находим

$$A(\tau) = A_0\sqrt{n(\tau)/n_0}\exp\left(-(1/2)\int \operatorname{div}\mathbf{p}\,d\tau\right), \tag{5.1.28}$$

где A_0 и n_0 — значения соответствующих величин в начальной точке $\tau = \tau_0$.

Подставляя (27) в (10), получаем

$$\mathbf{p}\operatorname{rot}\mathbf{f} + [\mathbf{pf}]\operatorname{rot}[\mathbf{pf}] = 0. \tag{5.1.29}$$

Используя единичные векторы $\boldsymbol{\nu}$ и $\mathbf{b}$ вдоль нормали и бинормали к лучу и вводя угол θ между $\mathbf{f}$ и $\boldsymbol{\nu}$, имеем

$$\mathbf{f} = \boldsymbol{\nu}\cos\theta + \mathbf{b}\sin\theta, \quad [\mathbf{pf}] = -\boldsymbol{\nu}\sin\theta + \mathbf{b}\cos\theta.$$

Воспользуемся известными формулами дифференциальной геометрии [16] и только что полученными представлениями для $\mathbf{f}$ и $[\mathbf{pf}]$. В результате получаем

$$\begin{gathered}\mathbf{f}\operatorname{rot}\mathbf{f} = \chi_g + \chi_k - d\theta/d\tau,\\ [\mathbf{pf}]\operatorname{rot}[\mathbf{pf}] = -\chi_g + \chi_k - d\theta/d\tau,\end{gathered} \tag{5.1.30}$$

где χ_k — кручение луча, χ_g — геодезическое кручение линии поля векторов $\mathbf{f}$ на поверхности $\psi = \mathrm{const}$. Подставляя выражения из (30) в (29), получаем

$$d\theta/d\tau = \chi_k. \tag{5.1.31}$$

Последнее соотношение, полученное впервые Рытовым, определяет вращение векторов поля относительно естественного трехгранника.

Уравнения переноса в магнитоактивной плазме. Рассмотрим непоглощающую плазму в магнитном поле $\mathbf{H}_0$ без учета теплового движения частиц (гл. 3). Тензор диэлектрической проницаемости

будет в указанных условиях эрмитов, т. е. $\varepsilon_{ij} = \overset{*}{\varepsilon}_{ji}$. Найдем связь между вектором поляризации $\mathbf{f}$ (3.3.12) и вектором поляризации транспонированной системы $\tilde{\mathbf{f}}$, определяемым аналогичным образом, но с той разницей, что вместо матрицы A_{ij} нужно взять матрицу $\tilde{A}_{ij}$, элементы которой определяются соотношением

$$\tilde{A}_{ij} = A_{ji} = k^2\delta_{ij} - k_i k_j - \tilde{\varepsilon}_{ji}. \tag{5.1.32}$$

Если учесть, что $\tilde{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ji} = \overset{*}{\varepsilon}_{ij}$, то

$$\tilde{A}_{ij} \equiv A_{ji} = A_{ij}^*.$$

Отсюда следует, что $\tilde{\mathbf{E}}^{(0)} = \mathbf{E}^{(0)*}$. Тогда уравнение (11) приобретает вид

$$\mathbf{E}^{(0)*} \operatorname{rot} \mathbf{H}^{(0)} - \mathbf{H}^{(0)*} \operatorname{rot} \mathbf{E}^{(0)} = 0. \tag{5.1.33}$$

Выделяя в (33) вещественную и мнимую части, получим соответственно

$$\mathbf{E}^{(0)*} \operatorname{rot} \mathbf{H}^{(0)} - \mathbf{H}^{(0)*} \operatorname{rot} \mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{E}^{(0)} \operatorname{rot} \mathbf{H}^{(0)*} - \\ - \mathbf{H}^{(0)} \operatorname{rot} \mathbf{E}^{(0)*} = 0, \tag{5.1.34}$$

$$\mathbf{E}^{(0)*} \operatorname{rot} \mathbf{H}^{(0)} - \mathbf{H}^{(0)*} \operatorname{rot} \mathbf{E}^{(0)} - \mathbf{E}^{(0)} \operatorname{rot} \mathbf{H}^{(0)*} + \\ + \mathbf{H}^{(0)} \operatorname{rot} \mathbf{E}^{(0)*} = 0. \tag{5.1.35}$$

Если учесть, что вектор $\overline{\mathbf{S}} = \frac{c}{4\pi}([\mathbf{EH}^*] + [\mathbf{E}^*\mathbf{H}])$ представляет собой усредненный по периоду вектор потока энергии [17], то соотношение (34) представляется в форме

$$\operatorname{div} \overline{\mathbf{S}} = 0. \tag{5.1.36}$$

Действуя, как и ранее в этом параграфе, убеждаемся, что (36) выражает факт сохранения вектора $\overline{\mathbf{S}}$ в лучевой трубке при использовании нулевого приближения геометрической оптики. Направление луча характеризуется вектором $\mathbf{s}$. При использовании нормировки $\mathbf{ff}^* = 1$ имеем

$$2\mathbf{s} = [\mathbf{f}[\mathbf{pf}^*]] - [\mathbf{f}^*[\mathbf{pf}]] = 2\mathbf{p} - \mathbf{f}(\mathbf{pf}^*) - \mathbf{f}^*(\mathbf{pf}). \tag{5.1.37}$$

Вектор $\mathbf{s}$, как указывалось, параллелен $\mathbf{v}_{\text{гр}}$.

Запишем комплексный амплитудный множитель в виде

$$A = |A| \exp(i\delta). \tag{5.1.38}$$

Тогда закон (36) с учетом (27), (37), (38) можно представить в виде

$$\operatorname{div}(|A^2| n\mathbf{s}) = \mathbf{s}\nabla(|A|^2 n) - |A|^2 n \operatorname{div} \mathbf{s} = 0.$$

Учитывая, что $\mathbf{s}\nabla = \mathbf{s}\,\partial/\partial\mathbf{r} = s\,d/d\tau$, после интегрирования последнего уравнения находим

$$|A| = |A_0| \sqrt{n_0 s_0 / ns} \exp\{-(1/2) \textstyle\int \operatorname{div}(\mathbf{s}/s) d\tau\}, \tag{5.1.39}$$

где значения n_0, s_0 и $|A_0|$, как и ранее, взяты в начальной точке $\tau = \tau_0$.

Следует добавить, что между усредненным вектором Пойнтинга $\overline{\mathbf{S}}$ и плотностью энергии поля $w = \frac{1}{16} \frac{\partial(\omega^2 \varepsilon_{ij})}{\omega\, \partial\omega} E_i E_j^*$ существует связь [17, 18]

$$\overline{\mathbf{S}} = w \mathbf{v}_{\text{гр}}.$$

Из (34) при учете (27), (37), (38) приходим к уравнению для δ в виде

$$2\mathbf{s}\nabla\delta + [\mathbf{f}^*[\mathbf{pf}]](\nabla n/n) + \operatorname{Im}\{\mathbf{f}\operatorname{rot}[\mathbf{pf}^*] + [\mathbf{pf}^*]\operatorname{rot}\mathbf{f}\} = 0. \quad (5.1.40)$$

Величина δ представляет собой добавку к фазе волны, не учитываемую уравнением эйконала. Но фактор $\exp(i\delta)$ следует относить к вектору поляризации $\mathbf{f}$. Полное поле в магнитоактивной плазме является суммой полей двух нормальных волн, так что окончательно

$$\mathbf{E} = A_1 \mathbf{f}_1 \exp(ik_0\psi_1) + A_2 \mathbf{f}_2 \exp(ik_0\psi_2). \quad (5.1.41)$$

5.2. Электромагнитные волны в неоднородной изотропной плазме

Плоскослоистая среда. Считаем, что параметры плазмы зависят только от координаты z. В отсутствие поглощения при $\varepsilon = \varepsilon(z)$ уравнение эйконала имеет вид

$$(\partial\psi/\partial x)^2 + (\partial\psi/\partial y)^2 + (\partial\psi/\partial z)^2 - \varepsilon(z) = 0. \quad (5.2.1)$$

Переменные x, y являются циклическими, в силу чего

$$\partial\psi/\partial x \equiv n_x = n_{x0}, \quad \partial\psi/\partial y \equiv n_y = n_{y0}, \quad (5.2.2)$$

откуда ясно, что значения n_x и n_y не меняются и могут быть взяты в определенной начальной точке.

Уравнение фазовых траекторий, совпадающее в изотропной среде с лучами, имеет вид

$$dx/n_x = dy/n_y = dz/n_z. \quad (5.2.3)$$

Поскольку из (3), (2) получается, что проекция луча на плоскость xy представляет прямую $(x - x_0)/n_{x0} = (y - y_0)/n_{y0}$, распространение происходит в плоскости. В качестве таковой без ограничения общности можно выбрать плоскость yz ($n_x = n_{x0} = 0$). Получаемое из (2) соотношение $n_y = n \sin\alpha' = \text{const}$ (α' — угол между $\mathbf{n}$ и осью z) представляет собой закон Снеллиуса, справедливый в плоскослоистых неоднородных средах.

Из (1) при $n_x = 0$ с учетом (2) получаем

$$\partial\psi/\partial z = n_z = \mp\sqrt{\varepsilon(z) - n_{y0}^2}. \quad (5.2.4)$$

Два знака отвечают распространению волн в сторону положительных и отрицательных z. Для эйконала соответственно

имеем

$$\psi = n_{y0}y + \int \sqrt{\varepsilon(z) - n_{y0}^2}\, dz,$$
$$\psi = n_{y0}y - \int \sqrt{\varepsilon(z) - n_{y0}^2}\, dz.$$

Поскольку луч является плоской кривой, то кривизна в (5.1.31) $\chi_k = 0$ и $\theta = \text{const}$. Рассмотрим отдельно два случая: $\theta = \pi/2$ (вектор $\mathbf{E}$ коллинеарен оси x) и $\theta = 0$ (вектор $\mathbf{E}$ лежит в плоскости yz). В первом из них $f_x = 1$, $f_y = f_z = 0$ $\left(E_y^{(0)} = E_z^{(0)} = 0\right)$ из уравнения (п. 5.1)

$$\operatorname{div}(A^2\mathbf{n}) = 0 \tag{5.2.5}$$

для падающей первоначально плоской волны при учете $(\partial/\partial y)(A^2 n_y) = 0$ получаем $A^2 n_z = A_0^2 n_{z0}$, откуда

$$A = \text{const}/\sqrt{n_z} = A_0\sqrt{n_{z0}}/\sqrt{n_z}. \tag{5.2.6}$$

Для напряженности электрического поля волны, распространяющегося в сторону положительных z, имеем

$$E_x = \frac{A_0\sqrt{n_{z0}}}{\sqrt{n_z}} \exp\left\{i\omega t - ik_0\left(n_{y0}y + \int \sqrt{\varepsilon(z) - n_{y0}^2}\, dz\right)\right\}. \tag{5.2.7}$$

Амплитуда поля имеет особенность при $n_z = \sqrt{\varepsilon(z) - n_y^2} = 0$.

Во втором случае $(\theta = 0)$ $f_x = 0$, $f_y = \cos\alpha'$, $f_z = -\sin\alpha'$. Из (6) в этом случае

$$E_y^{(0)} = A_0\sqrt{n_{z0}}\cos\alpha'/\sqrt{n_z}, \quad E_z^{(0)} = A_0\sqrt{n_{z0}}\sin\alpha'/\sqrt{n_z}. \tag{5.2.8}$$

Компоненты поля волны при $\theta = 0$ описываются формулами, аналогичными (7).

Особенность поля волны на уровне отражения $n_z = 0$ связана с тем, что сечение лучевой трубки вблизи точки $n_z = 0$ сужается до нуля (рис. 5.3), а полный поток энергии остается конечным. Поэтому амплитуда формально неограниченно нарастает.

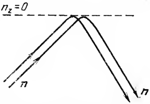

Рис. 5.3. Направление лучей при наклонном падении на плазму.

Не останавливаясь на деталях [17, 19], отметим, что в сферически неоднородной среде, когда $\varepsilon = \varepsilon(r)$, где r — радиус, в приближении геометрической оптики (распространение в плоскости дуги большого круга) закон Снеллиуса формулируется в виде

$$rn\sin\alpha' = r_0 n_0 \sin\alpha_0'. \tag{5.2.9}$$

Зависимость амплитуды $A(r)$ от расстояния r определяется фактором $1/\sqrt{rn_r}$. Например, для радиальной компоненты напряжен-

ности электрического поля имеем связь

$$E_r \infty \sin\alpha'/\sqrt{rn_r}. \tag{5.2.10}$$

Двумернонеоднородные среды. Рассмотрим решение уравнения эйконала в среде с диэлектрической проницаемостью

$$\varepsilon(x,\ y) = \varepsilon_1(x) + \varepsilon_2(y). \tag{5.2.11}$$

Уравнение эйконала имеет вид

$$(\partial\psi/\partial x)^2 + (\partial\psi/\partial y)^2 + (\partial\psi/\partial z)^2 - \varepsilon(x,\ y) = 0. \tag{5.2.12}$$

Так как координата z циклическая, то $n_z = \partial\psi/\partial z = n_{z0}$. Можно, без нарушения общности, считать $n_{z0} = 0$. Тогда из (11), (12)

$$n_x^2 = (\partial\psi/\partial x)^2 = \varepsilon_1(x) + C_1, \quad n_y^2 = (\partial\psi/\partial y)^2 = \varepsilon_2(y) - C_1, \tag{5.2.13}$$

где C_1 — константа интегрирования. Ее можно, например, найти из требования, чтобы $n_x = n_{x0}$ при $x = x_0$. Из (13) имеем

$$\psi(x, y) = \int \sqrt{\varepsilon_1(x) + C_1}\, dx + \int \sqrt{\varepsilon_2(y) - C_1}\, dy. \tag{5.2.14}$$

Из уравнения (5) в рассматриваемом случае получаем

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(A^2 n_x\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(A^2 n_y\right) = 0, \tag{5.2.15}$$

где $n_x = n_x(x)$ и $n_y = n_y(y)$. Отыскивая A^2 в виде

$$A^2 = X(x)\,Y(y), \tag{5.2.16}$$

получаем из (15), (16)

$$X^{-1}\frac{\partial}{\partial x}(n_x X) + Y^{-1}\frac{\partial}{\partial y}(n_y Y) = 0,$$

откуда следует

$$\frac{d}{dx}\ln(n_x X) = \frac{C_2}{n_x}, \qquad \frac{d}{dy}\ln(n_y Y) = -\frac{C_2}{n_y},$$

где C_2 — постоянная разделения. Отсюда

$$X(x) = X_0 \frac{n_{x0}}{n_x}\exp\left(C_2\int\frac{dx}{n_x}\right),$$
$$Y(x) = Y_0 \frac{n_{y0}}{n_y}\exp\left(-C_2\int\frac{dy}{n_y}\right). \tag{5.2.17}$$

Из (16), (17) следует

$$A^2(x, y) = \frac{A_0^2 n_{x0} n_{y0}}{n_x n_y}\exp\left\{C_2\left(\int\frac{dx}{n_x} - \int\frac{dy}{n_y}\right)\right\}. \tag{5.2.18}$$

Учитывая уравнение траектории (3), имеем

$$\int\frac{dx}{n_x} - \int\frac{dy}{n_y} = \text{const}. \tag{5.2.19}$$

В итоге приходим к зависимости амплитуды от координат в виде

$$A(x,\ y) \infty (n_x n_y)^{-1/2}. \tag{5.2.20}$$

Чтобы найти компоненты вектора $\mathbf{E}^{(0)}$, нужно умножить значение амплитуды A на соответствующие проекции вектора поляризации $\mathbf{f}$.

Строгие решения (линейный слой). Исключим из системы (5.1.1) вектор $\mathbf{H}$. Учитывая векторное равенство $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{a} - \Delta\mathbf{a}$, получаем

$$\Delta\mathbf{E} - \operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{E} + k_0^2\varepsilon'\mathbf{E} = 0. \qquad (5.2.21)$$

Если в системе (5.1.1) аналогичным образом исключить векторы $\mathbf{D}'$ и $\mathbf{E}$, то приходим к уравнению

$$\Delta\mathbf{H} + \frac{1}{\varepsilon'}[\nabla\varepsilon' \operatorname{rot}\mathbf{H}] + k_0^2\varepsilon'\mathbf{H} = 0. \qquad (5.2.22)$$

Рассмотрим плоскослоистую среду, полагая $\varepsilon' = \varepsilon'(z)$. Считаем, что распространение волн происходит в плоскости yz. Выделяя зависимость напряженностей полей $\mathbf{E}$ и $\mathbf{H}$ от координаты y, мы можем написать

$$E \propto \exp(-ik_0 n_y y); \quad H \propto \exp(-ik_0 n_y y). \qquad (5.2.23)$$

Из (21), (22) при учете (23) получаем

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} + k_0^2\left(\varepsilon'(z) - n_y^2\right)E_x = 0, \qquad (5.2.24)$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} + k_0^2\varepsilon'(z)\,E_y - ik_0 n_y\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \qquad (5.2.25)$$

$$-ik_0 n_y\frac{\partial E_y}{\partial z} + k_0^2\left(\varepsilon' - n_y^2\right)E_z = 0,$$

$$\frac{\partial^2 H_z}{\partial z^2} + k_0^2\left(\varepsilon' - n_y^2\right)H_z = 0, \qquad (5.2.26)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial z} = ik_0 n_y H_y,$$

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} - \frac{1}{\varepsilon'}\frac{d\varepsilon'}{dz}\frac{\partial H_x}{\partial z} + k_0^2\left(\varepsilon' - n_y^2\right)H_x = 0. \qquad (5.2.27)$$

Из системы уравнений (24)—(27) можно установить, что возможно распространение двух видов волн. К первому относятся волны с отличными от нуля компонентами E_x, H_y, H_z. Для этих волн характерно отсутствие в дифференциальных уравнениях (24), (26) членов с первыми производными по z. Электрическое поле перпендикулярно плоскости, в которой происходит распространение.

Если же это поле лежит в указанной плоскости ($E_y \neq 0$, $E_z \neq 0$), а напряженность магнитного поля характеризуется только компонентой H_x, то можно говорить о волнах второго вида. Их распространение описывается уравнениями (25), (27).

Рассмотрим волну, описываемую уравнением (24) (вектор $\mathbf{E}$ перпендикулярен плоскости падения). Используя для диэлектрической проницаемости формулу (2.2.23) и считая, что $\omega \gg \nu_{\text{эф}}$, приближенно имеем

$$\varepsilon' = 1 - \frac{4\pi e^2 N(z)}{m\omega^2}\left\{1 + i\frac{\nu_{\text{эф}}(z)}{\omega}\right\}. \qquad (5.2.28)$$

Пусть концентрация электронов N зависит от z по линейному закону, а $\nu_{эф} = \text{const}$. Полагая $N = \mu z$, запишем ε' в виде

$$\varepsilon' = 1 - z/z_1, \qquad (5.2.29)$$

где $z_1 = (1 + i\nu_{эф}/\omega)^{-1} m\omega^2 (4\pi e^2\mu)^{-1}$. После введения безразмерной переменной

$$\xi = (k_0 z_1)^{2/3}\left[n_y^2 - \varepsilon'(z)\right] = (k_0 z_1)^{2/3}\left(n_y^2 - 1 + z/z_1\right) \qquad (5.2.30)$$

уравнение (24) принимает вид

$$d^2E_x/d\xi^2 - \xi E_x = 0. \qquad (5.2.31)$$

Решением уравнения (31) являются функции Эйри [20, 21], определяемые интегралом

$$Z(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int \exp\left(\xi\tau - \frac{\tau^3}{3}\right)d\tau \qquad (5.2.32)$$

по некоторому контуру в плоскости комплексного переменного τ.

Функция $Z(\xi)$ может быть представлена в виде степенного ряда [22]

$$Z(\xi) = Z(0)\left\{1 + \frac{\xi^3}{2.3} + \frac{\xi^6}{(3.5)(3.6)} + \ldots\right\} + \\ + iZ'(0)\left\{1 + \frac{\xi^3}{3.4} + \frac{\xi^6}{(3.6)(4.7)} + \ldots\right\}, \qquad (5.2.33)$$

где $Z(0) = 2\sqrt{\pi}\,3^{-2/3}\exp(i\pi/6)/\Gamma(2/3)$, $Z'(0) = 2\sqrt{\pi}\,3^{-1/3}/\Gamma(2/3)$, $\Gamma(x)$ — гамма-функция.

Вещественная и мнимая части выражения (32) представляют два линейно независимых решения уравнения (31) $u(\xi)$ и $v(\xi)$. Функция $v(\xi)$, которая нас будет интересовать в дальнейшем, при вещественных ξ представляется интегралом Эйри

$$v(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty \cos\left(\xi\tau - \frac{\tau^3}{3}\right)d\tau. \qquad (5.2.34)$$

Не будем далее учитывать столкновения ($\nu_{эф} = 0$). Зависимость отношения $v(\xi)/v(0)$ от ξ приведена на рис. 5.4 [22]. Асимптотические выражения для $v(\xi)$ и $v'(\xi) = \partial v/\partial\xi$ имеют вид

$$\begin{aligned} v(\xi) &= \frac{\xi^{-1/4}}{2}\exp\left(-\frac{2}{3}\xi^{3/2}\right)\left(1 - \frac{3a_1}{2}\xi^{-3/2} + \right.\\ &\qquad\left. + \frac{9a_2}{4}\xi^{-3} + \ldots\right), \quad \xi > 0, \\ v'(\xi) &= -\frac{\xi^{-1/4}}{2}\exp\left(-\frac{2}{3}\xi^{3/2}\right)\left(1 + \frac{3b_1}{2}\xi^{-3/2} - \right.\\ &\qquad\left. - \frac{9b_2}{4}\xi^{-3} + \ldots\right), \quad \xi > 0; \end{aligned} \qquad (5.2.35)$$

$$v(\xi) = |\xi|^{-1/4}\Big\{\sin\Big(\frac{2}{3}|\xi|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\Big)\Big(1 - \frac{9a_2}{4}|\xi|^{-3} + \ldots\Big) -$$
$$- \cos\Big(\frac{2}{3}|\xi|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\Big)\Big(\frac{3a_1}{2}|\xi|^{-3/2} - \frac{27a_3}{8}|\xi|^{-9/2} + \ldots\Big)\Big\}, \quad \xi < 0,$$
$$(5.2.36)$$
$$v'(\xi) = |\xi|^{-1/4}\Big\{-\cos\Big(\frac{2}{3}|\xi|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\Big)\Big(1 - \frac{9b_2}{4}|\xi|^{-3} + \ldots\Big) +$$
$$+ \sin\Big(\frac{2}{3}|\xi|^{3/2} + \frac{\pi}{4}\Big)\Big(\frac{3b_1}{2}|\xi|^{-3/2} - \frac{27b_3}{8}|\xi|^{-9/2} + \ldots\Big)\Big\}, \quad \xi < 0,$$

где

$$a_n = \frac{5\cdot 11\ldots(6n-1)\cdot 7\cdot 13\ldots(6n-5)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n\,(72)^n},$$
$$b_n = \frac{7\cdot 13\ldots(6n+1)\cdot 5\cdot 11\ldots(6n-7)}{1\cdot 2\cdot 3\ldots n\,(72)^n}.$$

Пусть волна единичной амплитуды

$$E_{\text{пад}} = \exp(-ik_0 n_{z0} z) \qquad (5.2.37)$$

падает из полупространства $z<0$ на границу $z=0$ (рис. 5.5).

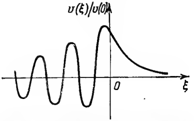

Рис. 5.4. Структура электрического поля вблизи точки отражения, описываемого функцией Эйри.

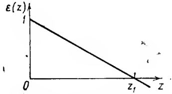

Рис. 5.5. Диэлектрическая проницаемость $\varepsilon(z)$ для линейного слоя плазмы.

Полное поле при $z<0$ является суммой падающей и отраженной волн

$$E_{\text{полн}} = \exp(-ik_0 n_{z0} z) + V(\vartheta_0)\exp(ik_0 n_{z0} z), \qquad (5.2.38)$$

где ϑ_0 — угол падения, $n_{z0} = \cos\vartheta_0$ и $V(\vartheta_0)$ — коэффициент отражения.

При $z>0$ поле описывается уравнением (31). Его решением, которое ограничено при $z \to \infty$, является функция $v(\xi)$. На границе $z=0$ должна выполняться непрерывность полного поля и его производной по z, а именно,

$$1 + V = Dv(\xi_0),$$
$$ik_0\cos\vartheta_0(1 - V) = \big(k_0^2/z_1\big)^{2/3} Dv'(\xi_0), \qquad (5.2.39)$$

где D — коэффициент прохождения и $\xi_0 = (k_0 z_1)^{2/3}(n_y^2 - 1)$. Из (39) находим

$$V = \frac{i\sqrt{-\xi_0}\, v(\xi_0) - v'(\xi_0)}{i\sqrt{-\xi_0}\, v(\xi_0) + v'(\xi_0)}, \tag{5.2.40}$$

$$D = \frac{2i\sqrt{-\xi_0}}{v'(\xi_0) + i\sqrt{-\xi_0}\, v(\xi_0)}.$$

Выражение для V в (40) можно также представить в виде

$$V = \exp\left\{-i\pi - 2i \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{-\xi_0}\, v(\xi_0)}{v'(\xi_0)}\right\}. \tag{5.2.41}$$

Из (41) следует, что $|V| = 1$, т. е. имеет место полное отражение волны, а коэффициент V характеризует сдвиг фаз между отраженной и падающей волнами.

При $k_0 z_1 \gg 1$ и при ϑ_0, не очень близких к $\pi/2$, можно воспользоваться асимптотическими выражениями (36), так как $\xi_0 < 0$ $(n_y^2 = \sin^2\vartheta_0 < 1)$. При $|\xi_0| \gg 1$, ограничиваясь в (36) лишь первыми членами разложений, имеем

$$v(\xi_0) = (k_0 z_1)^{1/3} n_{z0} \sin\left(\frac{2}{3} k_0 z_1 n_{z0}^3 + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$v'(\xi_0) = -(k_0 z_1)^{1/3} n_{z0} \cos\left(\frac{2}{3} k_0 z_1 n_{z0}^3 + \frac{\pi}{4}\right).$$

В этом случае согласно (41)

$$V(\xi_0) = \exp\left(-i\frac{\pi}{2} + i\frac{4}{3} k_0 z_1 n_{z0}^3\right). \tag{5.2.42}$$

В приближении геометрической оптики без учета набега фазы, связанного с изменением координаты y, для сдвига фаз между падающей и отраженной волнами φ имеем соотношение

$$\varphi = k_0 \psi = \int\limits_0^{z_1 - n_{y0}^2} \sqrt{\varepsilon(z) - n_{y0}^2}\, dz. \tag{5.2.43}$$

С учетом (29) и равенства $n_{y0}^2 + n_{z0}^2 = 1$ из (43) получаем

$$\varphi = (4/3) k_0 z_1 n_{z0}^3 = (4/3) k_0 z_1 (\cos\vartheta_0)^3. \tag{5.2.44}$$

Сравнивая (42) и (44), мы видим, что для φ точное решение дает результат, отличающийся от геометрооптического на постоянную $-\pi/2$. Различия связаны с распространением вблизи точки поворота (отражения).

Не останавливаясь на решении задач о распространении электромагнитных волн в плазме с другими зависимостями $\varepsilon'(z)$ [или без поглощения $\varepsilon(z)$], отметим, что подобный обзор найденных точных решений уравнения (24) можно найти в [15, 22].

О волнах с вектором электрического поля, лежащим в плоскости распространения. Для этого вида волн отлична от нуля только одна компонента вектора H ($H_x \neq 0$) и можно воспользоваться уравнением (27). После нахождения решения этого уравнения компоненты напряженности электрического поля определяются из соотношений

$$E_y = -i(k_0\varepsilon')^{-1}\frac{\partial H_x}{\partial z}, \quad E_z = i(k_0\varepsilon')^{-1}\frac{\partial H_x}{\partial y}. \qquad (5.2.45)$$

Рассмотрим случай, когда потери отсутствуют и диэлектрическая проницаемость ε изменяется по линейному закону. Поскольку нас будет интересовать лишь структура поля в окрестности точки, где $\varepsilon = 0$ *), будем считать

$$\varepsilon(z) = az. \qquad (5.2.46)$$

Уравнение (27) с учетом (46) приобретает вид

$$\frac{d^2H_x}{dz^2} - \frac{1}{z}\frac{dH_x}{dz} + k_0^2(az - n_{y0}^2)H_x = 0. \qquad (5.2.47)$$

Решение вблизи $z = 0$ можно записать в виде ряда. Его можно представить в виде суммы решений, одно из которых не имеет особенности при $z = 0$, а другое содержит такую особенность.

Первое, как можно убедиться непосредственной подстановкой, имеет вид

$$H_{x(1)} = z^2 + \frac{k_0^2 n_{y0}^2}{8} z^4 - \frac{ak_0^2}{15} z^5 + \frac{k_0^4 n_{y0}}{8.24} z^6 \ldots \qquad (5.2.48)$$

Второе линейно независимое решение имеет вид

$$H_{x(2)} = H_{x(1)} \ln(k_0 n_{y0} z) + \frac{2}{k_0^2 n_{y0}^2} - \frac{2}{3}\frac{a}{n_{y0}^2} z^3 \ldots \qquad (5.2.49)$$

Полное решение можно записать в виде

$$H_x = C_1 H_{x(1)} + C_2 H_{x(2)},$$

где C_1 и C_2 — константы. При $z \to 0$ $H_{x(1)} \ln(k_0 n_{y0} z) \to 0$, в этом пределе $H_x = 2C_2/k_0^2 n_{y0}^2 = \mathscr{H}$. Тогда из (45) получаем для компонент электрического поля

$$\begin{aligned} E_y &= -\frac{ik_0 n_{y0}^2}{a}\mathscr{H}\ln(k_0 n_{y0} z)\exp(-ik_0 n_{y0} y), \\ E_z &= \frac{n_{y0}}{a}\mathscr{H}\frac{1}{z}\exp(-ik_0 n_{y0} y), \end{aligned} \qquad (5.2.50)$$

где зависимость полей от координаты y представлена в явном виде. Из (50) следует, что компонента E_y при $z \to 0$ имеет логарифмическую особенность, а E_z — особенность вида z^{-1}.

*) Вне этой окрестности для структуры полей каких-либо особенностей по сравнению со случаем, когда $E_x \neq 0$, $E_y = E_z = 0$, не возникает.

Для того чтобы избавиться от расходимости, достаточно учесть наличие слабого поглощения. Используя соотношение (28), вблизи $\varepsilon(z)=0$ при учете (46) имеем $\varepsilon'(z)=az+is_e$ (s_e можно считать не зависимым от координат). Уравнение (27) будет включать члены с комплексными коэффициентами, в силу чего в разложениях (48), (49) значения переменной z уже нужно считать комплексными. Тогда амплитуды компонент поля $\mathbf{E}$ при $z=0$ будут конечны [15].

Оценим поле вблизи точки поворота (отражения), координата которой равна

$$z_{\text{п}}=n_{y0}^2/a. \tag{5.2.51}$$

Полагая $z=z_{\text{п}}+\Delta z$, $|\Delta z|\ll z_{\text{п}}$, из (27) с учетом (51) приближенно имеем

$$\frac{d^2H_x}{d\,(\Delta z)^2}-\frac{1}{z_{\text{п}}}\frac{dH_x}{d(\Delta z)}-k_0^2a\Delta zH_x=0. \tag{5.2.52}$$

Заметим, что $a\sim z_1^{-1}$, где z_1 — характерный масштаб, на котором меняются свойства среды. Будем считать, что $z_1\gg\lambda=k^{-1}$. Тогда при не очень малых n_{y0}, если рассматривать расстояния Δz, много меньшие z_1, членом с первой производной можно пренебречь. В итоге мы приходим к уравнению Эйри (31), где $\xi=\left(k_0^2a\right)^{1/3}\Delta z$. Его решением, убывающим в области непрозрачности, будет функция $v(\xi)$ (35), (36), имеющая до точки отражения осциллирующую структуру.

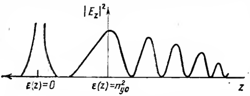

Рис. 5.6. Особенность для компоненты электрического поля E_z при наклонном падении электромагнитных волн на неоднородную плазму.

На рис. 5.6 приведена в качественной форме зависимость $|E_z|^2$ от z. Из него видеп периодический характер изменения интенсивности в зоне прозрачности и резкое убывание за точкой отражения. Показана особенность, связанная с расходимостью ($\nu_{\text{эф}}=0$) поля в точке $\varepsilon=0$. Основополагающие исследования по расчету структуры полей при наличии такой особенности были выполнены Ферстелингом и Денисовым [23, 24].

Появление этой особенности можно связывать с возможностью существования вблизи точки $\varepsilon=0$ плазменных волн. Поперечная волна доходит до точки поворота, где $\varepsilon=n_{y0}^2$, и отражается. За точкой поворота при $z>z_{\text{п}}$ поля убывают по экспоненте. Однако при $\omega\approx\omega_{e0}$ в плазме могут распространяться высокочастотные продольные волны (пп. 3.2 и 4.1). Происходит «туннельное просачивание» поперечных волн в область существования продольных волн.

При нормальном падении у поперечных волн z-компонента поля $\mathbf{E}$ отсутствует и продольные волны не возбуждаются. С другой стороны, когда точка отражения $z = z_п$ далеко отстоит от уровня $\varepsilon = 0$, появление продольных волн ограничивается плохим просачиванием поперечных волн через слой большой толщины (поперечные волны являются исчезающими) на уровень плазменного резонанса $(\omega^2 \approx \omega_{e0}^2)$. Следовательно, наиболее сильного проявления особенностей при $\varepsilon = 0$ можно ожидать при малых, но не равных нулю угла $\vartheta_0 (n_{y0}^2 \ll 1)$.

Принципиальная важность эффекта нарастания поля при $\omega \approx \omega_{e0}$ делает целесообразным его наглядную интерпретацию на качественном, но простом примере. Рассмотрим падение волн на границу раздела $z = 0$ двух плазменных однородных сред с диэлектрическими проницаемостями $\varepsilon_1 (z < 0)$ и $\varepsilon_2 (z > 0)$. Считаем, что на границу наклонно падает поперечная волна с напряженностью $\mathbf{E}_{пад}$, которая трансформируется в отраженную волну ($\mathbf{E} = \mathbf{E}_{отр}$, рис. 5.7) и преломляющуюся ($\mathbf{E} = \mathbf{E}_{пр}$). Преломленная волна в полупространстве $z > 0$ считается продольной. Наличие поперечных волн здесь приближенно игнорируется, так как плазму с $\varepsilon = \varepsilon_2$ мы считаем непрозрачной для этих волн. Зависимости напряженностей полей вблизи $z = 0$ от координат определяются следующими факторами:

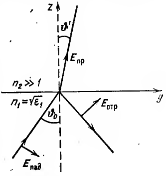

Рис. 5.7. Взаимодействие электромагнитных волн с плазменными при наклонном падении на резкую границу.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{пад} &\propto \exp\{-ik_0(n_{y0}y + n_{z1}z)\}, \quad z < 0, \\ \mathbf{E}_{отр} &\propto \exp\{-ik_0(n_{y0}y - n_{z1}z)\}, \quad z < 0, \\ \mathbf{E}_{пр} &\propto \exp\{-ik_0(n_{y0}y + n_{z2}z)\}, \quad z > 0. \end{aligned} \tag{5.2.53}$$

Из требования непрерывности тангенциальной компоненты вектора $\mathbf{E}$ и нормальной компоненты вектора $\mathbf{D}$ при $z = 0$ получаем

$$\begin{aligned} E_{отр} \cos\vartheta_0 - E_{пр} \sin\vartheta' &= -E_{пад} \cos\vartheta_0, \\ E_{отр} \sin\vartheta_0 - E_{пр}\varepsilon_2 \cos\vartheta' &= \varepsilon_1 E_{пад} \sin\vartheta_0, \end{aligned} \tag{5.2.54}$$

где ϑ' — угол преломления. В падающей волне заданы компоненты $E_{пад,\,y} = E_{пад} \cos\vartheta_0$ и $E_{пад,\,z} = -E_{пад} \sin\vartheta_0$. Из (54) находим

$$\frac{E_{пр}}{E_{пад}} = -\frac{2\sin\vartheta_0 \cos\vartheta_0\, \varepsilon_1}{\cos\vartheta_0 \cos\vartheta' \varepsilon_2 - \sin\vartheta_0 \sin\vartheta' \varepsilon_1}. \tag{5.2.55}$$

Учитывая зависимости $\sin\vartheta_0 = n_{y0}/n_1 = n_{y0}/\sqrt{\varepsilon_1}$, $\sin\vartheta' = n_{y0}/n_2$, $\cos\vartheta_0 = n_{z1}/n_1 = \sqrt{(\varepsilon_1 - n_{y0}^2)/\varepsilon_1}$, $\cos\vartheta' = n_{z2}/n_2 = \sqrt{(n_2^2 - n_{y0}^2)}/n_2$,

мы можем представить (55) в виде

$$\frac{E_{\text{пр}}}{E_{\text{пад}}} = -\frac{2n_{y0}\sqrt{\varepsilon_1 - n_{y0}^2}\,\sqrt{\varepsilon_1}\,n_2}{\varepsilon_2\sqrt{\varepsilon_1 - n_{y0}^2}\,\sqrt{n_2^2 - n_{y0}^2 - \varepsilon_1 n_{y0}^2}}. \qquad (5.2.56)$$

С падающей волной будем сопоставлять волну, просачивающуюся за точку отражения. Тогда $\varepsilon_1 < n_{y0}^2$ и $\sqrt{\varepsilon_1 - n_{y0}^2} = -i\sqrt{|\varepsilon_1 - n_{y0}^2|}$ (знак минус соответствует затуханию в направлении положительных z). Чтобы ослабление амплитуды поля при этом не было очень сильным, нужно считать выполненным условие $|n_{y0}^2 - \varepsilon_1| \ll 1$. Под преломленной волной подразумевается плазменная волна, в силу чего $n_2^2 \gg 1$ $(n_2^2 \gg n_{y0}^2)$. Так как эффект будет наибольшим при малых углах падения, то примем, что $n_{y0} = \sin\vartheta_0 \approx \vartheta_0 \ll 1$.

Если в знаменателе (56) первое слагаемое больше второго, то с учетом сделанных замечаний

$$\frac{E_{\text{пр}}}{E_{\text{пад}}} \approx -\frac{2n_{y0}\sqrt{\varepsilon_1}}{\varepsilon_2}. \qquad (5.2.57)$$

Поле в зоне плазменного резонанса, где $|\varepsilon_2| \ll 1$, имеет особенность вида $1/\varepsilon_2$.

Если же выполнено обратное условие, то

$$\frac{E_{\text{пр}}}{E_{\text{пад}}} \approx \frac{2i\sqrt{|\varepsilon_1 - n_{y0}^2|}\,n_2}{\sqrt{\varepsilon_1}\,n_{y0}}. \qquad (5.2.58)$$

Здесь увеличение амплитуды поля при переходе через границу $z = 0$ связано с сильным превышением n_2 по сравнению с n_{y0}. Правда, величина $\sqrt{|\varepsilon_1 - n_{y0}^2|}$ принимается малой, что как бы снижает эффект. Теперь укажем условие применимости (57) [приближение (58) справедливо при обратном условии]. Здесь удобнее обратиться к соотношению (55), откуда ясно, что для перехода к (57) необходимо, чтобы

$$\varepsilon_2/\varepsilon_1 \gg \operatorname{tg}\vartheta_0 \operatorname{tg}\vartheta'.$$

Заменяя $\operatorname{tg}\vartheta_0 \approx \vartheta_0$, $\operatorname{tg}\vartheta' \approx n_{y0}/n_2 \ll 1$, приходим к ограничению

$$\varepsilon_2/\varepsilon_1 \gg \vartheta_0 n_{y0}/n_2.$$

Несмотря на малость ε_2, неравенство выполняется при небольших углах ϑ_0. Здесь существенно также, что $n_{y0} \ll n_2$.

Как уже оговаривалось, подобное рассмотрение не претендует на строгость. Однако и в его рамках можно объяснить основной эффект увеличения амплитуды поля при $\varepsilon \approx 0$. Строгое рассмотрение связи между поперечными и продольными волнами при наклонном падении приведено в [19, 25].

5.3. Наклонное падение электромагнитных волн на магнитоактивную плазму

Квартика Букера. Будем в приближении геометрической оптики рассматривать распространение волн в плоскослоистой магнитоактивной плазме. Пусть свойства плазмы зависят от координаты z. Будем считать, что волновой вектор лежит в плоскости yz. В отличие от ряда предшествующих параграфов здесь постоянное внешнее магнитное поле имеет неравную нулю компоненту H_{0x}. Если говорить об ионосфере, то речь идет об изменении концентрации электронов N и частоты соударений с высотой z (сферичность верхней атмосферы во внимание не принимается). Произвольная ориентация поля $\mathbf{H}_0$ дает возможность исследовать ионосферное распространение радиоволн на различных широтах.

Полагая $\varepsilon'_{ij} = \varepsilon'_{ij}(z)$ и обращаясь к уравнению эйконала (5.1.6), мы видим, что переменные x, y являются циклическими, так что $n_x = n_{x0}$ и $n_y = n_{y0}$ постоянны. Принимая, как уже указывалось, что распространение происходит в плоскости yz, мы полагаем $n_x = 0$. Воспользовавшись выражениями для компонент тензора ε'_{ij} (3.1.31), запишем уравнение эйконала (5.1.7) в виде [17]

$$\alpha_p n_z^4 + \beta p n_z^3 + \gamma_p n_z^2 + \delta_p n_z + \varepsilon_p = 0, \qquad (5.3.1)$$

где

$$\begin{aligned}
&\alpha_p = (1 - is_e)\{(1 - is_e)^2 - u_e\} - v_e\{(1 - is_e)^2 - u_{ez}\},\\
&\beta_p = 2n_{y0}v_e\sqrt{u_{ey}u_{ez}},\\
&\gamma_p = -2(1 - is_e)\{[(1 - n_{y0}^2)(1 - is_e) - v_e](1 - is_e - v_e) -\\
&\qquad - (1 - n_{y0}^2)u_e\} + v_e\{u_{ey}n_{y0}^2 - (1 - n_{y0}^2)u_{ez} - u_e\}, \qquad (5.3.2)\\
&\delta_p = -2(1 - n_{y0}^2)n_{y0}v_e\sqrt{u_{ey}u_{ez}},\\
&\varepsilon_p = \{(1 - n_{y0}^2)(1 - is_e) - v_e\}\{[(1 - n_{y0}^2)(1 - is_e) - v_e]\times\\
&\qquad \times(1 - is_e - v_e) - u_e(1 - n_{y0}^2)\} - (1 - n_{y0}^2)n_{y0}^2u_{ey}v_e,\\
&\qquad \sqrt{u_{ey}} = \frac{eH_{0y}}{mc\omega}, \quad \sqrt{u_{ez}} = \frac{eH_{0z}}{mc\omega} \qquad (u_{ex} + u_{ey} + u_{ez} = u_e^2).
\end{aligned}$$

Естественно, что в (1) $n_z \equiv \partial\psi/\partial z$.

При написании (1) считается, что волна падает на плазму из свободного полупространства, так что

$$n_y = n_{y0} = \sin\vartheta_0,$$

где ϑ_0 — угол падения. Если уровень $z = 0$ относить не к вакууму (или к границе плазма — вакуум), а к области, заполненной плазмой, то в (2) нужно заменить $1 - n_{y0}^2$ на $n_0^2 - n_{y0}^2$, где n_0 — значение показателя преломления при $z = 0$.

Уравнение (2) описывает при наклонном падении распространение высокочастотных волн в магнитоактивной плазме при не-

учете пространственной дисперсии. Его часто называют *квартикой Букера*. Заметим, что другая запись уравнения (1) в случае, когда магнитное поле лежит в плоскости yz, а вектор $\mathbf{n}$ ориентирован противоположным образом, дана в [17], § 29. При этом форма записи (1) уравнения сохраняется, но для коэффициентов (2) справедливы другие соотношения.

Из четырех корней уравнения (1) два отвечают волнам разных типов, распространяющимся в сторону положительных z (падающие волны) *). Два других корня соответствуют волнам, распространяющимся в сторону отрицательных z (отраженные волны). Из (1) можно найти n_z, решая алгебраическое уравнение, после чего для эйконала ψ получаем

$$\psi(y, z) = n_{y0}(y - y_0) + \int_{z_0}^{z} n_z(z)\, dz. \qquad (5.3.3)$$

Значения корней n_z в уравнении (1), вообще говоря, не совпадают. Так как значения n_{y0} фиксированы, можно говорить и о несовпадении между абсолютными значениями показателей преломления $n = \sqrt{|n_y^2 + n_z^2|}$, а также об углах между векторами $\mathbf{n}$ и осью z ($\vartheta = \operatorname{arctg}(n_y/n_z)$). Таким образом, если волна такого типа 1 или 2 распространяется и отражается, то падающей и отраженной волнам будут соответствовать разные ϑ, т. е. на уровнях $z = z_1$, расположенных в плазме, угол падения не равен углу отражения. Это нельзя понимать как нарушение закона Снеллиуса. Отметим, что при падении волн на плазму из вакуума под углом ϑ_0 выход этих волн в вакуум также происходит под углом ϑ_0.

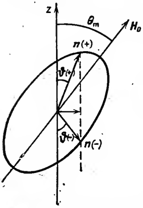

Рис. 5.8. Несимметрия ориентации поверхностей волновых нормалей по отношению к оси z.

Различия в углах падения «внутри» плазмы нетрудно объяснить, используя тот факт, что геометрооптическое приближение базируется на представлении о локальной однородности среды. В однородной среде показатели преломления необыкновенной и обыкновенной волн зависят от угла α между $\mathbf{n}$ и $\mathbf{H}_0$. Из (3.3.6), (3.3.7) следует, что $n_{1,2}(\alpha)$ будут четными функциями α (в указанные соотношения входят только $\sin^2\alpha$ и $\cos^2\alpha$). Поверхности $n_{1,2}(\alpha)$ при разных значениях параметров плазмы представляют интерес в теории излучения волн в плазме и используются для классификации волн. Если вектор $\mathbf{H}_0$ составляет с осью z угол θ_m, то поверхности $n_{1,2}(\alpha)$ не симметрич-

*) При распространении в верхней атмосфере речь идет обычно о наклонном падении радиоволн, генерируемых на земной поверхности, на ионосферную плазму.

ны относительно оси z. При заданном n_{y0} значения $n_{1,2(+)}$ и $n_{1,2(-)}$ и углы $\vartheta_{1,2(+)}$ и $\vartheta_{1,2(-)}$ *) между собой различаются (рис. 5.8). Когда поле $\mathbf{H}_0$ направлено по оси z ($u_{ey}=0$) или при $u_{ez}=0$, в (2) $\beta_p=\delta_p=0$ и квартика Букера сводится к биквадратному уравнению (указанная несимметрия отсутствует).

Об амплитуде поля. Амплитуды каждой из нормальных волн могут быть найдены из соотношения (5.1.36) или (5.1.39). Для плоских волн эти амплитуды могут зависеть только от координаты z. В результате для плоскослоистой среды уравнение (5.1.36) приобретает вид

$$(d/dz)\left\{[\mathbf{E}^{(0)}\mathbf{H}^{(0)*}]_z+[\mathbf{E}^{(0)*}\mathbf{H}^{(0)}]_z\right\}=0,$$

откуда при $n_x=0$ имеем

$$(d/dz)\left\{2n_z\left(E_x^{(0)}E_x^{(0)*}+E_y^{(0)}E_y^{(0)*}\right)-n_y\left(E_y^{(0)}E_z^{(0)*}+E_y^{(0)*}E_z^{(0)}\right)\right\}=0. \quad (5.3.4)$$

Введем амплитудный множитель A, полагая $\mathbf{E}^{(0)}=A\mathbf{f}$, где $\mathbf{f}$ — вектор поляризации (3.3.13). В итоге из (4) получаем

$$A(z)=B\left\{2n_z\left(f_xf_x^*+f_yf_y^*\right)-n_y\left(f_yf_z^*+f_y^*f_z\right)\right\}^{-1}, \quad (5.3.5)$$

где B — постоянная. Для каждой из нормальных волн будет определенное $A(z)$, так как для разных волн с $n=n_{1,2(+)}$ или $n=n_{1,2(-)}$ значения n_z, f_x, f_y и f_z отличаются.

Полное поле является суперпозицией полей нормальных волн и в приближении геометрической оптики определяется соотношением

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t)=\exp(i\omega t-ik_0n_{y0}y)\times$$
$$\times\sum_\delta\frac{\mathbf{f}_\delta B_\delta\exp\left(-ik_0\int n_{z\delta}dz\right)}{\left\{2n_{z\delta}\left(f_{x\delta}f_{x\delta}^*+f_{y\delta}f_{y\delta}^*\right)-n_y\left(f_{y\delta}f_{z\delta}^*+f_{y\delta}^*f_{z\delta}\right)\right\}^{1/2}}, \quad (5.3.6)$$

где $\delta=1, 2, 3, 4$ отвечают корням уравнения (1). Каждому из $n_{z\delta}$ при заданном n_{y0} будет отвечать свой вектор $\mathbf{f}_\delta$ (гл. 3). Константы B_δ должны быть определены для каждой нормальной волны из своих начальных условий.

Рассмотрим теперь некоторые особенности распространения волн в неоднородной магнитоактивной плазме. В присутствии поля $\mathbf{H}_0$ направления волнового вектора $\mathbf{k}$ и групповой скорости $\mathbf{v}_{\text{гр}}=\partial\omega/\partial\mathbf{k}$, вообще говоря, не совпадают. Это приводит к ряду особенностей в поведении линий волновых нормалей и лучей.

Для того чтобы выявить эти особенности, обратимся к уравнению эйконала (5.1.1), которое будем рассматривать как локальное дисперсионное уравнение. Компоненты $\mathbf{v}_{\text{гр}}$ могут быть найдены по правилам дифференцирования неявных функций, как это делалось в п. 3.2. Тогда, имея в виду простую связь $\mathbf{k}=k_0\mathbf{n}$, имеем

$$\begin{aligned}v_{\text{гр},y}&=-c\omega^3(\partial F/\partial n_y)(\partial(\omega^4F)/\partial\omega)^{-1},\\ v_{\text{гр},z}&=-c\omega^3(\partial F/\partial n_z)(\partial(\omega^4F)/\partial\omega)^{-1}.\end{aligned} \quad (5.3.7)$$

*) В данном случае индексы + и — означают, что распространение происходит вдоль оси z или в обратном направлении.

Из соотношений (1), (2), используя (7), находим

$$v_{\text{гр},y} = -c\omega^3 (\partial(\omega^4 F)/\partial\omega)^{-1} \big(n_z^3 \partial\beta_p/\partial n_y + n_z^2 \partial\gamma_p/\partial n_y + n_z \partial\delta_p/\partial n_y + \partial\varepsilon_p/\partial n_y\big), \quad (5.3.8)$$
$$v_{\text{гр},z} = -c\omega^3 (\partial(\omega^4 F)/\partial\omega)^{-1} \big(4\alpha_p n_z^3 + 3\beta_p n_z^2 + 2\gamma_p n_z + \delta_p\big),$$

где

$$\partial\beta_p/\partial n_y = 2v_e \sqrt{u_{ey}u_{ez}},$$
$$\partial\gamma_p/\partial n_y = 2n_{y0}\,[2(1-u_e-v_e)+u_e v_e],$$
$$\partial\delta_p/\partial n_y = -2n_y\big(1-n_y^2\big)v_e\sqrt{u_{ex}u_{ez}}, \quad (5.3.9)$$
$$\partial\varepsilon_p/\partial n_y = 2n_y\{(1-n_y)^2[-2(1-v_e-u_e)+2v_e(1-v_e) - u_e v_e] - u_{ey}v_e\}.$$

Имея в виду принятое ранее равенство $n_x = 0$, для нормального падения ($n_y = 0$) из (9) получаем

$$v_{\text{гр},\,y} = -2c\omega^3(\partial(\omega^4 F)/\partial\omega)^{-1} v_e \sqrt{u_{ey}u_{ez}}\, n^2 n_z,$$
$$v_{\text{гр},\,z} = -2c\omega^3(\partial(\omega^4 F/\partial\omega)^{-1}\{2n^2(1-u_e)+v_e[(1-v_e)^2-u_e]\}n_z, \quad (5.3.10)$$

где $n_z^2 = n^2$. При $n_y = n_{y0} = 0$ уравнение является биквадратным и не меняет своего вида при изменении n_z на $-n_z$. Что же касается проекций групповой скорости (10), то они в этом случае меняют знак. При $n_z = 0$ согласно (10) $v_{\text{гр},\,y} = v_{\text{гр},\,z} = 0$. Таким образом, если луч выходит из какой-то точки при $y = y_0$, $z = 0$ и доходит до уровня $n_z = 0$, то там групповая скорость $\mathbf{v}_{\text{гр}}$ меняет знак и луч по той же траектории возвращается в исходную

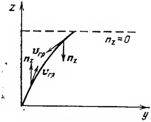

Рис. 5.9. Одна из траекторий в магнитоактивной плазме, когда луч возвращается в исходную точку.

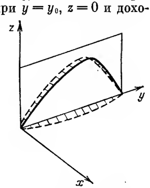

Рис. 5.10. Выход лучей из плоскости падения при распространении в слоисто-неоднородной магнитоактивной плазме.

точку (рис. 5.9). Отклонения луча от вертикали отсутствуют при $u_{ey} = 0$ или при $u_{ez} = 0$.

По аналогии с этим случаем можно сразу же утверждать, что при распространении волны в плоскости yz ($H_{0x} = 0$) линии волновых нормалей в силу закона $n_x = 0$ лежат в указанной плоско-

сти, а лучи из нее выходят. После того как волна пройдет точку поворота и вернется на исходный уровень $z = \mathrm{const}$, луч вновь окажется в плоскости yz [1, 17] (рис. 5.10). Если фазовые траектории (линии волновых нормалей) в плоскослоистой среде являются плоскими, то лучи этим свойством не обладают.

Поверхности волновых нормалей и направление вектора групповой скорости. Пусть в какой-то точке неоднородной среды известно локальное дисперсионное уравнение $\omega = \omega(\mathbf{k})$. Определим проекции групповой скорости $\mathbf{v}_{\text{гр}} = \partial\omega/\partial\mathbf{k}$ на направления $\mathbf{k}$ и орта, соответствующего изменению угла α (угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{H}_0$). При этом ось полярной системы координат ориентирована по вектору $\mathbf{k}$. Для этих проекций

$$v_{\text{гр},k} = \partial\omega/\partial k, \quad v_{\text{гр},\alpha} = k^{-1}\partial\omega/\partial\alpha. \tag{5.3.11}$$

Вводя угол θ между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{v}_{\text{гр}}$, с учетом (11) имеем

$$\operatorname{tg}\theta = v_{\text{гр},\alpha}/v_{\text{гр},k} = k^{-1}(\partial\omega/\partial\alpha)(\partial\omega/\partial k)^{-1} = n^{-1}\partial n/\partial\alpha. \tag{5.3.12}$$

Последние равенства написаны с учетом правила дифференцирования неявных функций и связи $k = k_0 n$.

С другой стороны, опираясь на построение на рис. 5.11, найдем угол θ' между нормалью $\boldsymbol{\nu}$ к поверхности

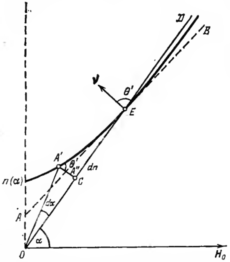

Рис. 5.11. Построение, необходимое для установления связи между направлениями лучей и нормалей к волновой поверхности.

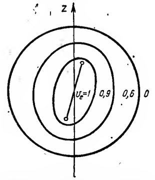

Рис. 5.12. Поверхности волновых нормалей для обыкновенной волны [17].

$n(\alpha)$ и направлением $\mathbf{n}$ (прямая $0D$). Заменяя отрезок касательной к кривой $n(\alpha)$ EA'' хордой EA', мы видим, что угол $EA'C$ равен θ'. Учитывая, что $CE = -dn$ и $A'C = n\,d\alpha$, находим

$$\operatorname{tg}\theta' = n^{-1}\partial n/\partial\alpha. \tag{5.3.13}$$

Сравнивая (12) и (13), приходим к равенству $\theta = \theta'$. Отсюда

следует, что направление вектора $\mathbf{v}_{гр}$ совпадает с направлением нормали к поверхности $n(\alpha)$.

Воспользуемся этим свойством поверхностей волновых нормалей, чтобы объяснить еще одну особенность поведения лучей в плоскослоистой магнитоактивной плазме. На рис. 5.12 приведена одна из возможных зависимостей $n_2(\alpha)$ (для обыкновенной волны). При этом величина v_e используется как параметр. С ростом v_e эллипс «сжимается» и при $v_e = 1$ вырождается в отрезок прямой, совпадающий с направлением $\mathbf{H}_0$ [17].

Если концентрация электронов плавно меняется с ростом z, то при заданном $n_y = n_{y0}$ линия волновых нормалей, определяемая уравнением (5.2.3), имеет одну точку поворота $n_z = 0$. В то же время из (8), (9) можно установить, что $v_{гр,z}$ и $v_{гр,y}$ имеют, вообще говоря, иные несовпадающие значения координаты z, где эти проекции меняют знак. Из рис. 5.12 также видно, что при заданных n_{y0} (при соответствующем подборе n_{y0}) может существовать при изменении v_e лишь одна точка, где $v_{гр,z} = 0$. В то же время $v_{гр,y}$ ни при каких z в нуль не обращается (рис. 5.13, *а*). Если же сначала $v_{гр,y}$ становится равной нулю, а при больших z $v_{гр,z} = 0$, то поведение лучей иллюстрируется

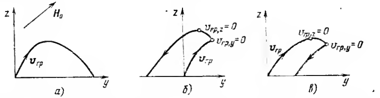

Рис. 5.13. Путь распространения, для которого: *а*) может исчезать только компонента групповой скорости $v_{гр,z}$; *б*) последовательно в разных точках обращаются в нуль $v_{гр,y}$ и $v_{гр,z}$; *в*) последовательно в разных точках обращаются в нуль $v_{гр,z}$ и $v_{гр,y}$.

в качественной форме на рис. 5.13, *б*. Возможен еще один случай, когда проекция $v_{гр,z}$ сначала обращается в нуль, а далее то же происходит и с $v_{гр,y}$. В этом случае траектория луча показана на рис. 5.13, *в*.

Замечания о границах применимости приближения геометрической оптики. Это приближение справедливо в определенных условиях.

Во-первых, не должно быть резких градиентов плотности плазмы и сильных сдвигов у внешнего магнитного поля, так что [17]

$$k_0^{-1} |\nabla n_{1,2}| / n_{1,2}^2 \ll 1. \qquad (5.3.14)$$

При наличии резкой границы, у которой нарушается требование (14), геометрооптическое приближение можно использовать для построения картины лучей, но для амплитуд получаются неверные результаты.

Во-вторых, это приближение несправедливо, когда площадь сечения лучевой трубки стремится к нулю и определяемые формально амплитуды неограниченно увеличиваются.

И, наконец, в приближении геометрической оптики все нормальные волны считаются независимыми. Поэтому при наличии областей, внутри которых показатели преломления разных волн близки друг к другу, указанное приближение может оказаться несправедливым. В частности, это относится к случаю выхода волн из магнитоактивной плазмы в изотропную среду. Далее, в областях отражения волн значения для падающей и отраженной волн близки друг к другу, а сам процесс отражения можно рассматривать как линейную трансформацию падающей волны в отраженную. Помимо того, в магнитоактивной плазме возможно в определенных условиях (п. 5.5) линейное взаимодействие волн в неоднородной среде, когда $n_1^2 \approx n_2^2$ [17].

При немонотонной зависимости n от координат положение усложняется. Тогда приближение геометрической оптики можно использовать при выполнении дополнительного ограничения на длину волны, проходимого волной [1, 17].

5.4. Электростатические волны в неоднородной плазме

С безвихревыми (электростатическими) волнами часто приходится иметь дело как в ионосферной, так и в магнитосферной плазме [17, 26], а также в космических условиях. Поэтому представляется существенным дать анализ распространения этих волн, называемых также плазменными, в неоднородном ионизованном газе.

Как было показано в гл. 3, 4, слабозатухающие электростатические волны с продольной поляризацией существуют, как правило, только вблизи резонансных частот ω_∞ ($\omega \approx \omega_\infty$). В изотропной плазме и при распространении вдоль поля $\mathbf{H}_0$ электростатические волны «отщепляются» и характеризуются во всем допустимом диапазоне частот ω присущими им собственными зависимостями ω от $\mathbf{k}$. То же самое имеет место и для кривых $n^2(v_e)$, которые ранее приводились при фиксированных значениях параметра u_e. При $\alpha \neq 0$ плазменным волнам отвечают лишь отдельные части общих с другими волнами дисперсионных кривых. Возникает как бы связь этих волн с необыкновенными (обыкновенными) волнами (гл. 3, 4). Отделение плазменных волн при $\omega \approx \omega_\infty$ здесь может быть произведено приближенно.

Для того чтобы получить уравнение эйконала, нужно обратиться к дисперсионному уравнению. Последнее вытекает из условия обращения в нуль множителя перед k^4 в уравнении (3.3.26а), выписанного для случая, когда распространение происходит в плоскости yz:

$$\varepsilon_{yy} \sin^2 \alpha + \varepsilon_{zz} \cos^2 \alpha + 2\varepsilon_{yz} \sin \alpha \cos \alpha = 0. \qquad (5.4.1)$$

Направления вектора $\mathbf{H}_0$ и оси z совпадают. Компоненты тензора ε_{ij} нужно брать с учетом пространственной дисперсии. Можно воспользоваться либо следствиями квазигидродинамического рассмотрения (гл. 3), либо использовать выводы кинетического подхода (гл. 4). Далее поглощение (бесстолкновительное и столкновительное) не учитывается. Условия пренебрежения бесстолкновительным поглощением в целом довольно сложны. Они обсуждались в гл. 4. Заметим, что в существующих работах обычно рассматриваются волны вблизи резонансных частот ω_∞ лишь в частных случаях (при $H_0 = 0$, вблизи верхней и нижней гибридной частоты и др.).

Ленгмюровские волны в неоднородной плазме. Рассмотрим высокочастотные незатухающие продольные волны в отсутствие внешнего магнитного поля $\mathbf{H}_0$. Из соотношения (4.1.33), которому, если сравнивать с (1), соответствует равенство $\varepsilon_{zz} = 0$, после замены $\mathbf{n}$ на $\nabla\psi$ получаем уравнение эйконала

$$3\beta_{T_e}^2 (\nabla\psi)^2 = \left(\omega^2 - \omega_{e0}^2\right)/\omega^2. \tag{5.4.2}$$

Напомним, что для групповой скорости рассматриваемых волн справедливо соотношение $\mathbf{v}_{\text{гр}} = 3v_{T_e}^2\mathbf{k}/\omega$. Пусть отношение $\beta_{T_e}^2 = v_{T_e}^2/c^2$ не зависит от координат, а частота ω_{e0} зависит только от z.

Если распространение происходит в плоскости yz, то для фазовых траекторий из уравнения $dy/n_{y0} = dz/n_z$ с учетом (2) имеем

$$\frac{dy}{n_{y0}} = \frac{dz}{\left[\left(3\beta_{T_e}^2\right)^{-1} - n_{y0}^2 + \left(3\beta_{T_e}\right)^{-1}\omega_{e0}^2/\omega^2\right]^{1/2}}. \tag{5.4.3}$$

Так как в силу соотношения $v_\Phi v_{\text{гр}} = 3v_{T_e}^2$ при постоянных $v_{T_e}^2$ групповая скорость зависит от координат таким же образом, что и $\mathbf{n}$, а их направления в данном случае одни и те же, то здесь лучевые и фазовые траектории совпадают.

Считая, что концентрация электронов N_0 меняется в зависимости от z линейно, имеем

$$\omega_{e0}^2 = \omega_{e0}^2(z = z_0) + b_e z, \tag{5.4.4}$$

где $b_e = \partial\omega_{e0}^2/\partial z$ при $z = z_0$ (уровень $z = z_0$ выбирается в качестве исходного). Из (3) при учете (4) получаем уравнение для траекторий

$$dy/n_{y0} = dz/\sqrt{A - Bz}, \tag{5.4.5}$$

где $A = \left(3\beta_{T_e}^2\right)^{-1} - n_{y0}^2 + \omega_{e0}^2(z = z_0)/3\beta_{T_e}^2\omega^2$ и $B = b_e/3\beta_{T_e}^2\omega^2$. Интегрируя (5) при выборе начальной точки траектории с координатами $y = y_0$ и $z = z_0$, получим

$$(y - y_0)/n_{y0} = 2(\sqrt{A - Bz} - \sqrt{A - Bz_0}). \tag{5.4.6}$$

Точка отражения находится из условия $n_z = A - Bz = 0$ и ее z координата равна $z_{\text{отр}} = A/B$. Для ионосферного распространения электростатических волн представляет интерес знание времени группового запаздывания $t_{\text{гр}} = \int dl/v_{\text{гр}}$, где dl — элемент длины вдоль лучевой траектории. Определяя $dl = \sqrt{(dy)^2 + (dz)^2}$ при учете связи между dz и dy (3), найдем

$$t_{\text{гр}} = c\left(3v_{T_e}^2\right)^{-1} \int\limits_{z_0}^{z} \left[\left(3\beta_{T_e}^2\right)^{-1} - n_{y0}^2 - \left(3\beta_{T_e}^2\right)^{-1} \omega_{e0}^2/\omega^2\right]^{-1/2} dz. \quad (5.4.7)$$

При использовании зависимости (4) и интегрирования в (7) до $z = z_{\text{отр}} = A/B$ после несложных преобразований получаем

$$t_{\text{гр(отр)}} = \frac{2\omega^2}{\sqrt{3}\,\omega_{e0}^2} \frac{\left(1 - \omega_{e0}^2/\omega^2 - 3\beta_{T_e}^2 n_{y0}^2\right)^{1/2}}{b_e}, \quad (5.4.8)$$

где подразумевается, что значение частоты ω_{e0} взято на уровне $z = z_0$. Обращает на себя внимание очень простая зависимость $t_{\text{гр(отр)}}$ от $b_e \propto dN_0/dz$.

Аналогичным образом можно получить лучевые траектории для высокочастотных волн, распространяющихся перпендикулярно к магнитному полю H_0. Расчеты могут быть выполнены как при использовании простой модели (4), так и в более общей постановке [26—31].

5.5. Взаимодействие нормальных волн в неоднородной магнитоактивной плазме

В однородной анизотропной плазме нормальные волны независимы. В неоднородной плазме появляется принципиальная возможность взаимодействия между волнами, связанная с нарушением условий применимости приближения геометрической оптики. При таком нарушении волны уже нельзя считать полностью независимыми. Для плоскослоистой слабонеоднородной плазмы можно ожидать, что взаимодействие будет эффективным только в окрестностях точек, для которых

$$n_{zl} = n_{zm}, \quad l \neq m, \quad (5.5.1)$$

где n_{zl} и n_{zm} — корни уравнения (5.3.1).

Равенство (1) может реализоваться при разных обстоятельствах. Во-первых, в точках поворота для фиксированного типа нормальной волны оно выполняется там, где $n_{z(+)} = n_{z(-)} = 0$ (знаками плюс и минус отмечены волны, распространяющиеся вдоль оси z и в обратном направлении). Здесь падающая волна полностью трансформируется в отраженную, если за точкой поворота показатель преломления продолжает монотонно убывать. Этот случай фактически был рассмотрен, и далее мы им интересоваться не будем. Несколько сложнее обстоит дело при

немонотонном изменении n_z, когда за точкой отражения снова имеются области прозрачности. Тогда падающая волна лишь частично трансформируется в отраженную.

Во-вторых, при выходе волн из плазмы в свободное пространство показатели преломления обоих типов волн стремятся к единице, и взаимодействие при приближенном соблюдении (1) происходит в некоторой области у «размазанной» границы плазма — вакуум. Ранее отмечалось, что при $N_0=0$ и $H_0\neq 0$ поляризация волн остается эллиптической. Аналогичная картина имеет место и в плотной плазме (как бесстолкновительной, так и при учете столкновений). Качественная зависимость $n_{z1,2}(z)$ в отсутствие столкновений показана на рис. 5.14.

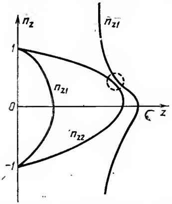

Рис. 5.14. Качественный вид функции $n_{z1,2}(z)$ (штриховой линией обведена область линейного взаимодействия между волнами *1* и *2*).

Получим условия взаимодействия при нормальном падении ($n_{y0}=0$) и $s_e\neq 0$. Тогда можно воспользоваться (5.3.1), (5.3.2). Отыскивая в этом случае n_z^2, имеем

$$n_{z1,2}^2=\tilde{n}_{1,2}^2=$$
$$=\{-\gamma_p\pm(\gamma_p^2-4\varepsilon_p\alpha_p)^{1/2}\}/2\alpha_p. \qquad (5.5.2)$$

Корни 1 и 2 совпадают при равенстве нулю дискриминанта в (2), так что

$$\gamma_p^2-4\varepsilon_p\alpha_p=u_e^2\sin^4\alpha+4u_e(1-is_e-v_e)^2\cos^2\alpha=0. \qquad (5.5.3)$$

Отсюда видно, что в отсутствие поглощения условия (3) может быть удовлетворено только при $u_e=0$ (или $\sin^2\alpha=0$). При учете поглощения положение меняется и при

$$s_e=s_{e,\,\text{кр}}=\sqrt{u_e}\sin^2\alpha/2|\cos\alpha|,\quad v_e=1 \qquad (5.5.4)$$

равенство (1) может быть строго выполнено. Итак, при любом заданном угле α, если $s_e=s_{e,\,\text{кр}}$, в точке $v_e=1$ должно иметь место взаимодействие.

Если перейти к наклонному падению, полагая в (5.3.1) $n_{y0}\neq 0$, то условие взаимодействия выполняется и при $s_e=0$. Покажем это на примере, когда поле $\mathbf{H}_0$ горизонтально и направлено по оси y ($H_0=H_{0y}$). В этом случае уравнение (1) становится биквадратным и из него получаем, что равенство $n_1^2=n_2^2$ выполняется при

$$u_e(1-n_{y0}^2)^2+4(1-v_e)n_{y0}^2=0. \qquad (5.5.5)$$

Для вещественных n_{y0}^2 это равенство может быть удовлетворено при $v_e > 1$. Определяя при заданных v_e и $u_e n_{y0}^2$ из (5), имеем

$$n_y^2 = \frac{u_e + 2(v_e - 1) \pm 2\sqrt{(v_e - 1)(v_e + u_e - 1)}}{u_e}. \qquad (5.5.6)$$

Заметим, что при $v_e > 1$ и $u_e > 1$ будет два разных вещественных значения $n_{y0} > 0$, определяющих два угла падения на слой плазмы, при которых на некотором уровне $v_e(z)$ будет происходить взаимодействие волн 1 и 2. При $v_e > 1$ и $u_e > 1$ такой угол будет единственным.

При исследовании взаимодействия нормальных волн в магнитоактивной плазме процедура получения решений связанных уравнений для амплитуд очень сложна. Точные решения этих уравнений найти не удается, а приближение геометрической оптики справедливо только в отсутствие трансформации волны в волну. Поэтому основное направление в решении вопросов взаимодействия сводится к «исправлению» и обобщению геометрооптического приближения с целью учета взаимодействия волн.

Задачи о взаимодействии волн при нормальном падении решаются обычно из уравнений Баддена [17, 32, 33] или их модификаций. Взаимодействие волн на размытой границе плазма — свободное полупространство можно также анализировать, используя уравнения квазиизотропного подхода, сформулированные Кравцовым [34].

Об анализе взаимодействия волн в магнитоактивной плазме на основе уравнений Баддена. Для получения связанной системы волновых уравнений при распространении вдоль оси z (компоненты тензора ε'_{ij} также зависят только от z) нужно исходить из общего уравнения в виде (5.2.21), выписанного для анизотропного случая

$$\Delta \mathbf{E} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} + k_0^2 \hat{\varepsilon}' \mathbf{E} = 0. \qquad (5.5.7)$$

Далее используем компоненты тензора (3.1.31). В проекции на ось z из (5.5.7) здесь получается простая алгебраическая линейная связь между компонентами поля $\mathbf{E}$ (3.3.2). Исключая из (7) с помощью (3.3.2) E_z, приходим к уравнениям для компонент E_x и E_y:

$$\begin{aligned} d^2E_x/dz^2 + k_0^2(AE_x + iCE_y) = 0, \\ d^2E_y/dz^2 + k_0^2(-iCE_x + BE_y) = 0. \end{aligned} \qquad (5.5.8)$$

Уравнения (8) являются очевидными обобщениями на случай плоскослоистой среды соотношений (3.3.4). В силу этого не нужно пояснять, что коэффициенты A, B, C в (8) определяются из (3.3.5).

Рассматривая связь между полями волн 1 и 2, представим компоненты E_x и E_y в виде сумм

$$E_x = E_{x1} + E_{x2}, \quad E_y = K_1 E_{x1} + K_2 E_{x2}, \qquad (5.5.9)$$

где $K_{1,2}$ характеризуется отношением (3.3.14), так что, например, можно использовать формулу $K_{1,2} = -\left(A - \tilde{n}_{1,2}^2\right)/iC$. Подставляя значения A и C из (3.3.5) и используя для $\tilde{n}_{1,2}^2$ отношения (3.3.7), получаем

$$K_{1,2} = i(\eta \mp \sqrt{1+\eta^2}), \qquad \eta = s_{e,\,\text{кр}}/(1 - v_e - is_c). \quad (5.5.10)$$

Далее удобно рассматривать не компоненты E_{x1}, E_{x2}, а ввести вспомогательные функции Π_1 и $\Pi_2\left(\Pi_{1,2} = E_{x1,2}\sqrt{1 - K_{1,2}^2}\right)$. Тогда из (8), (9) с учетом (10) можно прийти к следующим уравнениям для Π_1 и Π_2:

$$\begin{aligned} &\frac{d^2\Pi_1}{dz^2} + k_0^2\tilde{n}_1^2\Pi_1 = f_1(\tilde{\psi}, \Pi_1, \Pi_2), \\ &\frac{d^2\Pi_2}{dz^2} + k_0^2\tilde{n}_2^2\Pi_2 = f_2(\tilde{\psi}, \Pi_1, \Pi_2); \end{aligned} \quad (5.5.11)$$

$$\begin{aligned} &f_1 = \Pi_2\frac{d\tilde{\psi}}{dz} + 2\tilde{\psi}\frac{d\Pi_2}{dz} + \tilde{\psi}^2\Pi_1, \\ &f_2 = -\Pi_1\frac{d\psi}{dz} - 2\psi\frac{d\Pi_1}{dz} + \tilde{\psi}^2\Pi_2, \\ &\tilde{\psi} = -\frac{1}{2}\frac{1}{1+\eta^2}\frac{d\eta}{dz}. \end{aligned} \quad (5.5.12)$$

Следуя [17, 32—34], можно получить удобные для анализа приближенные решения уравнений Баддена (11), (12). Их обсуждение мы проводить далее не будем, так как это сделано в литературе (особенно в [17]) достаточно подробно.

ГЛАВА 6

НЕУСТОЙЧИВОСТИ В СТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ И БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ ПЛАЗМЕ

6.1. Классификация неустойчивостей в плазме, находящейся в магнитном поле

В предшествующих главах рассматривались волны с поглощением, хотя иногда это поглощение считалось слабым и даже отсутствовало. Возможность нарастания волн пока не обсуждалась, что было связано с использованием квазиравновесных распределений заряженных частиц в плазме.

Реально в плазме часто существуют различные отклонения от равновесного состояния. При достаточно сильных отклонениях от равновесия плазма обладает некоторой избыточной энергией, которая может трансформироваться в энергию волновых возмущений. В силу этого малые возмущения нарастают во времени t и развивается неустойчивость. Развитие неустойчивостей иногда приводит к возникновению регулярных волновых возмущений, а иногда сопровождается турбулизацией плазмы. Под ней обычно понимают такое состояние, когда в плазме возникает большой набор волн случайного (шумового) характера.

В течение многих лет проводятся детальные экспериментальные и теоретические исследования неустойчивостей в магнитоактивной плазме. Сейчас стало совершенно ясно, что неустойчивости играют важную роль в динамике ионосферной и магнитосферной плазмы, влияют на состояние межпланетной солнечной и космической плазмы. Так, например, с неустойчивостями обычно связывают генерацию различных электромагнитных излучений в приземной плазме и за ее пределами. Эти излучения обычно регистрируют в радиодиапазоне как наземными методами, так и с помощью искусственных спутников Земли.

В силу многообразия плазменных неустойчивостей далее нам придется ограничиться несколькими примерами, представляющими как общий интерес для физики плазмы, так и имеющими астрофизические или геофизические применения. Преобладающее место займет линейное приближение, в рамках которого можно установить условия возникновения неустойчивости и найти начальные скорости нарастания возмущений (инкременты).

Из-за обилия возможных механизмов неустойчивостей возникает необходимость в их классификации. При разделении неустойчивостей на разные типы возможны различные подходы. Дадим им краткую характеристику.

Так, если неустойчивости имеют макроскопический характер и их основные проявления определяются движениями плазмы как целого, то говорят о *гидродинамических* неустойчивостях. Этот тип неустойчивостей может, например, возникать на границах плазмы, удерживаемой магнитными полями. Для анализа неустойчивостей можно применять уравнения магнитной гидродинамики. Если в этих уравнениях существенна конечная проводимость плазмы, то гидродинамические неустойчивости относят к категории *диссипативных*.

Далее выделяют группу *дрейфовых* неустойчивостей. Они, как и гидродинамические, индуцируются при сравнительно медленных движениях частиц. Но в отличие от гидродинамических неустойчивостей здесь нельзя рассматривать движения электронов и ионов как совместные. Для описания дрейфовых неустойчивостей можно использовать квазигидродинамические уравнения для электронов и ионов.

В неравновесной плазме с немаксвелловскими функциями распределения частиц по скоростям волны в плазме могут усиливаться за счет взаимодействия с какими-то группами частиц (скажем, с электронами, имеющими высокие энергии). При резонансном взаимодействии в равновесной плазме возникает бесстолкновительное черенковское поглощение (затухание Ландау) и гирорезонансное поглощение. В неравновесных условиях возможно обращение явления поглощения. В зависимости от характера резонансных условий *кинетические* неустойчивости иногда подразделяют на *черенковские* и *гирорезонансные*.

При распространении в плазме сильных электромагнитных или электростатических волн причиной неустойчивости могут быть осцилляторные движения частиц в полях этих волн. Соответствующие неустойчивости относят к *параметрическим*. О такого рода неустойчивостях речь пойдет в гл. 9 при анализе нелинейных явлений, возникающих при воздействии мощных радиоволн на ионосферную плазму.

Абсолютная и конвективная неустойчивости. Остановимся еще на одном принципе классификации неустойчивостей — разделении их на *конвективную* и *абсолютную* неустойчивости. Это разделение возникло при выработке четкого понимания природы нарастающих волн. Этот вопрос выходит за пределы физики плазмы, хотя обсуждение вопросов теории распространения сигналов в системах из заряженных частиц было исходным пунктом для получения общих результатов [1—3].

Рассмотрим распространение плоских волн в одномерном случае, когда изменения всех компонент напряженностей полей характеризуются зависимостью $\exp(i\omega t - ikz)$. В гл. 3, 4 обращалось внимание на существование даже в подобной простой ситуации двух подходов при решении конкретных задач. В первом из них предполагается, что волновое число k вещественно. В поглощающей или неустойчивой среде частота ω комплексна, так что

$$\omega = \overline{\omega} + i\gamma. \tag{6.1.1}$$

При $\gamma > 0$ имеет место затухание по закону $\exp(-\gamma t)$, а при $\gamma < 0$ — нарастание с инкрементом $|\gamma|$.

В другой постановке вещественной принимается частота ω, а волновое число комплексным, так что

$$k = \frac{\omega}{c}(n - iq). \qquad (6.1.2)$$

Система неустойчива, если даже в какой-то части интервала волновых чисел Δk $\gamma(k) < 0$. Возникает вопрос об эволюции совокупности неустойчивых волн во времени t. Решение этого вопроса показывает, что по характеру своего проявления неустойчивости нужно подразделять на абсолютную и конвективную [2, 3].

Представление поля в виде монохроматической волны здесь недостаточно и нужно обратиться к волновым пакетам (сигналам). Выберем какую-либо переменную величину. Пусть это будет одна из компонент напряженности электрического поля $\mathbf{E}$, которую для краткости обозначаем $E(z, t)$. Разложим $E(z, t = 0)$ в интеграл Фурье по действительным k:

$$E(z, t = 0) = \int g(k) \exp(-ikz)\, dk. \qquad (6.1.3)$$

При $t > 0$ из (3) имеем

$$E(z, t) = \int g(k) \exp[-ikz + i\omega(k)t]\, dk, \qquad (6.1.4)$$

где $\omega = \omega(k)$ определяется из дисперсионного уравнения [ω может быть комплексной величиной (1)]. Допустим, что функция $g(k)\exp[i\omega(k)t]$ ограничена при любых k. Используя известную лемму Римана из теории интегралов Фурье [4], устанавливаем, что $E(z, t) \to 0$ при $z \to \infty$. Таким образом, здесь пакет будет в той или иной степени локализован в пространстве (по координате z). Его называют пространственно подобным [2, 3]. Если к пространственной локализации добавляется и временная, т. е. $E(z, t) \to 0$ при любых z, если $t \to \infty$ (временно подобный пакет), то неустойчивость является конвективной. Если при локализации в пространстве временная локализация не имеет места, то среда будет неустойчивой абсолютно.

При конвективной неустойчивости в линейном приближении напряженность поля остается ограниченной в каждой точке и при $t \to \infty$. В то же время процессы нарастают в пространстве, так как возмущения сносятся к выходу системы. Поэтому среда с конвективной неустойчивостью может быть использована в качестве усилителя. При абсолютной неустойчивости амплитуда E будет нарастать со временем t в каждой точке по закону $\exp|\gamma|t$. Система с абсолютной неустойчивостью в качестве усилителя не может использоваться из-за ее самовозбуждения. Вопрос о конечном состоянии системы при наличии этой неустойчивости может быть решен только при нелинейном рассмотрении.

Стэррок [2] показал, что для проведения разделения неустойчивостей на конвективную и абсолютную достаточно знания

дисперсионного уравнения. Мы здесь соответствующий анализ приводить не будем. В общем виде он составил содержание специальной монографии [3]. Как ясно из [3], строгое обоснование метода разделения неустойчивостей имеет громоздкий и сложный характер, но конкретные расчеты по определению вида неустойчивости обычно являются более простыми [2, 3].

При анализе поведения волновых пакетов в случае комплексных k (2) можно разложить E в интеграл Фурье по вещественным ω:

$$E(z, t) = \int G(\omega) \exp[i\omega t - ik(\omega) z]\, d\omega. \tag{6.1.5}$$

Пусть функции $G(\omega)$ и $k(\omega)$ ограничены при всех ω. Из леммы Римана, примененной для определенных ω, t (ранее она использовалась для переменных z, t), следует, что величина $E(z, t)$ может быть представлена в виде временноподобного пакета ($E \to 0$ при $t \to \pm\infty$ при любых z). Если одновременно возмущение окажется и пространственноподобным, то возбуждение будет в зависимости от знака q в (2) либо усиливаться, либо поглощаться.

Здесь существенна взаимная ориентация волнового вектора $\mathbf{k}$ и групповой скорости $\mathbf{v}_{\text{гр}} = \partial\omega/\partial\mathbf{k}$. При $\mathbf{k}\mathbf{v}_{\text{гр}} > 0$ усиление имеет место, если $q < 0$, а поглощение — когда $q > 0$. При $\mathbf{k}\mathbf{v}_{\text{гр}} < 0$ ситуация меняется на обратную *).

Если временноподобный пакет не является пространственноподобным, то можно констатировать факт непрозрачности плазмы. Возмущения с частотами ω в зонах непропускания часто называют *исчезающими* волнами.

Можно привести элементарные примеры. Так, для поперечных волн в изотропной плазме $n^2 = 1 - \omega_{e0}^2/\omega^2$ и при $\omega < \omega_{e0}$ возникает непрозрачность. Здесь точнее считать $n^2 = 0$ и $q^2 = \omega_{e0}^2/\omega^2 - 1$. Хотя здесь в однородной (или слабонеоднородной) среде возможны решения волнового уравнения вида $\exp\left(\frac{\omega}{c} qz\right)$, ни о каком реальном нарастании не может быть и речи. Приведенное решение отражает факт непрозрачности плазмы для волн, распространяющихся в сторону отрицательных z.

В работе [3] показано, что критерием появления исчезающих волн является вещественность ω при действительных k. В рассмотренном примере, где $\omega^2 = \omega_{e0}^2 + c^2k^2$, это требование выполняется. В интуитивной форме это было ясным и до работы [3]. Действительно, если в классической постановке задачи об устойчивости при вещественных k нарастание во времени отсутствует, то невозможно ожидать каких-то реальных эффектов, связанных с усилением волн, и в пространстве.

*) Возможность ориентации векторов $\mathbf{k}$ и $\mathbf{v}_{\text{гр}}$, при которой они составляют тупой угол, характерна для сред с пространственной дисперсией. Такие волны иногда называют обратными. Например, для плазменной волны при $\alpha = \pi/2$ с n_3^2 (4.3.19) указанные векторы, если $u_e < 1/4$, даже антипараллельны (подробнее см. [5]).

6.2. Нарастание волн в системе пучок — плазма. Роль квазилинейных эффектов

Возможные механизмы неустойчивости приземной (ионосферной и магнитосферной) и космической плазмы крайне многообразны. Их анализ часто приобретает специфические черты, обусловленные особенностями состояний плазмы и механизмов ее возникновения. В этой главе, как отмечалось, мы рассмотрим только отдельные примеры неустойчивостей. Одним из самых важных примеров будет неустойчивость плазмы, пронизываемой потоками заряженных частиц (пучками). Первые теоретические исследования пучковой неустойчивости в плазме принадлежат Ахиезеру и Файнбергу [6], Бому и Гроссу [7].

Гидродинамическая пучковая неустойчивость. Остановимся сначала на квазигидродинамическом подходе при $\mathbf{H}_0 = 0$. Движение ионов не учитывается, что в отсутствие внешнего магнитного поля означает отказ от учета ионно-звуковых волн. Выпишем дисперсионное уравнение для электростатических продольных возмущений. Среда состоит из основной неподвижной плазмы, для диэлектрической проницаемости которой используем при $\nu_e = 0$ формулу (3.1.19). Для пучка в соответствии с замечаниями в гл. 3 в рассматриваемом простом случае при равномерном движении нужно заменить частоту ω на $\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}_{\text{в}}$. Далее, считаем, что направления $\mathbf{k}$ и скорости пучка $\mathbf{u}_{\text{в}}$ совпадают. Пучок представляет собой поток квазинейтральной плазмы с ленгмюровской частотой $\omega_{e\text{в}} = \sqrt{4\pi e^2 N_{\text{в}}/m}$ ($N_{\text{в}}$ — концентрация электронов в пучке). Считая, что $N_{\text{в}} \ll N_0$, и пренебрегая тепловым разбросом электронов по скоростям в пучке, приходим к дисперсионному уравнению

$$\omega_{e0}^2/(\omega^2 - \gamma_e k^2 v_{T_e}^2) + \omega_{e\text{в}}^2/(\omega - ku_{\text{в}})^2 = 1. \qquad (6.2.1)$$

При $\omega_{e\text{в}} = 0$ получаем квазигидродинамическое уравнение для продольных колебаний электронной плазмы в виде $\omega^2 = \omega_{e0}^2 + \gamma_e k^2 v_{T_e}^2$. Из уравнения (1) видно, что при $N_0 \gg N_{\text{в}}$ неустойчивые решения могут существовать только при $\omega \approx ku_{\text{в}}$. В противном случае первый член слева доминирует. Полагая

$$\omega = ku_{\text{в}} + \delta, \quad |\delta| \ll ku_{\text{в}}, \qquad (6.2.2)$$

из (1) имеем

$$\delta^2 = -\omega_{e\text{в}}^2 \frac{\omega^2 - \gamma_e k^2 v_{T_e}^2}{\omega_{e0}^2 - \omega^2 + \gamma_e v_{T_e}^2 k^2}. \qquad (6.2.3)$$

Кинетическое рассмотрение плазменных волн (п. 3.1) приводит к необходимости выполнения требования $\omega_{e0}^2 \gg \gamma_e k^2 v_{T_e}^2$. Оно представляет условие малости дебаевского радиуса r_D по сравнению с длинами плазменных волн. С его учетом из (2), (3) имеем

$$\delta^2 = -\frac{\omega_{e\text{в}}^2 k^2 u_{\text{в}}^2}{\omega_{e0}^2 - k^2 u_{\text{в}}^2 - 2\delta k u_{\text{в}}}. \qquad (6.2.4)$$

Если разность $\omega_{e0} - ku_в$ не мала, то в знаменателе (4) можно пренебречь членом $2\delta ku_в$. Если к тому же считать $\omega_{e0}^2 > k^2u_в^2$, то правая часть (4) отрицательна и один из корней (2) дает нарастание. При этом величина γ (6.1.1) отрицательна и значения инкремента $|\gamma|$ определяются соотношением

$$|\gamma| = \frac{ku_в\omega_{eв}}{\sqrt{\omega_{e0}^2 - k^2u_в^2}} = \frac{ku_в}{\sqrt{1 - k^2u_в^2/\omega_{e0}^2}} \sqrt{\frac{N_в}{N_0}}. \qquad (6.2.5)$$

Таким образом, согласно (5) скорость нарастания $|\gamma| \sim \omega\sqrt{N_в/N_0}$.

Другая зависимость γ от $N_в$ получается при совпадении частот ω_{e0} и $ku_в$. Тогда в знаменателе (4) нужно оставить член $-2\delta ku_в$, и для δ имеем простое уравнение $2\delta^3 = \omega_{eв}^2 ku_в \approx \omega_{eв}^2\omega_{e0}$. Из трех решений этого уравнения приводит к неустойчивости одно, которому отвечает значение корня $\sqrt[3]{1} = (-1 - i\sqrt{3})/2$. В результате для инкремента получаем

$$|\gamma| = \sqrt{3}\, 2^{-4/3}\omega_{e0}(N_в/N_0)^{1/3}. \qquad (6.2.6)$$

Отсюда следует, что продольные ленгмюровские волны при $\omega \approx$ $\approx ku_в$ нарастают с $|\gamma| \propto (N_в/N_0)^{1/3}$. Скорость нарастания здесь значительнее по сравнению с (5), но для реализации условий неустойчивости нужно удовлетворить более жестким требованиям.

Пучковая неустойчивость с инкрементами (5), (6) исследовалась без учета кинетических эффектов, и ее нужно отнести к группе гидродинамических неустойчивостей. Сейчас же мы перейдем к кинетическому рассмотрению, что дает возможность уточнить пределы применимости (5), (6).

Кинетическая неустойчивость. В отсутствие поля $\mathbf{H}_0$ нет необходимости проделывать вывод дисперсионного уравнения для плазмы с пучком заново, так как обобщение на случай, когда $N_в \neq 0$ и $\mathbf{u}_в \neq 0$, имеет достаточно очевидный характер. Обратимся к уравнению (4.1.24), в котором не будем при рассмотрении высокочастотной неустойчивости учитывать движение ионов. Наличие упорядоченной скорости $\mathbf{u}_в$, направленной по оси z, приведет к появлению в равновесном распределении электронов по скоростям фактора $\exp[-m(v_{ez} - u_в)^2/2\varkappa T_в]$. Считая, что распространение также происходит по оси z, можно переходом в систему, связанную с пучком, придать этому распределению вид (2.1.19). После этого замечания обобщение (4.1.24) на случай наличия пучка тривиально, и можно написать

$$1 + \frac{\omega_{e0}^2}{\sqrt{2\pi}\,k}\left(\frac{m}{\varkappa T_e}\right)^{3/2} \int \frac{v_z \exp\left(-mv_z^2/2\varkappa T_e\right) dv_z}{\omega - kv_z} +$$

$$+ \frac{\omega_{eв}^2}{\sqrt{2\pi}\,k}\left(\frac{m}{\varkappa T_в}\right)^{3/2} \int \frac{(v_z - u_в) \exp\left(-mv_z^2/2\varkappa T_в\right) dv_z}{\omega - kv_z - ku_в} = 0. \qquad (6.2.7)$$

В последнем слагаемом, несмотря на переобозначение разности $v_z - u_в$, мы каких-то новых значков не вводим.

При интегрировании в (7) нужно использовать соображения, которые приводились в п. 4.1 применительно к задаче о распространении ленгмюровских волн. Контуры интегрирования выбираются тех же типов, что и на рис. 4.1. Для интеграла, связанного с пучком, полюс в комплексной плоскости v_z нужно сместить вдоль действительной оси на величину $u_{\text{в}}$. Фактически можно воспользоваться старыми результатами с заменой для пучковой части ω на $\omega - ku_{\text{в}}$.

Считая хорошо выполненным ограничение (2.2.6), которому эквивалентно условие (4.4.30), пренебрежем затуханием Ландау в основной плазме. В первом приближении для частоты ω можно использовать соотношение (4.1.29). В следующем приближении при $\omega_{e0}^2 \gg \omega_{e\text{в}}^2$ и условии

$$(\omega - ku_{\text{в}})^2 \gg k^2 v_{T_{\text{в}}}^2 \tag{6.2.8}$$

для инкремента $|\gamma|$, действуя как при переходе от (4.1.24) к (4.1.32), получаем

$$|\gamma| = \sqrt{\frac{\pi}{8}}\,\frac{\omega_{e\text{в}}^2}{\omega_{e0}^2}\,\frac{ku_{\text{в}} - \omega}{k^3 v_{\text{в}}^3}\exp\left\{-\frac{(\omega - ku_{\text{в}})^2}{2k^2 v_{T_{\text{в}}}^2}\right\}. \tag{6.2.9}$$

Нарастание здесь имеет место при $u_{\text{в}} > \omega/k$, т. е. когда скорость потока превышает фазовую скорость плазменных волн. Тогда величину $|\gamma|$ (9) можно назвать инкрементом кинетической пучковой неустойчивости. При максвелловском распределении электронов по скоростям при всех v_z $\partial f_{e0}/\partial v_z < 0$. Тогда высокочастотные продольные волны затухают (в отсутствие столкновений из-за механизма Ландау). Можно из энергетических соображений без всяких расчетов утверждать, что в среднем энергия передается от волн электронам. Обратный процесс возможен, если распределение $f_{e0}(v_z)$ характеризуется хотя бы одним интервалом, внутри которого $\partial f_{e0}/\partial v_z > 0$. При выполнении некоторых резонансных требований на выбор частоты ω и волнового числа k должна происходить передача энергии от электронов волнам, следствием чего будет нарастание волн. В рассматриваемом примере область $\partial f_{e0}/\partial v_z > 0$ появляется для частиц пучка при $v_{ez} \approx u_{\text{в}}$. При условии (8) нарастание имеет место, если $\omega > ku_{\text{в}}$. Из-за наличия важной связи между нарастанием и знаком производной $\partial f_{e0}/\partial v_z$ перепишем формулу (9) в ином виде. При получении соотношения (9) предполагалось, что в области нарастания существен в первую очередь вклад электронов пучка, так что $\partial f_{e0}/\partial v_z = \partial f_{e\text{в}}/\partial v_z$ при $v_z = \omega/k$ (под f_{e0} понимается равновесная функция системы пучок — плазма).

Введем обозначение $f_{e,(z)}$ для функции распределения:

$$f_{e,(z)} = \int f_e\,dv_x\,dv_y, \tag{6.2.10}$$

которое зависит только от v_z. Имея в виду, что $f_{e\text{в},(z)} = \sqrt{\frac{m}{2\pi\varkappa T_\text{в}}}\exp\left\{-\frac{m(v_z-u_b)^2}{2\varkappa T_\text{в}}\right\}$, из (9) получаем

$$|\gamma| = \frac{\pi}{2}\,\omega v_\Phi^2\,\frac{1}{N_0}\,\frac{\partial f_{e\text{в},(z)}}{\partial v_z}\bigg|_{v_z=\omega/k} = \frac{\pi}{2}\,\omega v_\Phi^2\,\frac{1}{N_0}\,\frac{\partial f_{e0,(z)}}{\partial v_z}\bigg|_{v_z=\omega/k}. \quad (6.2.11)$$

На рис. 6.1 изображена функция $f_{e0,(z)} = f_{ep,(z)} + f_{e\text{в},(z)}$, где $f_{ep,(z)}$ — равновесная функция распределения для плазменного фона. Условие $\partial f_{e0}/\partial v_z > 0$ определяет интервал скоростей v_z, где возможно усиление плазменных волн за счет пучковой неустойчивости.

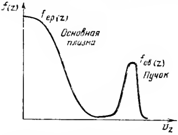

Рис. 6.1. Функция распределения $f^{(z)}(v_z)$ для плазмы, пронизываемой электронным пучком.

В процессе вывода (9), (11) пучковая неустойчивость гидродинамического типа с инкрементом (6) считалась малосущественной. Это накладывает дополнительные ограничения на применимость формул (9), (11). До сравнения инкрементов (9) и (6) укажем на то обстоятельство, что в отсутствие теплового разброса в пучке ($v_\text{в} \to 0$) нарастание со скоростью (9) вообще исчезает. Максимальные значения $|\gamma|$ (9) достигаются на «грани нарушения» условия (8). При $\omega \approx \omega_{e0}$ имеем формулу оценочного характера:

$$\gamma \approx \sqrt{\frac{\pi}{8}}\,\frac{N_\text{в}}{N_0}\,\omega_{e0}\left(\frac{\omega_{e0}}{kv_{T_e}}\right)^2.$$

Сравнивая это значение с (6), приходим к выводу, что кинетическая неустойчивость может доминировать при условии

$$v_{T_\text{в}}/v_\Phi \gg (N_\text{в}/N_0)^{1/3}. \quad (6.2.12)$$

Условию (12) легче удовлетворить для пучков с малыми концентрациями $N_\text{в}$ и при наличии достаточно большого теплового разброса. Для относительно плотных и холодных пучков, когда выполнено ограничение, противоположное (12), должна развиваться гидродинамическая неустойчивость.

Квазилинейное приближение. Мы остановились на теории пучковой неустойчивости в линейном приближении. При анализе развития неустойчивости и режима насыщения часто используется *квазилинейное приближение*, обоснованное и развитое независимо Романовым и Филипповым [10], Веденовым, Велиховым и Сагдеевым [11] и Драммондом и Пайнсом [12]. Вопросы квазилинейной теории изложены во многих монографиях и обзорах [8], [13—18].

Остановимся на уравнениях квазилинейной теории для электронного пучка в плазме в простом случае, когда спектр плазменных волн одномерен (волновые векторы направлены по оси z).

Ленгмюровские волны с фазовыми скоростями, лежащими в интервале, где $\partial f_e/\partial v_z > 0$, будут нарастать во времени в соответствии с (11). Если $N_в \ll N_0$, то инкремент $|\gamma|$ мал ($|\gamma| \ll \omega$). В силу малости $|\gamma|$ пренебрежем таким нелинейным эффектом, как взаимодействие волн. Из нелинейных эффектов в квазилинейном приближении учитывается лишь обратное влияние волн на плазменный фон, характеризуемый усредненной функцией распределения $f_e(v)$. В отличие от рассматриваемых ранее равновесных функций $f_{e0}(v)$ здесь принимается во внимание влияние на f_e хаотических электрических полей, возбуждаемых в системе плазменных волн.

Для электростатических полей $\mathbf{E}$ без учета столкновений в одномерном случае ($E_{x,y} = 0$, $E_z \equiv E$) движение электронов описывается кинетическим уравнением для функции распределения $f_e(v_{ez}, t)$ и уравнением Пуассона

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v\frac{\partial f}{\partial z} - \frac{eE}{m}\frac{\partial f}{\partial v} = 0, \qquad (6.2.13)$$

$$\partial E/\partial z = -4\pi e\left(\int f\,dv - N_0\right), \qquad (6.2.14)$$

где опущен индекс, характеризующий электроны, и считается $v_{ez} \equiv v$. Под N_0 здесь понимается равновесная концентрация ионов, обеспечивающая квазинейтральность плазмы.

Разобьем функцию f на две части, так что $f = f_0^t + f_1$. Функция f_0^t представляет собой усредненную наибольшую часть всех частиц, слабо изменяющуюся во времени t (это отражено индексом t). Функция $f_1\left(|f_1| \ll f_0^t\right)$ является быстро изменяющейся во времени t, осциллирующей функцией. Получим, следуя [13], замкнутую систему квазилинейных уравнений.

Представим в вещественной форме продольное электрическое поле в виде набора пространственных (с $k = k_z$) компонент Фурье, так что

$$E(z, t) = \sum_k \operatorname{Re}\left[E_k(t, \omega, k)\exp(i\omega t - ikz)\right]. \qquad (6.2.15)$$

Зависимость E_k от аргумента t характеризует медленные изменения E.

Быстрые изменения во времени определяются фактором $\exp(i\omega t)$. Функцию распределения запишем в виде

$$f = f_0^t(v, t) + \sum_k \operatorname{Re}\left[f_{1k}(v, t)\exp(i\omega t - ikz)\right]. \qquad (6.2.16)$$

Подставим (15), (16) в (13) и проведем усреднение (обозначено чертой) по быстрым осцилляциям *). Тогда получаем два

---

*) Усреднение выполняется во времени так, что, например, $f_0^t = \bar{f} = \tau^{-1}\int_0^\tau f\,dt$, где $\tau \gg 2\pi\omega^{-1}$. Естественно, что τ меньше характерных времен медленных изменений.

уравнения

$$\frac{\partial f_0^t}{\partial t} - \frac{e}{m}\overline{E\frac{\partial f_1}{\partial v}} = 0, \qquad (6.2.17)$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + v\frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{e}{m}E\frac{\partial f_0^t}{\partial v} = 0. \qquad (6.2.18)$$

При переходе к (18) отброшены малые нелинейные слагаемые и принято, что $\partial f_0^t/\partial z = 0$.

Используя фурье-представления (15), (16), находим из (18) при пренебрежении медленными изменениями f_1 и E_k во времени, что

$$f_{1k} = -\frac{ieE_k}{m(\omega - kv)}\frac{\partial f_0^t}{\partial v}. \qquad (6.2.19)$$

Подставим (19) в (17) и учтем (16). Считая фазы отдельных осцилляций случайными, мы оставляем в двойной сумме только слагаемые с одинаковыми k, сводя сумму к ординарной. Учитывая наличие мнимого множителя в (19), приходим к уравнению диффузии в пространстве скоростей

$$\frac{\partial f_0^t}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v}\left(D_E\frac{\partial f_0^t}{\partial v}\right), \qquad (6.2.20)$$

где для коэффициента этой диффузии D_E имеем

$$D_E = \frac{e^2}{2m^2}\sum_k |E_k|^2\,\mathrm{Im}\,\frac{1}{\omega - kv} = -\frac{e^2}{2m^2}\sum_k |E_k|^2\frac{\gamma_k}{(\overline{\omega} - kv)^2 + \gamma_k^2}. \qquad (6.2.21)$$

В (21) учтено, что частота ω является комплексной. Так как $|\gamma_k| \ll \overline{\omega}$, то при записи действительной части частоты $\overline{\omega}$ мы часто на равных правах используем обозначение ω. При $\gamma_k \to 0$ можно сделать замену $\gamma_k/[(\overline{\omega} - kv)^2 + \gamma_k^2] \to -\pi\delta(\overline{\omega} - kv)$, справедливую при рассмотрении кинетической пучковой неустойчивости, и получить в соответствии с обоснованием [13, 17] из (21)

$$D_E = \frac{e^2}{2m^2}\frac{|E_k|^2}{kv}. \qquad (6.2.22)$$

Переход к такой относительно простой записи D_E предполагает, что вклад частиц является резонансным и их скорости равны $v = \omega/k = \omega_{e0}/k$. При этом переходе целесообразно заменить в (21) суммирование по пространственным гармоникам интегрированием по волновым числам k.

Определение входящей в (21), (22) интенсивности пространственной гармоники $|E_k|^2$ возможно, если использовать (14), (19) и провести усреднение по высокой частоте. Получаемый результат оказывается простым и может рассматриваться как обобщение формул линейного приближения. Это позволяет без суще-

ственного ущерба не приводить здесь детали расчетов и написать

$$\partial|E_k|^2/\partial t = -2\gamma_k|E_k|^2. \qquad (6.2.23)$$

Мы видим, что скорость нарастания ($\gamma_k < 0$) или затухания ($\gamma_k > 0$) отдельных гармоник определяется такого же типа соотношением, как в линейной теории. При этом для γ_k можно использовать соотношение (11), но с заменой $f_{e0,(z)}$ на $f^t_{0,(z)}$. Функция $f^t_{0,(z)}$ получается из f^t_0 интегрированием по поперечным скоростям. Такое же интегрирование можно провести в (20). В итоге приходим к системе уравнений, в которую, наряду с (22), (23), входит вытекающее из (20) уравнение

$$\frac{\partial f^t_{0,(z)}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial v}\left(D_E \frac{\partial f^t_{0,(z)}}{\partial v}\right), \qquad (6.2.24)$$

а также соотношение [см. (11)]

$$\gamma_k = -\frac{\pi}{2}\,\omega v_\Phi^2 \frac{1}{N_0} \frac{\partial f^t_{e,(z)}}{\partial v}. \qquad (6.2.25)$$

Рассмотрим далеко не в полной мере некоторые следствия из этой системы, имеющие отношение к вопросам неустойчивости и квазилинейной релаксации в системе пучок — плазма. Если, скажем, при $t = 0$ имеются волны с фазовыми скоростями $v_\Phi = \omega/k$, которые попадают в интервал скоростей v, внутри которого $\partial f^t_{0,(z)}/\partial v > 0$, то эти волны согласно (23), (25) будут нарастать во времени t. Одновременно рост $|E_k|^2$ приводит к увеличению коэффициента диффузии (22). Последнее способствует размытию функции распределения $f^t_{0,(z)}$ в указанном интервале скоростей. Установлено [11, 13—17], что конечным результатом этого процесса будет образование уплощенного участка (формируется «плато»).

Подставляя в (24) выражение D_E (22) и преобразуя правую часть полученного уравнения с использованием связи (23) и формулы (25), получаем

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{f^t_{0,(z)} - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\omega_{e0}}{mkv_\Phi^3}\,\frac{|E_k|^2}{8\pi^2}\right)\right\} = 0. \qquad (6.2.26)$$

Допустим, что в начальный момент спектр плазменных волн занимает узкую область со скоростями от v_1 до v_2, так что

$$W_k(0) = |E_k(0)|^2 = \begin{cases} 0, & \omega/k < v_1 \\ W_0, & v_1 \leqslant \omega/k \leqslant v_2. \\ 0, & \omega/k > v_2 \end{cases} \qquad (6.2.27)$$

Естественно, что в силу (21), (22) в этой же узкой области скоростей отличен от нуля коэффициент диффузии $D_E(t = 0)$.

При квазилинейной релаксации происходит переход системы в стационарное состояние (формально при $t \to \infty$), когда на функции распределения $f^t_{0,(z)}$ (или f^t_0) образуется «плато».

Из сохранения стоящей в фигурных скобках в (26) величины имеем

$$f^t_{0,(z)}(v, 0) - f^t_{0,(z)}(v, \infty) = \frac{\omega_{e0}}{8mkv_\Phi^3\pi^2} \frac{\partial}{\partial v} (W_k(0) - W_k(\infty)).$$

Интегрируя по скоростям, получаем

$$W_k(\infty) - W_k(0) = \frac{8\pi^2 mkv_\Phi^3}{\omega_{e0}} \int\limits_{v_1}^{v_2} dv \left[f^t_{0,(z)}(v, \infty) - f^t_{0,(z)}(v, 0) \right]. \tag{6.2.28}$$

Так как коэффициент диффузии D_E и плотность W_k равны нулю вне интервала (v_1, v_2), то частицы из него не выходят. В силу этого можно использовать условие сохранения их числа, а именно,

$$\int\limits_{v_1}^{v_2} \left[f^t_{0,(z)}(v, \infty) - f^t_{0,(z)}(v, 0) \right] dv = 0. \tag{6.2.29}$$

Полагая, что $f^t_{0,(z)}(v, \infty) = \text{const}$, имеем

$$f^t_{0,(z)}(v, \infty) = (v_2 - v_1)^{-1} \int\limits_{v_1}^{v_2} f^t_{0,(z)}(v, 0)\, dv.$$

Используя этот результат, из (28) имеем

$$W_k(\infty) - W_k(0) =$$

$$= \frac{8\pi^2 mkv_\Phi^3}{\omega_{e0}} \int\limits_{v_1}^{v_2} \left\{ \frac{1}{v_2 - v_1} \int\limits_{v_1}^{v_2} dv' f^t_{0,(z)}(v', 0) - f^t_{0,(z)}(v, 0) \right\} dv.$$

При эффективном возбуждении плазменных волн $W_k(\infty) \gg W_k(0)$. Тогда в первом приближении $W_k(\infty)$ не связано с начальным уровнем энергии плазменных волн.

Возможны, однако, и такие ситуации, когда начальные интенсивности плазменных волн недостаточны для перехода к состоянию «плато». Тогда для формально определяемой в данном случае энергии $W_k(\infty)$ получаются переменные отрицательные значечения.

Время квазилинейной релаксации $\tau_{\text{квл}}$, необходимое для формирования «плато» под влиянием ленгмюровских волн, можно грубо оценить из (20). При учете (22) и условий $\omega \approx \omega_{e0}$ и $\omega \approx kv$ имеем

$$\tau_{\text{квл}} \approx v^2/D_E \approx 8\pi m N_0 v^2/\omega_{e0} |E_k|^2. \tag{6.2.30}$$

Учитывая, что $v^2_{T_e} = \varkappa T_e/m$, мы можем записать (30) в следующем виде:

$$\tau_{\text{квл}} \approx \omega_{e0}^{-1} \left(v^2/v^2_{T_e} \right) 8\pi N_0 \varkappa T_e / |E_k|^2. \tag{6.2.31}$$

Квазилинейная теория справедлива для слаботурбулентной плазмы, что заставляет принять $N_0 \varkappa T_e \gg |E_k|^2/8\pi$. Одновременно справедливо и неравенство $v^2 \gg v_{T_e}^2$, так как $v^2 \approx \omega_{e0}^2/k^2$ и $\omega_{e0}^2 \gg k^2 v_{T_e}^2$ $(k^2 r_D^2 \ll 1)$, что является обязательным для слабозатухающих плазменных волн (гл. 4). С учетом сказанного мы видим, что время квазилинейной релаксации должно сильно превышать период ленгмюровских колебаний $2\pi/\omega_{e0}$.

Квазилинейное приближение применимо, если за время порядка $\tau_{\text{кв л}}$ (30), (31) другие нелинейные эффекты, связанные с взаимодействием волн, не успевают проявиться. Как говорилось, при пучковой неустойчивости в интервале скоростей, где формируется плато, возбуждаются плазменные волны с высокой активностью. В рамках квазилинейного приближения рассеяние этих волн не принимается во внимание. Однако в определенных условиях рассеяние может существенным образом изменить всю картину развития неустойчивости. При этом может возникнуть эффект стабилизации за счет индуцированного рассеяния, которое может привести к перераспределению энергии плазменных волн по спектру. Если время такого процесса много меньше $\tau_{\text{квл}}$, то уровень плазменных волн в области резонанса высоким быть не может, и сильных изменений в распределении электронов по скоростям не происходит. В обратном случае справедливо квазилинейное описание [8, 13, 18].

6.3. Гирорезонансная неустойчивость

Этот тип неустойчивости обычно связывают с анизотропией функций распределения заряженных частиц по скоростям. На возможность появления неустойчивости при $T_{e\parallel} < T_{e\perp}$, где $T_{e\parallel}$ и $T_{e\perp}$ — температуры для движений вдоль поля $\mathbf{H}_0$ и перпендикулярно к нему, было впервые указано Сагдеевым и Шафрановым [19]. Анизотропными квазиравновесными функциями распределения часто можно характеризовать плазму в магнитных ловушках. Эти ловушки не могут быть полностью совершенными. Если имеется какое-то преимущественное направление для выхода частиц, то их средние энергии могут отличаться от таких энергий в других направлениях. Важным примером таких конфигураций является геомагнитная ловушка, в которой могут возникать различные нестабильности в диапазоне длинных радиоволн и генерироваться пульсации магнитного поля [20, 21].

Рассматривая только движение электронов, выберем равновесную функцию распределения по скоростям, как это часто делается, максвелловского типа, но с двумя температурами $T_{e\parallel}$ и $T_{e\perp}$, так что

$$f_{e0} = N_0 \sqrt{\frac{m}{2\pi\varkappa T_{e\parallel}}}\,\frac{m}{2\pi\varkappa T_{e\perp}} \exp\left(-\frac{mv_{e\parallel}^2}{2\varkappa T_{e\parallel}} - \frac{mv_{e\perp}^2}{2\varkappa T_{e\perp}}\right), \quad (6.3.1)$$

где $v_{e\parallel}$ и $v_{e\perp}$ — проекции скоростей $\mathbf{v}_e$ на направление поля $\mathbf{H}_0$ и перпендикулярно к нему. Поскольку движение ионов здесь не

учитывается, то индекс, характеризующий электроны, мы в этом параграфе писать не будем.

Для получения дисперсионного уравнения в случае распространения поперечных электромагнитных волн по направлению поля $\mathbf{H}_0$ можно, в основном, воспользоваться результатами вычислений, проведенных в п. 4.2. Рассматривая бесстолкновительный случай, мы должны с самого начала учесть изменения, возникающие из-за неравенства температур $T_{e\parallel}$ и $T_{e\perp}$.

Эти изменения связаны в основном с дополнением линеаризованного кинетического уравнения слагаемым, которое написано последним в левой части следующего равенства:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \mathbf{v}\nabla_{\mathbf{r}} f_1 - \frac{e}{m}\mathbf{E}\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} - \frac{e}{mc}[\mathbf{v}\mathbf{H}_0]\frac{\partial f_1}{\partial \mathbf{v}} - \frac{e}{m}[\mathbf{H}\mathbf{v}]\frac{\partial f_0}{\partial \mathbf{v}} = 0, \quad (6.3.2)$$

где $\mathbf{H}$ — самосогласованное (переменное) магнитное поле. Член $\infty[\mathbf{v}\mathbf{H}]\partial f_0/\partial \mathbf{v}$ для изотропных функций распределения $f_0 = f_0(v^2)$, когда $\partial f_0/\partial \mathbf{v} = (\mathbf{v}/v)df_0/dv$, исчезает в силу перпендикулярности $\mathbf{v}$ и $[\mathbf{v}\mathbf{H}]$. При использовании распределений (1) этот член уже может внести существенный вклад (в частности, при определении условий устойчивости).

Используем в случае распространения плоских волн, когда все переменные меняются по закону $\exp(i\omega t - i\mathbf{k}\mathbf{r})$, уравнение (8), из которого $[\mathbf{k}\mathbf{E}] = \frac{\omega}{c}\mathbf{H}$. Исключая в (2) $\mathbf{H}$ и рассматривая распространение вдоль оси z ($k = k_z$, $E_z = 0$), с учетом (1) имеем

$$i(\omega - kv_z) f_1 + \omega_H\left(v_x\frac{\partial f_1}{\partial v_y} - v_y\frac{\partial f_1}{\partial v_x}\right) = \\ = -\frac{e}{\varkappa}(v_x E_x + v_y E_y)\left\{T_\parallel^{-1}\frac{kv_z}{\omega} + T_\perp^{-1}\left(1 - \frac{kv_z}{\omega}\right)\right\} f_{e_0}. \quad (6.3.3)$$

Это уравнение при $T_\parallel = T_\perp$ совпадает с (4.2.1).

Вывод дисперсионного уравнения, исходя из (3) и (4.2.3) при выборе распределения (1), не приводит к каким-то новым трудностям по отношению к расчету, выполненному в п. 3.2. Левые части уравнений (4.2.1) и (3) совпадают, а отличия в правых частях не очень значительны. Появление в (3) справа в фигурной скобке слагаемых с kv_z ни к каким осложнениям не ведет, так как интегрирование по v_z в явной форме не проводится. Это дает основание сразу же выписать дисперсионное уравнение. Мы остановимся на неустойчивости волны, у которой имеется резонанс вблизи гирочастоты ω_H. Для уравнения, аналогичного (4.2.18), имеем

$$c^2k^2 - \omega^2 - \omega_{e0}^2\sqrt{\frac{m}{2\pi\varkappa T_\parallel}}\int\left\{\omega\left(1 - \frac{kv_z}{\omega}\right) + \frac{T_\perp}{T_\parallel}\frac{kv_z}{\omega}\right\}\times \\ \times(\omega - kv_z - \omega_H)^{-1}\exp(-mv_z^2/2\varkappa T_\parallel)dv_z = 1\cdot \quad (6.3.4)$$

При условии (4.2.21) мы можем в первом приближении не учитывать тепловых поправок при нахождении показателя преломления. При определении нарастания (затухания) необходимо учесть, как это делалось в гл. 4, мнимую часть интеграла в (4), равную πi и умноженную на вычет относительно полюса. Тогда из (6.3.2) имеем

$$c^2k^2 - \frac{\omega_{e0}^2\omega}{\omega-\omega_H} - \frac{\pi i\omega_{e0}^2}{k}\sqrt{\frac{m}{2\pi\varkappa T_\parallel}}\times \\ \times\left\{\omega_H + \frac{T_\perp}{T_\parallel}(\omega-\omega_H)\right\}\exp\left\{-\frac{m(\omega-\omega_H)^2}{2\varkappa T_\parallel k^2}\right\}, \quad (6.3.5)$$

где учтено, что вблизи гирорезонанса $c^2k^2 \gg \omega^2$ (в отсутствие поглощения $n^2 \gg 1$). При действительных ω из (5) имеем $n^2 = \omega_{e0}^2/\omega(\omega_H-\omega)$. Еще раз подчеркнем, что здесь поперечные волны могут распространяться только при $\omega < \omega_H$, что далее в этом параграфе будет предполагаться. Считая $\omega = \bar\omega + i\gamma$ при $\bar\omega \gg |\gamma|$, из (5) находим

$$\gamma = \frac{\omega_H-\omega}{k}\left\{\omega_H + (\bar\omega-\omega_H)\frac{T_\perp}{T_\parallel}\right\}\sqrt{\frac{m\pi}{2\varkappa T_\parallel}}\exp\left\{-\frac{m(\bar\omega-\omega_H)^2}{2\varkappa T_\parallel k^2}\right\}. \quad (6.3.6)$$

Из этого соотношения мы видим, что при $T_\parallel > T_\perp$ волны и при анизотропном распределении электронов по скоростям остаются затухающими. Это же относится и к равенству температур $T_\parallel = T_\perp$, когда из (6) получаем соотношение (4.2.26), из которого в зоне прозрачности всегда получаем $\gamma > 0$.

Для нарастания волн ($\gamma < 0$) необходимо, чтобы выполнялось неравенство $T_\perp > T_\parallel$, так что в соответствии с (6)

$$T_\perp/T_\parallel > \omega_H/(\omega_H-\omega). \quad (6.3.7)$$

При хорошем выполнении условия $\omega_H \gg (\omega_H-\omega)$, где учтено, что $\omega_H > \omega$, для возникновения неустойчивости здесь требуется сильная анизотропия функции распределения ($T_\perp \gg T_\parallel$). При фиксированных $T_\perp/T_\parallel$ нестабильность не возникает, если частота ω достаточно близка к ω_H. Поэтому существует верхняя граничная частота $\omega_г$, определяемая из требования $\gamma = 0$ (6). Со стороны более низких частот убывание γ определяется фактором $\exp[-m(\bar\omega-\omega_H)^2/2k^2\varkappa T_\parallel]$. Здесь при выполнении (7) $\gamma < 0$, но величина $|\gamma|$ ничтожно мала, и нарастание не имеет реального значения.

Из обращения в нуль фигурной скобки в (6) для $\omega_г$ получаем

$$\omega_г = \omega_H(1 - T_\parallel/T_\perp). \quad (6.3.8)$$

Согласно (6) нарастание $|\gamma|$ ($\gamma < 0$) может быть в рамках используемых ограничений лишь экспоненциально малым. Максимальным скоростям нарастания соответствуют разности $(\omega_H - \omega) \sim \sqrt{\varkappa T_\parallel/m}\, k$, когда формула (6) строго уже неприменима.

Однако можно использовать эту формулу для оценок. В результате из (6), (7) приближенно имеем

$$|\gamma| \sim \sqrt{\frac{\varkappa T_{\parallel}}{m}} \frac{T_{\perp}}{T_{\parallel}} k. \tag{6.3.9}$$

Гирорезонансная неустойчивость является одной из важнейших нестабильностей, существующих в плазме магнитосферы. С нарастанием из-за этой нестабильности электромагнитных волн связывают генерацию некоторых типов естественного низкочастотного радиоизлучения магнитосферы [20], а также ряда типов пульсаций магнитного поля [21].

6.4. Токовая и градиентная неустойчивости в столкновительной магнитоактивной плазме

В последние годы для объяснения неоднородной структуры ионосферной плазмы широко привлекаются неустойчивости, имеющие своей причиной относительное движение электронов и ионов, т. е. токи. Ионосферные токи возбуждаются под влиянием движений нейтральных частиц (ветров) или под действием электрических полей. При этом очень существен вклад геомагнитного поля $\mathbf{H}_0$, в присутствии которого плотность токов определяется соотношениями вида (2.3.77).

При наличии достаточно больших относительных скоростей электронов и ионов неустойчивость возникает в однородной плазме (токовая или двухтоковая неустойчивость). Развитию неустойчивостей способствует при определенных условиях наличие регулярных градиентов электронной (ионной) концентрации (градиентно-дрейфовая неустойчивость) [23, 24].

Могут иметь приложения механизмы возбуждения неустойчивостей токами, поперечными магнитному полю $\mathbf{H}_0$ (в приэкваториальной или полярной области E ионосферы [23, 24]), или токами вдоль силовых линий $\mathbf{H}_0$ (в астрофизических условиях [8]).

Далее будем ориентироваться на слабоионизированную плазму, в которой токи поперечны по отношению к $\mathbf{H}_0$ и возникают за счет дрейфа электронов и ионов (с неравными скоростями) в скрещенных постоянных электрическом $\mathbf{E}_0$ и магнитном $\mathbf{H}_0$ полях. В основу рассмотрения положим квазигидродинамический подход. Учитываем только столкновения электронов и ионов с нейтральными частицами, которые характеризуются частотами ν_{en} и ν_{in}.

Результаты можно сделать достаточно обозримыми только при использовании ряда упрощающих ограничений и предположений. Будем интересоваться, в отличие от пп. 6.2 и 6.3 устойчивостью низкочастотных волновых возмущений, когда

$$\overline{\omega} \ll \nu_{in}, \quad \overline{\omega} \ll \nu_{en}. \tag{6.4.1}$$

Второе из этих неравенств фактически является следствием первого.

Ограничимся примером

$$\omega_H \gg \nu_{en}, \quad \Omega_H \ll \nu_{in}, \tag{6.4.2}$$

когда возбуждение поперечных токов в присутствии полей $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{H}_0$ облегчается. Первое из неравенств означает, что длина свободного пробега электронов больше их гирорадиуса. В подобных случаях иногда говорят, что частицы замагничены. При выполнении (2) электроны будут дрейфовать поперек $\mathbf{H}_0$ со скоростью $c[\mathbf{E}_0\mathbf{H}_0]/H_0^2$ [9, 23], тогда как скорость ионов в этом направлении будет значительно меньше. Можно упорядоченную скорость ионов приравнять нулю, рассматривая далее в нулевом приближении только движение электронов со скоростью $\mathbf{u}_{e0} = \mathbf{u}_0$.

Токовая (двухпотоковая) неустойчивость. Рассмотрим сначала только токовую неустойчивость, так как здесь можно использовать выражение для одной из компонент тензора комплексной диэлектрической проницаемости (3.1.38). Второе условие (2) дает возможность не учитывать влияние магнитного поля $\mathbf{H}_0$ на движение ионов. Рассматривая электростатические (продольные) возмущения, имеем дисперсионное уравнение $\varepsilon'_{zz} = 0$. Здесь нужно иметь в виду, что компоненты тензора (3.1.38) записаны в такой системе отсчета, когда распространение происходит вдоль оси z. Естественно, что отщепление ветви продольных волн при $\alpha \neq 0$ можно сделать лишь приближенно. Для низкочастотных волн такое выделение волн с $\mathbf{E} = -\nabla\varphi$ обычно вполне возможно. Для рассматриваемой неустойчивости этот вопрос обсуждался в [24].

Используя формулу для ε'_{zz} (3.1.38) с учетом обозначений (3.1.39), (3.1.40), из равенства $\varepsilon'_{zz} = 0$ приходим к дисперсионному уравнению

$$1 - \frac{\omega_{e0}^2\left[(\omega'_e - i\nu_{en})^2 - \omega_H^2\cos^2\alpha\right]}{\omega'_e(\omega'_e - i\nu_{en})\left[(\omega'_e - i\nu_{en})^2 - \omega_H^2\right] - k^2 v_{T_e}^2\left[(\omega - i\nu_{en})^2 - \omega_H^2\cos^2\alpha\right]} -$$

$$- \frac{\omega_{i0}^2}{\omega(\omega - i\nu_{in}) - k^2 v_{T_i}^2} = 0, \qquad \omega'_e = \omega - \mathbf{k}\mathbf{u}_0. \quad (6.4.3)$$

Далее, используя (1) и первое из неравенств (2), пренебрежем в левой части (3) единицей. Это пренебрежение здесь связано с использованием безвихревого приближения. Будем считать, что плазма является достаточно плотной, так что $\omega_{i0} \gg \bar{\omega}$. В результате можно упростить уравнение (3) и записать его в виде

$$d_e\left[k^2 v_{T_i}^2 - \omega(\omega - i\nu_{in})\right] +$$

$$+ (M/m)^{-1}\left[k^2 v_{T_e}^2 - (\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}_{e0})(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}_0 - i\nu_{en})\right] = 0, \quad (6.4.4)$$

где $d_e = \nu_{en}^2/\omega_H^2 + \cos^2\alpha$.

Полагая $\omega = \bar{\omega} + i\gamma$, где $|\gamma| \ll \bar{\omega}$, учитывая (1) и определяя действительную и мнимую части из условия обращения в нуль мнимой части, получаем для частоты $\bar{\omega}$ соотношение

$$\bar{\omega} = \mathbf{k}\mathbf{u}_0\left\{1 + \frac{M\nu_{in}}{m\nu_{en}}\left(\frac{\nu_{en}^2}{\omega_H^2} + \cos^2\alpha\right)\right\}^{-1}. \quad (6.4.5)$$

При переходе использовалось условие $|\gamma| \ll \nu_{in}$, которое в силу условия (1) при принятом ограничении $|\gamma| \ll \omega$ хорошо выполняется.

Из обращения в нуль действительной части приходим к соотношению для декремента γ в виде

$$\gamma = \frac{Mk^2}{m\nu_{en}}\left(\cos^2\alpha + \frac{\nu_{en}^2}{\omega_H^2}\right)\left\{\left(\frac{m}{M}\,v_{T_e}^2 + v_{T_i}^2\right) -\right.$$

$$\left. - (\mathbf{k}\mathbf{u}_0)^2 k^{-2}\left\{1 + \frac{M\nu_{in}}{m\nu_{en}}\left(\cos^2\alpha + \frac{\nu_{en}^2}{\omega_H^2}\right)\right\}^{-1}\right\}. \quad (6.4.6)$$

Из соотношения (5) видно, что фазовая скорость возмущений меньше $\mathbf{k}\mathbf{u}_0/k$, а групповая скорость не превышает дрейфовую скорость u_0. При

$\cos\alpha = 0$ из (5) получаем

$$\omega = \mathbf{k}\mathbf{u}_{e0}\left(1 + \frac{\nu_{en}\nu_{in}}{\omega_H\Omega_H}\right)^{-1}. \qquad (6.4.5а)$$

С ростом столкновений частота (5а) уменьшается. При оценке степени этого влияния нужно учесть, что выполнение первого из ограничений (2) способствует уменьшению $\nu_{en}\nu_{in}/\omega_H\Omega_H$, а второе — увеличению. Несмотря на условие $\Omega_H \gg \nu_{in}$, вполне допустимы случаи, когда отношение $\nu_{en}\nu_{in}/\omega_H\Omega_H$ сравнимо с единицей или даже $\nu_{en}\nu_{in}/\omega_H\Omega_H \ll 1$. Именно таковы, например, условия в ионосферной плазме на высотах, где возникает токовая неустойчивость [24]. При выполнении последнего неравенства из (5а) следует $\omega \approx \mathbf{k}\mathbf{u}_{e0}$.

Перейдем теперь к основному вопросу, касающемуся условий нарастания возмущений. Критерий неустойчивости, следующий из (6) при $\gamma < 0$, выпишем в благоприятном случае для развития нестабильности, когда $\mathbf{k}$ и $\mathbf{u}_{e0}$ параллельны. Тогда имеем неравенство

$$u_0^2 > \frac{m}{M}v_{T_e}^2\left(1 + \frac{T_e}{T_i}\right)\left\{1 + \frac{M\nu_{in}}{m\nu_{en}}\left(\cos^2\alpha + \frac{\nu_{en}^2}{\omega_H^2}\right)\right\}. \qquad (6.4.7)$$

При $\cos^2\alpha \sim 1$ в силу (2) в (7) справа можно считать $\cos^2\alpha \gg \nu_{en}^2/\omega_H^2$. Далее, нужно учесть результаты оценки $M\nu_{in}/m\nu_{en} \gg 1$, так как $\nu_{in}/\nu_{en} \sim v_{T_i}/v_{T_e} \sim \sqrt{m/M}$, то $M\nu_{in}/m\nu_{en} \sim \sqrt{M/m} \gg 1$. Полагая для конкретности $T_e \approx T_i = T$, $\cos\alpha = 1$, из (7) приходим к условию нестабильности для возмущений, распространяющихся вдоль потока и в направлении $\mathbf{H}_0$:

$$u_0 > \sqrt{2}\,v_{T_e}\sqrt{M/m}\,\nu_{in}/\nu_{en}. \qquad (6.4.7а)$$

Условие (7а), если учесть, что $\sqrt{M/m}(\nu_{in}/\nu_{en}) \sim 1$, можно записать как $u_0 > a v_{T_e}$ $(a \sim 1)$. Таким образом, неоднородности с волновыми векторами $\mathbf{k}$, имеющими значительную составляющую k (вдоль поля $\mathbf{H}_0$), создаются такими токами, когда относительные скорости электронов и ионов u_0 по своему значению больше тепловых скоростей электронов. Впервые токовую неустойчивость в бесстолкновительной плазме в отсутствие поля $\mathbf{H}_0$ рассмотрел Бьюнеман. Теория этой неустойчивости получила применения (об астрофизических приложениях см., например, [8]).

Требование $u_0 > v_{T_e}$ часто оказывается нереальным. Так в ионосферной плазме токи с подобными характерными скоростями u_0 просто не наблюдаются. В связи с этим существенно, что возникновение неустойчивости облегчается при

$$\cos^2\alpha \ll 1. \qquad (6.4.8)$$

Далее будем ориентироваться на этот случай. Наложим на малость величины $\cos^2\alpha$ более конкретное и сильное ограничение

$$\cos^2\alpha \ll m\nu_{en}/M\nu_{in}, \qquad (6.4.8а)$$

которое приближенно можно сформулировать в виде $\cos^2\alpha \ll \sqrt{m/M}$. Допустим, что $\nu_{en}\nu_{in}/\omega_H\Omega_H < 1$. Тогда приходим из (7) к условию неустойчивости

$$u_0^2 > v_{T_i}^2 + (m/M)\,v_{T_e}^2. \qquad (6.4.9)$$

При $T_e \approx T_i = T$ скорость u_0 должна превосходить скорость $\sqrt{2\varkappa T/M}$, равную фазовой скорости ионного звука в изотермической плазме (гл. 3). Таким образом, движения электронов относительно ионов должны быть сверхзвуко-

выми. Однако требование (9) неизмеримо слабее, чем (7а). В условиях (8), (9) возникают неоднородности, сильно ориентированные в направлении поля $\mathbf{H}_0$, так как в данном случае $\mathbf{k} \approx \mathbf{k}_\perp$ и изменения плотности плазмы и других величин в волнах происходят, в основном, в направлениях, поперечных к $\mathbf{H}_0$. Критерий $u_0 > \sqrt{2}\, v_{T_i}$ при условии (8а) был получен Фали [25] при исследовании неустойчивостей в ионосферной экваториальной токовой струе [23—25].

При $\cos\alpha = 0$, $T_e = T_i$ и $\nu_{en}\nu_{in}/\omega_H\Omega_H \ll 1$ из (6) имеем

$$|\gamma| = \nu_{en}\left(\omega_H\Omega_H\right)^{-1} k^2\left(u_0^2 - 2v_{T_i}^2\right). \qquad (6.4.10)$$

В этих условиях согласно (5а) $\overline{\omega} \approx ku_0$. Даже при хорошо выраженной «надкритичности», когда $\left(u_0 - 2v_{T_i}\right) \gtrsim v_{T_i}$, легко установить правильность предположения $|\gamma| \ll \overline{\omega}$. При $u_0 \approx \sqrt{2}\, v_{T_i}$ это неравенство выполняется еще более убедительно. Если учесть принятое при переходе к (10) неравенство $\nu_{en}\nu_{in}/\omega_H\Omega_H \ll 1$, то в соответствии с (5а) $\overline{\omega} = ku_0$ и $|\gamma|/\omega < \nu_{en}\nu_{in}/\omega_H\Omega_H$. Умножая числитель и знаменатель справа на частоту ν_{in}, получаем, что $|\gamma|/\omega \ll \overline{\omega}/\nu_{in}$. Отношение $\overline{\omega}/\nu_{in}$ невелико в силу (1), так что условие $|\gamma| \ll \overline{\omega}$ подтверждается. Подобное обоснование можно провести в рамках (8) и при $\cos\alpha \neq 0$.

Градиентно-дрейфовая неустойчивость. Эта неустойчивость, которая рассматривается также для столкновительной слабоионизированной плазмы на основе квазигидродинамических уравнений, возникает при одновременном наличии тока и регулярного градиента электронной (ионной) концентрации. Условия появления такой неустойчивости могут быть менее жесткими, чем для токовой.

При установлении критерия возникновения неустойчивости необходима какая-то конкретизация условий. Как и в первой части этого раздела, рассматриваем только низкочастотные возмущения (1). Степень влияния магнитного поля $\mathbf{H}_0$ на электроны и ионы по-прежнему характеризуем неравенствами (2), движение ионов рассматриваем при $H_0 = 0$.

При наличии неоднородности плазмы будем исходить непосредственно из системы квазигидродинамических уравнений (2.3.54), (2.3.55), (2.3.57), (2.3.58). В них не учитываются фотохимические процессы и столкновения между заряженными частицами. Наряду со столкновениями между заряженными и нейтральными частицами принимается во внимание только влияние электродинамических сил и сил давления.

В результате исходная система уравнений с учетом условия квазинейтральности имеет вид

$$mN\frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial t} + mN(\mathbf{u}_e\nabla)\,\mathbf{u}_e = -\varkappa T_e\nabla N - eN\mathbf{E} - \frac{eN}{c}\left[\mathbf{u}_e\mathbf{H}_0\right] - m\nu_{en}N\mathbf{u}_e, \qquad (6.4.11)$$

$$MN\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + MN(\mathbf{u}_i\nabla)\,\mathbf{u}_i = -\varkappa T_i\nabla N + eN\mathbf{E} - M\nu_{in}N\mathbf{u}_i, \qquad (6.4.12)$$

$$\partial N/\partial t + \operatorname{div} N\mathbf{u}_e = 0, \qquad (6.4.13)$$

$$\partial N/\partial t + \operatorname{div} N\mathbf{u}_i = 0. \qquad (6.4.14)$$

В этой системе пренебрежено движением нейтральных частиц, и в силу медленности рассматриваемых процессов они считаются происходящими при постоянной температуре (изотермическими).

При анализе неустойчивости, когда с самого начала принят во внимание факт квазинейтральности, нужно ввести безвихревое внутреннее поле, препятствующее сильному разделению зарядов, так что

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \nabla\varphi', \qquad (6.4.15)$$

где $\mathbf{E}_0$ — внешнее электрическое поле, приводящее к дрейфу электронов и ионов. В силу ограничений (2) в невозмущенном состоянии учитываем только движение электронов поперек магнитного поля $\mathbf{H}_0$ ($\mathbf{u}_{e0} = \mathbf{u}_0$, $\mathbf{u}_{i0} = 0$).

При линеаризации системы уравнений опустим малосущественные при анализе рассматриваемой неустойчивости инерционные члены $mN\, d\mathbf{u}_e/dt$ в (11) и $MN\, d\mathbf{u}_i/dt$ в (12). Считаем, что все переменные величины меняются по закону $\exp(i\omega t - i\mathbf{kr})$ и что равновесная концентрация меняется вдоль оси z и характеризуется масштабом $|L|$ $[L \equiv N_0\, (dN_0/dz)^{-1}]$ *). Считается, что L не зависит от z и что длина волн много меньше $|L|$. В силу этого в дисперсионном уравнении слагаемым ∞L^{-2} пренебрежено. Конечно, модель с $L = \text{const}$ является сильно идеализированной и позволяет получить характеристики неустойчивости, лишь при достаточно больших kL.

При учете сделанных замечаний из (11)—(15) имеем

$$\omega_H \left[\mathbf{u}_e'\mathbf{h}_0\right] + \nu_{en}\mathbf{u}_e' = -i\frac{e}{m}\mathbf{k}\varphi' + \frac{\varkappa T_e}{mN_0}\left(i\mathbf{k} + \frac{\mathbf{z}_0}{L}\right)N', \qquad (6.4.16)$$

$$\nu_{in}\mathbf{u}_i' = i\frac{e}{M}k\varphi' + \frac{\varkappa T_i}{MN_0}\left(i\mathbf{k} + \frac{\mathbf{z}_0}{L}\right)N', \qquad (6.4.17)$$

$$i\left(\omega - \mathbf{k}\mathbf{u}_0\right)N' - iN_0\mathbf{k}\mathbf{u}_e' + u_{ez}'N_0/L = 0, \qquad (6.4.18)$$

$$i\omega N' - iN_0\mathbf{k}\mathbf{u}_i' + u_{iz}'N_0/L = 0, \qquad (6.4.19)$$

где возмущенные величины отмечены штрихом, $\mathbf{z}_0$ и $\mathbf{h}_0$ — единичные векторы в направлении оси z и магнитного поля $\mathbf{H}_0$.

При приравнивании концентраций N_e' и N_i' для низкочастотных электростатических возмущений дополнять уравнением Пуассона приведенную систему уравнений уже не требуется. Таким образом, ленгмюровские колебания или аналогичные им процессы исключаются. Это обосновано на частотах, много меньших частоты ω_{i0}, что и предполагается. Подобная методика часто используется при решении задач динамики слабоионизированной (в частности, ионосферной) плазмы.

Разрешаем уравнение (16) относительно скорости $\mathbf{u}_e'$. Используя примененное в гл. 2, 3 элементарное соотношение векторной алгебры, из (16), (17) имеем при учете неравенства $\omega_H \gg \nu_{en}$

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_e' = \frac{\nu_{en}}{\omega_H^2}\Bigg\{ & -i\frac{e}{m}\left(\mathbf{k} - \frac{\omega_H}{\nu_{en}}\left[\mathbf{k}\mathbf{h}_0\right] + \frac{\omega_H^2}{\nu_{en}^2}\mathbf{h}_0\left(\mathbf{k}\mathbf{h}_0\right)\right)\varphi' + \\ & + i\frac{\varkappa T}{m}\left(\mathbf{k} - \frac{\omega_H}{\nu_{en}}\left[\mathbf{k}\mathbf{h}_0\right] + \frac{\omega_H^2}{\nu_{en}^2}\mathbf{h}_0\left(\mathbf{k}\mathbf{h}_0\right)\right)N' + \\ & + \frac{\varkappa T_e}{mN_0}L^{-1}\left(\mathbf{z}_0 - \frac{\omega_H}{\nu_{en}}\left[\mathbf{z}_0\mathbf{h}_0\right] + \frac{\omega_H^2}{\nu_{en}^2}\mathbf{h}_0\left(\mathbf{z}_0\mathbf{h}_0\right)\right)\Bigg\}, \qquad (6.4.20)\end{aligned}$$

$$\mathbf{u}_i' = i\mathbf{k}\left(\frac{e}{M\nu_{in}}\varphi' + \frac{\varkappa T_i}{N_0 M\nu_{in}}N'\right) + \frac{\varkappa T_i}{MN_0\nu_{in}}\frac{\mathbf{z}_0}{L}N'. \qquad (6.4.21)$$

Пусть магнитное поле $\mathbf{H}_0$ лежит в плоскости yz. Примем, что в направлении ∇N_0 компонента $\mathbf{k}$ отсутствует ($k_z = 0$). Это приведет к сильным уп-

*) Частоты столкновений ν_{en}, ν_{in} и скорость $\mathbf{u}_0$ также считаются не зависящими от координат.

рощениям без существенного изменения выводов о характере возникновения градиентно-дрейфовой неустойчивости. Определяя с помощью (20), (21) u'_{ez}, u'_{iz}, $\mathbf{k}\mathbf{u}'_e$ и $\mathbf{k}\mathbf{u}'_i$, после подстановки полученных выражений в (18), (19) приходим к системе уравнений

$$\Big[i\left(\omega-\mathbf{k}\mathbf{u}_0\right)+$$
$$+D_e\left(k_\parallel^2+k_\perp^2\nu_{en}^2/\omega_H^2-ik_\parallel\cos\chi L^{-1}-ik_y\sin\chi\nu_{en}\omega_H^{-1}L^{-1}\right)\Big]N'-$$
$$-\mu_e\left[k_\parallel^2+k_\perp^2\nu_{en}^2/\omega_H^2+ik_\parallel\cos\chi L^{-1}+ik_y\sin\chi\left(\nu_{en}/\omega_H\right)L^{-1}\right]\varphi'=0, \quad (6.4.22)$$

$$\left(i\omega+D_ik^2\right)N'+\mu_ik^2\varphi'=0, \quad (6.4.23)$$

где $k_\parallel$ и $k_\perp$ — проекции $\mathbf{k}$ на направление $\mathbf{H}_0$ и на перпендикулярное к нему, χ — угол между $\mathbf{H}_0$ и осью z, $D_e=\varkappa T_e/m\nu_{en}$, $D_i=\varkappa T_i/M\nu_{in}$ — коэффициенты диффузии в изотропной плазме, взятые изолированно для электронов и для ионов *), $\mu_e=e^2N/m\nu_{en}$ и $\mu_i=e^2N/M\nu_{in}$ — подвижности электронов и ионов.

Приравнивая нулю детерминант системы (22), (23), получаем

$$i\omega\left[k_\parallel^2+k_\perp^2\left(\nu_{en}^2/\omega_H^2+m\nu_{en}/M\nu_{in}\right)\right]-i\mathbf{k}\mathbf{u}_0 m\nu_{en}/M\nu_{in}+$$
$$+\left(\mathbf{k}\mathbf{u}_0\right)\left(\nu_{en}/\omega_H\right)k_y\sin\chi L^{-1}-2D_i\left[k_\parallel^2+\left(\nu_{en}^2/\omega_H^2\right)k_\perp^2\right]k^2=0. \quad (6.4.24)$$

Мы видим, что в мнимой части (24) отсутствуют в рассматриваемом приближении члены ∞L^{-1}. Если бы подобные члены были велики, то пришлось иметь дело с дрейфовыми волнами. В нашем случае дрейф обусловлен не изменениями N_0, а наличием внешнего электрического поля $\mathbf{E}_0$. Тогда при условиях (2), например, $\mathbf{u}_{e0}\approx\mathbf{u}_0$, а $u_{i0}\ll u_{e0}$. Дрейфовые волны с $\bar{\omega}\infty|\nabla N_0|$ далеко не типичны для приземной плазмы и для плазмы в астрофизических условиях, так как естественные градиенты обычно являются относительно плавными по сравнению с создаваемыми в лабораторных условиях.

Полагая в (24) $\omega=\bar{\omega}+i\gamma$ и отделяя мнимую часть, приходим к соотношению для $\bar{\omega}$, совпадающему с (6). В следующем приближении при $|\gamma|\ll\ll\omega$ из действительной части (24) имеем

$$\gamma=\left(k_\parallel^2+\frac{m\nu_{en}}{M\nu_{in}}k_\perp^2\right)^{-1}\left\{-\mathbf{k}\mathbf{u}_0\frac{\nu_{en}}{\omega_H}k_y\sin\chi L^{-1}+2D_i\left(k_\parallel^2+\frac{\nu_{en}^2}{\omega_H^2}k_\perp^2\right)k^2\right\}. \quad (6.4.25)$$

Выбором знака k_y можно сделать первый член в фигурной скобке (25) как положительным, так и отрицательным. Поэтому условием возникновения неустойчивости будет требование, которое выпишем при $\mathbf{k}\parallel\mathbf{u}_0$ и $k\approx k_y$

$$u_0\frac{\nu_{en}}{\omega_H}\sin\chi L^{-1}>2D_i\left(k_\parallel^2+\frac{\nu_{en}^2}{\omega_H^2}k_\perp^2\right). \quad (6.4.26)$$

*) Реально в плазме диффузия обычно представляет совокупный процесс движения электронов и ионов, когда существенно влияние возникающих при этом внутренних электрических полей. Процессу диффузии в слабоионизированной плазме посвящено много работ. Ряд вопросов линейного приближения обсужден в [23].

Заметим, что возмущения с $k_x = k_z = 0$ $(k = k_y)$ распространяются поперек к $\mathbf{H}_0$ и к ∇N_0. В силу малости ν_{en}^2/ω_H^2 (2) наличие даже небольшой составляющей $k_\parallel$ в правой части (26) может быть существенным. Наиболее благоприятные условия для возникновения неустойчивости характерны для квазипоперечных к $\mathbf{H}_0$ возмущений, когда $k_\parallel^2 \ll \left(\nu_{en}^2/\omega_H^2\right) k_\perp^2$. В этом случае из (26) имеем

$$u_0 \sin \chi L^{-1} > 2D_i (\nu_{en}/\omega_H) k_\perp^2. \tag{6.4.26a}$$

Если говорить о выполнимости этого условия, то здесь существенно наличие в правой части малого множителя $\nu_{en}/\omega_H \ll 1$ (2). При хорошем выполнении этого ограничения неоднородности плазмы могут здесь возникать в отличие от токовой неустойчивости и при дозвуковых скоростях u_0 $\left(u_0 < 2v_{T_i}\right)$. Напомним, что при $T_e \approx T_i$ и изотермическом распространении скорость ионного звука равна $\sqrt{2}\, v_{T_i}$.

ГЛАВА 7

НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ИЗЛУЧЕНИЯ ВОЛН В ПЛАЗМЕ

Плазма оказывает существенное влияние на излучение заряженных частиц. Это влияние прежде всего определяется изменением фазовой и групповой скоростей излучаемых волн, их поляризационных характеристик, что приводит в ряде случаев к значительному изменению процесса излучения. Поскольку существенную роль в формировании спектра наблюдаемого внеземного излучения космической плазмы играют синхротронное, циклотронное и черенковское излучения, именно этим процессам уделено основное внимание в данной главе.

7.1. Синхротронное излучение

Общие соотношения. Стандартный путь нахождения электромагнитных полей, излучаемых заряженными частицами, состоит в определении фурье-компонент полей $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{k})$ и $\mathbf{H}(\omega, \mathbf{k})$ из уравнений Максвелла (2.1) или соответствующих волновых уравнений (гл. 5), содержащих внешние источники тока, и последующего перехода к полям $\mathbf{E}(\omega, \mathbf{r})$ и $\mathbf{H}(\omega, \mathbf{r})$ с помощью обратного преобразования Фурье по k. Например, уравнение

$$\left\{\Delta - \operatorname{grad}\operatorname{div} + \frac{\omega^2}{c^2}\hat{\varepsilon}(\omega)\right\}\mathbf{E}(\omega, \mathbf{r}) = \frac{4\pi i\omega}{c^2}\mathbf{j}(\omega, \mathbf{r}) \qquad (7.1.1)$$

($\hat{\varepsilon}(\omega)$ — оператор, соответствующий тензору диэлектрической проницаемости $\varepsilon_{ij}(\omega)$), которое для $\mathbf{E}(r) \sim \exp(-i\mathbf{kr})$ можно представить в виде

$$L_{ij}(\omega, \mathbf{k})\,E_j(\omega, \mathbf{k}) = \frac{4\pi i\omega}{c^2}\mathbf{j}_i(\omega, \mathbf{k}), \quad L_{ij}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_{ij} + k_ik_j - k^2\delta_{ij}, \qquad (7.1.2)$$

имеет решение, формально записываемое следующим образом:

$$E_i(\omega, \mathbf{k}) = \frac{4\pi i\omega}{c^2}L_{ij}^{-1}(\omega, \mathbf{k})\,\mathbf{j}_j(\omega, \mathbf{k}), \qquad (7.1.3)$$

где L_{ij}^{-1} — тензор, обратный тензору $L_{ij}\left(L_{i\mu}L_{\mu j}^{-1} = \delta_{ij}\right)$. Представляя $L_{ij}^{-1} = T_{ij}D^{-1}$, где T_{ij} — алгебраическое дополнение элементов матрицы L_{ij}, а $D(\omega, \mathbf{k})$ — ее детерминант, для поля волны в

точке $\mathbf{r}$ имеем

$$E_i(\omega, \mathbf{r}) = \frac{4\pi i\omega}{c^2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{T_{ij}(\omega, \mathbf{k})}{D(\omega, \mathbf{k})} \mathbf{j}_j(\omega, \mathbf{k}) \exp(-i\mathbf{kr})\, d\mathbf{k} \qquad (7.1.4)$$

или

$$E_i(\omega, \mathbf{r}) = \frac{i\omega}{c^2 4\pi^3} \int\limits_{-\infty}^{\infty} dt\, d\mathbf{k}\, d\mathbf{r}' \frac{T_{ij}(\omega, \mathbf{k})}{D(\omega, \mathbf{k})} \mathbf{j}_j(t, \mathbf{r}') \exp(-i(\mathbf{kR} + \omega t)), \qquad (7.1.5)$$

где $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$.

В общем случае вычисление поля $E_i(\omega, \mathbf{r})$, особенно в анизотропной плазме, связано с большими трудностями [2, 3], поэтому отсылая читателя к обзорным и оригинальным работам [2—8], мы ограничимся рассмотрением наиболее простых случаев, имеющих тем не менее приложение к широкому кругу вопросов излучения заряженными частицами электромагнитных и плазменных волн в околоземной космической плазме.

Рассмотрим излучение поперечных высокочастотных электромагнитных волн в изотропной плазме ($\varepsilon_{ij}(\omega) = \varepsilon(\omega)\delta_{ij}$) элементарными заряженными частицами ($\mathbf{j} = e\mathbf{v}(t)\delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0(t))$). Поскольку поперечные волны излучаются компонентой тока $\mathbf{j}_t = [\mathbf{n}_s[\mathbf{j}\mathbf{n}_s]]$, где $\mathbf{n}_s = (\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ — единичный вектор, направленный по $\mathbf{k}$, то из (5) после интегрирования по $\mathbf{r}'$ имеем

$$E(\omega, \mathbf{r}) = -\frac{i\omega e}{4\pi^3 c^2} \int dt\, d\mathbf{k} \frac{\mathbf{v}_t \exp\{-i[\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) + \omega t]\}}{k^2 - \varepsilon k_0^2}. \quad (7.1.5\text{a})$$

Представим $\mathbf{k}$ в сферической системе координат и проведем в (5а) интегрирование по углам. Тогда подынтегральное выражение примет вид

$$-2\pi i \mathbf{v}_t(t) \exp\{-i(kR + \omega t)\} R^{-1} \left(k^2 - \varepsilon k_0^2\right)^{-1} dk^2 dt.$$

Будем исходить из условия излучения и ограничимся вычислением мнимой части (5а). Сделав формальную замену $x^{-1} \to i\pi\delta(x)$, получим (ниже $k = k_0\sqrt{\varepsilon}$)

$$E(\omega, \mathbf{r}) = -\frac{i\omega e}{2\pi c R} \exp(-ikr) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{\beta}_t \exp(-i\omega t + i\mathbf{k}\mathbf{r}_0)\, dt \qquad (7.1.6)$$

($\boldsymbol{\beta}_t = \mathbf{v}_t/c$). Здесь учтено, что при $\mathbf{r}_0 \ll \mathbf{r}$ и $kr_0^2 \ll r \simeq R$, мы можем в подэкспоненциальном множителе ограничиться в $\mathbf{kr}$ первыми двумя членами разложения в ряд Тейлора ($\mathbf{kr} \simeq kr - \mathbf{k}\mathbf{r}_0$).

Следуя [9], обозначим через $v_\parallel$ и $v_\perp$ соответственно проекции скорости частицы на ось z и на ортогональное направление и за-

дадим (рис. 7.1) траекторию частицы в виде (винтообразное движение)

$$\mathbf{r}_0(t) = c\beta_\perp\omega_g^{-1}\{-\mathbf{1}_x\cos\omega_g t + \mathbf{1}_y\sin\omega_g t\} + \mathbf{1}_z c\beta_\parallel t,$$
$$\boldsymbol{\beta}(t) = \frac{\mathbf{v}}{c} = \beta_\perp\{\mathbf{1}_x\sin\omega_g t + \mathbf{1}_y\cos\omega_g t\} + \mathbf{1}_z\beta_\parallel. \tag{7.1.7}$$

Из (5)—(7) следует, что поле излучения определяется компонентой скорости

$$\boldsymbol{\beta}_t = \boldsymbol{\beta} - \mathbf{n}_s(\boldsymbol{\beta}\mathbf{n}_s) =$$
$$= \mathbf{1}_x\beta_\perp\sin\omega_g t + (\mathbf{1}_y n_{sz} - \mathbf{1}_z n_{sy})(\beta_\perp n_{sz}\cos\omega_g t - \beta_\parallel n_{sy}) \tag{7.1.8}$$

(n_{sy} и n_{sz} — проекции вектора $\mathbf{n}_s$ на оси y и z соответственно). Введем тройку единичных векторов $\mathbf{n}_s$, $\mathbf{1}_1$ и $\mathbf{1}_2$, таких, что

$$\mathbf{1}_2 = \mathbf{1}_z n_{sy} - \mathbf{1}_y n_{sz}, \quad \mathbf{1}_1 = [\mathbf{1}_2\mathbf{n}_s] = -\mathbf{1}_x. \tag{7.1.9}$$

Тогда

$$\boldsymbol{\beta}_t = -\mathbf{1}_1\beta_\perp\sin\omega_g t - \mathbf{1}_2(\beta_\perp n_{sz}\cos\omega_g t - \beta_\parallel n_{sy}),$$

а показатель подынтегральной экспоненты в (6) равен

$$\omega t - \omega c^{-1}\sqrt{\varepsilon}\,\mathbf{n}_s\mathbf{r}_0 = \eta\omega t - \zeta\sin\omega_g t,$$
$$\eta = 1 - \beta_\parallel\sqrt{\varepsilon}\,n_{sz}, \quad \zeta = \omega\beta_\perp\sqrt{\varepsilon}\,n_{sy}\omega_g^{-1}. \tag{7.1.10}$$

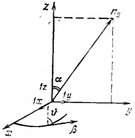

Рис. 7.1. К задаче о синхротронном излучении частицы при ее винтовом движении: $\mathbf{1}_x$, $\mathbf{1}_y$, $\mathbf{1}_z$ — единичные векторы вдоль осей x, y, z соответственно.

Рассмотрим качественно поведение (10) в области частот $\omega \gg \omega_g$. Основной вклад в поле $\mathbf{E}(\omega)$ в этом случае дает интервал значений $|t| \sim \omega^{-1} \ll \omega_g^{-1}$. Учитывая это неравенство, разложим $\sin\omega_g t$ в ряд Тейлора и, ограничиваясь первыми членами разложения, представим правую часть (10) в виде

$$\omega t\{1 - \beta\sqrt{\varepsilon}(\cos\alpha\cos\vartheta + \sin\alpha\sin\vartheta\,(\omega_g t)^{-1}\sin\omega_g t)\} \approx$$
$$\approx \omega t\{1 - \beta\sqrt{\varepsilon}\cos\psi\} + \beta\sqrt{\varepsilon}(3!)^{-1}\sin\alpha\sin\vartheta\,\omega_g^2\omega t^3, \tag{7.1.11}$$

где $\psi = \alpha - \vartheta$. Очевидно, что при малых t интеграл (6) определяется первым членом этого выражения. Отсюда ясно, что для $\varepsilon \simeq 1$ и $\beta \to 1$ (ультрарелятивистский случай) интеграл (6) имеет максимальное значение при $\psi \ll 1$, когда осциллирующая функция в (6) близка к единице на достаточно большом интервале интегрирования по t. Таким образом, излучение ультрарелятивистской частицы практически направлено вдоль ее мгновенной скорости (см. [10], § 72). Разлагая $\cos\psi$ в ряд Тейлора, получаем, что значение интеграла (6) будет резко уменьшаться, если угол ψ превысит некоторое значение $\psi_c \approx (2(1-\beta\sqrt{\varepsilon})/\beta\sqrt{\varepsilon})^{1/2}$. Если излучение происходит в вакууме, т. е. $\varepsilon = 1$, то

$$\psi_c \approx \sqrt{2(1-\beta)} \approx \sqrt{1-\beta^2} \approx mc^2/\mathscr{E}.$$

(Здесь $\mathscr{E}$ — энергия частицы и $1 + \beta \approx 2$.) Очевидно, что в случае $\varepsilon \neq 1$ влияние среды даже при $\varepsilon \approx 1$ становится существенным, если

$$(1 - \varepsilon) > 2(1 - \beta) \approx (mc^2/\mathscr{E})^2.$$

Тогда и ширина диаграммы излучения частицей волн увеличивается и определяется характером среды

$$\psi_c \sim (1 - \sqrt{\varepsilon})^{1/2}.$$

Из (6) и (11) ясно, что влияние среды (отличие ε от единицы) должно привести к резкому уменьшению напряженности поля излучаемых волн.

Поскольку кубичный член в показателе экспоненты (6) становится существенным при

$$\beta \sqrt{\varepsilon} \sin^2 \vartheta \, (3!)^{-1} \omega_g^2 \omega t_c^3 \sim 1 \qquad (\psi = \alpha - \vartheta \ll 1),$$

из этого условия можно оценить интервал $t \leqslant t_c$, существенный для интегрирования в (6). Подставляя значение $t = t_c$ в $\omega t\{1 - \beta\sqrt{\varepsilon}\cos\psi\}$ при $\psi = 0$ и $\varepsilon = 1$ и приравнивая полученное выражение единице, можно оценить по порядку величины характерную частоту ω_c излучения ультрарелятивистской частицы (с энергией $\mathscr{E}$) в вакууме *)

$$\omega_c \sim \omega_g \sin \vartheta (\mathscr{E}/mc^2)^3.$$

Это соотношение характеризует также энергию частицы $\mathscr{E}_c$, которая вносит основной вклад в излучение на заданной частоте ω. При $\omega \ll \omega_c$ и $\omega \gg \omega_c$ напряженность поля излучения убывает. Особенно резкое убывание E имеет место при $\omega \gg \omega_c$, когда значение интеграла определяется первым членом (11). Входящие в (6) интегралы с учетом разложения (11), как нетрудно убедиться, сводятся к интегралам типа

$$\frac{\partial}{\partial a^\gamma} \int_0^\infty \cos(t^3 + at)\, dt = \frac{\partial}{\partial a^\gamma} \left\{ \frac{\sqrt{a}}{3} K_{1/3} \left(2 (a/3)^{3/2}\right) \right\},$$

где $\gamma = 0{,}1$, а $K_\nu(x)$ — функция Бесселя третьего рода. Таким образом можно получить асимптотическое выражение для поля излучения ультрарелятивистской частицы на частотах $\omega \gg \omega_g$.

В общем случае нахождение поля $\mathbf{E}(\omega)$ связано с вычислением трех интегралов, первые два из которых преобразуются к виду,

---

*) Увеличение частоты излучения по сравнению с ω_g происходит из-за того, чтобы на участке l своей траектории, на котором $(\theta = \pi/2)$ $1 - v_r/c \simeq 1 - v/c + v\psi^2/2c \simeq 1 - v/c$, т. е. $|\psi| \leqslant \sqrt{2}c(1 - v/c)/v$, частица наиболее сильно догоняет свое излучение, и интенсивность в точке приема при этом максимальна (с. 244). Длина $l \sim 2v\omega_g^{-1}|\psi|$, поэтому время излучения $(v \simeq c)$ $\Delta t \simeq l(1 - v/c)/c \simeq \omega_g^{-1}(1 - v/c)^{3/2}/2^{3/2} \simeq \omega_g^{-1}(mc^2/\varepsilon)^3$, а принимаемая наблюдателем частота $\omega \sim (\Delta t)^{-1} \sim \omega_g(\varepsilon/mc^2)^3$.

подобному третьему интегралу, следующим образом:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sin\omega_g t \exp(-i\eta\omega t + i\zeta\sin\omega_g t)\,dt = $$
$$= i^{-1}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(-i\eta\omega t + i\zeta\sin\omega_g t)\,dt\right\},$$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \cos\omega_g t \exp(-i\eta\omega t + i\zeta\sin\omega_g t)\,dt = $$
$$= (i\zeta)^{-1}\frac{\partial}{\partial\omega_g}\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty} t^{-1}\exp(-i\eta\omega t + i\zeta\sin\omega_g t)\,dt\right\}.$$

Для взятия этих интегралов воспользуемся известным представлением

$$\exp(i\zeta\sin\omega_g t) = \sum_{-\infty}^{\infty} J_n(\zeta)\exp(in\omega_g t), \qquad (7.1.12)$$

где $J_n(x)$ — функция Бесселя первого рода. Учитывая, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp(-ix\eta)\,d\eta = 2\pi\delta(x),$$

имеем

$$E(\omega) = \frac{e\omega}{cR}\exp(i\mathbf{kr})\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left\{\mathbf{1}_1\beta_\perp\frac{\partial J_n(\zeta)}{\partial\zeta} + \right.$$
$$\left. + i\mathbf{1}_2(\beta_\perp n_{sz} n\zeta^{-1} - \beta_\parallel n_{sy})J_n(\zeta)\right\}\delta(\eta\omega - n\omega_g). \qquad (7.1.13)$$

Таким образом, излучение заряженной частицы, совершающей винтовое движение, имеет дискретный спектр с частотами

$$\omega_n = n\frac{\omega_g}{\eta} = n\frac{\omega_g}{1-\beta_\parallel n_{sz}\sqrt{\varepsilon}} = \frac{n\omega_g}{1-\beta\sqrt{\varepsilon}\cos\alpha\cos\vartheta} \qquad (7.1.14)$$

(углы α и ϑ обозначены на рис. 7.1). Из (13), (14) ясно, что

$$\mathbf{E}(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\mathbf{E}(\omega)\exp(i\omega t)\,d\omega =$$
$$= \operatorname{Re}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{E}_n\exp\left[i\omega_n\left(t - r\sqrt{\varepsilon}c^{-1}\right)\right]; \qquad (7.1.15)$$

$$\mathbf{E}_n = \frac{2e}{cR}\frac{\omega_n}{\eta}\beta\sin\vartheta\left\{\mathbf{1}_1 J_n'(\zeta_n) + \right.$$
$$\left. + i\mathbf{1}_2\frac{\cos\alpha - \beta\sqrt{\varepsilon}\cos\vartheta}{\beta\sqrt{\varepsilon}\sin\alpha}J_n(\zeta_n)\right\}, \qquad (7.1.16)$$

$$\zeta_n = n\frac{\beta\sqrt{\varepsilon}\sin\vartheta\sin\alpha}{1-\beta\sqrt{\varepsilon}\cos\vartheta\cos\alpha}, \quad J_n'(x) = \frac{\partial J_n(x)}{\partial x}.$$

Выражения (15) и (16) полностью определяют высокочастотные поля излучения движущейся частицы в достаточно удаленной ($R \gg \lambda$) точке. Для ультрарелятивистских частиц, как указывалось, основную роль играет излучение на высоких гармониках $n \sim (\mathscr{E}/mc^2)^3$, сосредоточенное в пределах малого угла ψ. Учитывая это, положим в (16) $\alpha \simeq \vartheta$ и перейдем к асимптотическому представлению функций Бесселя первого рода при больших значениях индекса n и аргумента ζ_n [11], когда $J_n(\zeta_n)$ может быть выражена через $K_{1/3}(\zeta_n)$, а $J_n'(\zeta_n)$ — через $K_{2/3}(\zeta_n)$. Тогда

$$\mathbf{E}_n = \frac{2e\omega_g}{\sqrt{3}\,\pi cR}\frac{n}{\sin^5\vartheta}\{\mathbf{1}_1(\gamma_c^2+\psi^2)K_{2/3}(g_n) - \\ - i\mathbf{1}_2\psi(\gamma_c^2+\psi^2)^{1/2}K_{1/3}(g_n)\}, \quad (7.1.17)$$

где

$$g_n = n\frac{(\gamma_c^2+\psi^2)^{3/2}}{3\sin^3\vartheta} = \frac{\omega}{2\omega_c}\left(1+\frac{\psi^2}{\gamma_c^2}\right)^{3/2},$$

$$\gamma_c^2 = m^2c^4/\mathscr{E}^2 + \omega_{e0}^2/\omega^2, \quad \omega_c = 3\omega_g\sin\vartheta/2\gamma_c^3.$$

При переходе к (17) учтено, что для $\omega \gg \omega_{e0}$ и $\omega \gg \omega_g$ $\mathscr{E} = 1 - \omega_{e0}^2/\omega^2$. Излучение в каждом заданном направлении n, на фиксированной частоте ω, вообще говоря, эллиптически поляризовано. При этом одна ось эллипса поляризации ортогональна к оси z, вокруг которой вращается частица, а другая ориентирована вдоль проекции $\mathbf{1}_z$ на плоскость, ортогональную волновому вектору $\mathbf{k}$. Линейно поляризованные компоненты излучения направлены вдоль главных осей эллипса поляризации.

Мощность излучения релятивистской частицы и ансамбля частиц, синхротронное излучение. Обычно при рассмотрении излучения частиц вместо величин E_n используют «тензор поляризации излучения», по определению равный

$$S_{\alpha\beta}(n) = (c/8\pi)E_{n1_\alpha}E^*_{n1_\beta}, \quad \alpha,\beta = 1,2. \quad (7.1.18)$$

Соответственно средняя за период колебаний поля плотность потока энергии (вектор Пойнтинга)

$$\bar{S}(n) = (c/8\pi)|E_n|^2.$$

В области высоких гармоник спектр излучения практически непрерывен, и вместо тензора поляризации излучения на n-й гармонике можно ввести спектральную плотность тензора поляризации [9]

$$S_{\alpha\beta}(\omega) = S_{\alpha\beta}(n)\frac{dn}{d\omega} = \frac{\sin^2\vartheta}{\omega_g}S_{\alpha\beta}(n). \quad (7.1.18а)$$

Спектральная плотность потока излучения по двум главным направлениям поляризации ($\alpha=\beta=1$ и $\alpha=\beta=2$) при $v_{гр}=c$

равна

$$S_{11} = C_\omega\left(1 + \psi^2/\gamma_c^2\right)^2 K_{2/3}^2(g_\omega),$$
$$S_{22} = C_\omega\left(1 + \psi^2/\gamma_c^2\right)\left(\psi^2/\gamma_c^2\right) K_{1/3}^2(g_\omega), \tag{7.1.19}$$
$$C_\omega = \frac{3e^2\omega_g}{8\pi^3 R^2 c\gamma_c^2 \sin^2\vartheta}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)^2, \quad g_\omega = g_n.$$

Выражения (19) представляют собой величины, характеризующие потоки излучения в единицу телесного угла. Полный поток излучения получается путем интегрирования S_{11} и S_{22} по $d\widetilde{\Omega} = 2\pi \sin\vartheta\, d\vartheta$. Учитывая, что принимаемое излучение сосредоточено в малом интервале телесных углов, заменим интегрирование по $d\vartheta$ интегрированием по $d\psi$, распространив пределы интегрирования до бесконечности. Тогда вычисления сводятся к взятию интегралов [12—14]

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(1 + \frac{\psi^2}{\gamma_c^2}\right) K_{2/3}^2\left\{\frac{\omega}{2\omega_c}\left(1 + \frac{\psi^2}{\gamma_c^2}\right)^{3/2}\right\} d\psi = \frac{\pi\gamma_c\omega_c}{\sqrt{3}\,\omega}\left\{\int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(x)\,dx + K_{2/3}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)\right\},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left(1 + \frac{\psi^2}{\gamma_c^2}\right)\frac{\psi^2}{\gamma_c^2} K_{1/3}^2\left\{\frac{\omega}{2\omega_c}\left(1 + \frac{\psi^2}{\gamma_c^2}\right)\right\} d\psi = \frac{\pi\gamma_c\omega_c}{\sqrt{3}\,\omega}\left\{\int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(x)\,dx - K_{2/3}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)\right\}.$$

Поэтому мощность $P_{\alpha\alpha} = R^2 \int S_{\alpha\alpha}(\widetilde{\Omega})\, d\widetilde{\Omega}$ равна

$$\left.\begin{matrix} P_{11}(\omega) \\ P_{22}(\omega) \end{matrix}\right\} = C_1 \frac{\omega}{\omega_c}\left\{\int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(x)\,dx \pm K_{2/3}\left(\frac{\omega}{\omega_c}\right)\right\},$$
$$C_1 = \sqrt{3}\, e^2\omega_g/4\pi c\gamma_c \sin\vartheta. \tag{7.1.20}$$

(Здесь знаки $\pm$ относятся соответственно к P_{11} и P_{22}.) Выражения (20) характеризуют мощность линейно поляризованных компонент синхротронного излучения. Сумма $P(\omega) = P_{11}(\omega) + P_{22}(\omega)$, т. е. полная мощность излучения равна

$$P(\omega) = 2C_1\left[\frac{\omega}{\omega_c}\int_{\omega/\omega_c}^{\infty} K_{5/3}(x)\,dx\right] = 2C_1 F(\omega). \tag{7.1.21}$$

Очевидно, что частотный спектр излучения определяется функцией, стоящей в фигурных скобках. Она медленно растет при

низких частотах, достигает максимума при $\omega \approx 0{,}3\omega_c$ и затем резко уменьшается при $\omega \gg \omega_c$ (рис. 7.2). Поведение $P(\omega)$ по обе стороны от максимума можно аппроксимировать следующими формулами:

$$P(\omega) = 2C_1 \begin{cases} \Gamma(2/3)(4\omega/\omega_c)^{1/3}, & \omega \ll \omega_c \\ \pi^{1/2}(\omega/2\omega_c)^{1/2}\exp(-\omega/\omega_c), & \omega \gg \omega_c. \end{cases} \quad (7.1.21а)$$

Выражения для $P(\omega)$ при $\omega/\omega_c \ll 1$ получаются, если учесть, что

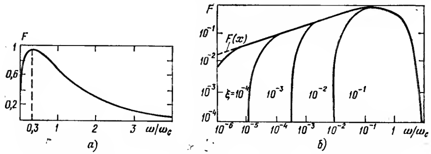

Рис. 7.2. Частотный спектр синхротронного излучения электрона: *а*) в вакууме; *б*) в плазме $\left(\xi = \dfrac{\omega_{e0}}{\omega_c}\dfrac{\mathscr{E}}{mc^2}\right)$ [13].

при малых x функция $K_\nu(x) \approx 2^{(\nu-1)}\Gamma(\nu)x^{-\nu}$, и перейти к пределу

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\int\limits_x^\infty K_{5/3}(y)\,dy}{x^{1/3}} = 2^{2/3}\Gamma(2/3).$$

В другом предельном случае $\omega/\omega_c \gg 1$ можно воспользоваться асимптотическим поведением функции

$$K_\nu(x) \approx \sqrt{\pi/2x}\,e^{-x}.$$

Из рис. 7.2, *б* и (17) можно видеть, как влияет среда на характер излучения релятивистской частицы: она приводит к депрессии излучения на частотах ω, удовлетворяющих неравенству *)

$$\omega^2 \ll \omega_{e0}^2(\mathscr{E}/mc^2)^2. \quad (7.1.22)$$

Одним из наиболее распространенных случаев излучения частиц, перемещающихся по винтовым траекториям, является циклотронное и синхротронное излучение электронов в магнитном поле. Так как частота вращения ω_g электрона при этом равна $\omega_H(mc^2/\mathscr{E})$, то все полученные выше выражения легко обобща-

*) Эффект депрессии синхротронного излучения при $\varepsilon < 1$ был отмечен Цытовичем [15]. Физическая сторона эффекта в плазме была выяснена Гинзбургом [16].

ются на случай синхротронного (циклотронного) излучения электрона, если в них заменить ω_g на $\omega_H(mc^2/\mathscr{E})$. При этом, в частности,

$$\omega_c = 3\sin\vartheta\, eHc/2\mathscr{E}\gamma_c^3$$

и в случае $\omega^2 \ll \omega_{e0}^2(\mathscr{E}/mc^2)^2$

$$\omega_c \approx (3/2)\sin\vartheta\,\omega_H(\mathscr{E}/mc^2)^2. \qquad (7.1.23)$$

Условие (22), характеризующее сильное влияние плазмы на синхротронное излучение, с учетом того, что $\omega\sim\omega_c$, удобно переписать в виде

$$\omega \lesssim \omega_s = 2\omega_{e0}^2/3\omega_H \sin\vartheta. \qquad (7.1.24)$$

В отличие от вакуума, где произведение $\mathscr{E}^2P(\omega)$ (на фиксированной частоте ω) увеличивается с ростом $\mathscr{E}$, в плазме для энергий $\mathscr{E}^2 \gg (mc^2\omega/\omega_{e0})^2$ величина $\mathscr{E}^2P(\omega)$ с увеличением $\mathscr{E}$ сначала достигает максимального значения при

$$\mathscr{E} \sim \mathscr{E}_1 = mc^2\omega_H\omega^2/\omega_{e0}^3 \qquad (7.1.22\text{a})$$

(точнее, $\mathscr{E}\approx 0{,}3\mathscr{E}_1$), а затем экспоненциально уменьшается с ростом $\mathscr{E}$. Такое поведение $\mathscr{E}^2P(\omega)$ связано с тем, что при $\mathscr{E}^2 \gg (mc^2\omega/\omega_{e0})^2$ частота ω_c, как видно из (17), начинает уменьшаться с ростом $\mathscr{E}(\omega_c\sim\mathscr{E}^{-1})$. Вследствие этого уменьшается значение нижнего предела интеграла (21) и при условии $\omega<\omega_c$, эквивалентного в таком случае условию (22а), $P(\omega)$ экспоненциально мало (21а). Отсюда ясно также, что если $\mathscr{E}>\mathscr{E}_1$, то экспоненциальное убывание $\mathscr{E}^2P(\omega)$ происходит во всей области энергий, где существенно влияние среды [17]. Уменьшение $\mathscr{E}^2P(\omega)$ на высоких энергиях делает возможной синхротронную неустойчивость в плазме [18]. Обращаясь вновь к (19), заметим, что из этого выражения следует несколько неожиданный результат: мощность, принимаемая удаленным неподвижным наблюдателем, превышает «излучаемую мощность» в $\sin^{-2}\vartheta$ раз. Действительно, если вычислить скорость потерь энергии ультрарелятивистской частицы на излучение в вакууме, то

$$P_{\text{п}} = 2e^2\omega_H^2(\mathscr{E}/mc^2)\sin^2\vartheta/3c.$$

Вместе с тем проинтегрировав (19) по всем частотам и углам, можно получить, что в ультрарелятивистском пределе полный поток энергии излучения через фиксированную поверхность

$$P = 2e^2\omega_H^2(\mathscr{E}^2/mc^2)/3c,$$

т. е. в $\sin^{-2}\vartheta$ раз больше. Различие между двумя мощностями возникает из-за того, что энергия, излучаемая в единицу времени, из-за движения частицы вперед в направлении собственного излучения увеличивается в $\sin^{-2}\vartheta$ раз. Дело в том, что работа, совершаемая излучателем в единицу времени, равна сумме полного потока энергии через некоторую поверхность и изменению

энергии поля $c^{-1}(\partial/\partial t)\left(\int S\,dV\right)$ в объеме, охватываемом этой поверхностью. В рассмотренном случае излучения частицы область пространства, расположенная между движущейся частицей и фиксированной в пространстве поверхностью, где проводятся наблюдения, все время уменьшается. Поэтому и мощность потерь $P_\text{п}$ меньше принимаемой мощности излучения [9]. Этот результат, конечно, является следствием запаздывания, обусловленного конечной скоростью распространения электромагнитного поля. Излучение частицы за время dt', соответствующее ее перемещению на расстояние dr, будет принято наблюдателем за время

$$dt = dt'\,(1 - v_\mathbf{n}/c)$$

($v_\mathbf{n}$ — проекция скорости $v_\parallel$ на направление излучения $\mathbf{n}_s$), так как момент наблюдения t связан с моментом излучения t' очевидным соотношением $t = t' + R/c$. Отсюда следует, что энергия, излучаемая за время dt' и прошедшая через единицу поверхности в точке наблюдения за время dt, равна

$$P(\omega)\,dt = P(\omega)\,(1 - v_\mathbf{n}/c)\,dt'.$$

Обозначая через $P_0(\omega)$ мощность излучения при $v_\mathbf{n}=0$, которая равна мощности, излучаемой частицей, в ультрарелятивистском пределе имеем

$$P_0(\omega) = P(\omega)\sin^2\vartheta.$$

Пусть нас интересует излучение совокупности частиц, функция распределения которых есть $f(\mathscr{E},\ \mathbf{1}_\beta = \beta/\beta,\ \mathbf{R},\ t)$. По определению, величина $f(\mathscr{E},\ \mathbf{1}_\beta,\ \mathbf{R},\ t)\,d\mathscr{E}\,d\widetilde{\Omega}\,dV$ равна числу частиц с энергиями в интервале $\mathscr{E}$, $\mathscr{E} + d\mathscr{E}$ и направлениями скорости в пределах телесного угла $d\widetilde{\Omega}$ (относительно направления $\mathbf{n}_s$), которые в момент времени t содержатся в элементе объема $dV = R^2 dR\,d\widetilde{\Omega}$. За единицу времени в рассматриваемый элемент объема попадает

$$v_\mathbf{n} f(\mathscr{E}, \mathbf{1}_\beta, \mathbf{R}, t - R/c)\,d\mathscr{E}\,d\widetilde{\Omega}\,R^2 dR\,d\Omega$$

частиц ($t = t' + R/c$ — момент времени, в который принимается излучение). Так как каждая частица излучает из рассматриваемого элемента объема энергию,

$$S(\omega)\,dt' = S_0(\omega)\,dR/v_\mathbf{n}.$$

В результате полный поток принимаемого излучения (определенной поляризации) равен

$$F'(\omega) = \int S_0(\omega)\,f(\mathscr{E}, \mathbf{1}_\beta, \mathbf{R}, t - R/c)\,R^2 dR\,d\mathscr{E}\,d\widetilde{\Omega}\,d\Omega,$$

а интенсивность излучения

$$I = dF'(\omega)/d\Omega = \int S_0(\omega)\,f(\mathscr{E}, \mathbf{1}_\beta, \mathbf{R}, t - R/c)\,R^2 dR\,d\mathscr{E}\,d\widetilde{\Omega}. \quad (7.1.25)$$

В (25) учтено, что обнаружимое излучение дают лишь те частицы, вектор скорости которых близок по направлению к волновому вектору $\mathbf{k}$, т. е. $\mathbf{1}_\beta \approx \mathbf{n}_s$. Аналогичные выражения имеют место и для всех компонент тензора $I_{\alpha\beta} = dF'_{\alpha\beta}/d\Omega$. В этом случае в (25) I заменяется на $I_{\alpha\beta}$, а S_0 — на $S_{0\alpha\beta}$. Для стационарного облака излучающих частиц

$$f(\mathscr{E},\ \mathbf{n}_s,\ \mathbf{R},\ t - R/c) = f(\mathscr{E},\ \mathbf{n}_s,\ \mathbf{R})$$

и

$$F'_{\alpha\beta} = \int S_{0\alpha\beta}(\omega)\, f(\mathscr{E}, \mathbf{n}_s, \mathbf{R})\, d\mathscr{E}\, d\widetilde{\Omega}.$$

Если же излучает нестационарная совокупность перемещающихся частиц, то наблюдаемая интенсивность определяется временной зависимостью функции распределения. В частности, для отдельного электрона, когда $f(\mathscr{E}, \mathbf{n}_s, \mathbf{R},\ t - R/c) \infty \delta(R + v_{\mathbf{n}}(t - R/c))$, в соответствии с вышеизложенным

$$F'(\omega) = P_0(\omega)\,(1 - v_{\mathbf{n}}/c)^{-1}.$$

Если же облако частиц движется как целое со скоростью $\mathbf{u}$ и проекцией в направлении наблюдателя $u_{\mathbf{n}}$, то $f(\mathscr{E},\ \mathbf{n}_s,\ \mathbf{R},\ t) = f_0(\mathscr{E},\ \mathbf{n}_s,\ \mathbf{R} - \mathbf{u}t)$, и интенсивность излучения от такого облака равна

$$I(\omega) = (1 - u_n/c)^{-1} \int S_0(\omega)\, f(\mathscr{E}, \mathbf{n}_s, \mathbf{R})\, R^2 dR\, d\mathscr{E}\, d\widetilde{\Omega},$$

где интегральное выражение характеризует мощность излучения (потери энергии частицы на излучение в единицу времени).

Коэффициент синхротронного излучения. Предположим, что мы можем ввести стационарную функцию распределения $f(\mathscr{E},\ \mathbf{n}_s,\ \mathbf{R})$. Тогда излучательная способность или коэффициент синхротронного излучения

$$a_{\alpha\alpha}(\omega) = \int P_{0\alpha\alpha}(\omega)\, f(\mathscr{E}, \mathbf{n}_s, \mathbf{R})\, d\mathscr{E}.$$

Используя (21) для полного коэффициента излучения $a(\omega) = a_{11}(\omega) + a_{22}(\omega)$ в вакууме, получаем при $f(\mathscr{E},\ \mathbf{n}_s,\ \mathbf{R}) = f(\mathscr{E})/4\pi$

$$a(\omega) = \frac{\sqrt{3}\, e^3}{8\pi^2 mc^2} H \sin\vartheta \int_0^\infty f(\mathscr{E}) \left\{ \frac{\omega}{\omega_c} \int_{\omega/\omega_c}^\infty K_{5/3}(x)\, dx \right\} d\mathscr{E}. \quad (7.1.26)$$

При степенном спектре $f(\mathscr{E}) = C_{\mathscr{E}} \mathscr{E}^{-\gamma}$ $(\gamma > 1/3)$ коэффициент синхротронного излучения [13, 14]

$$a(\omega) = (32\pi^2)^{-1} C_{\mathscr{E}} C_2(\gamma)\, (H \sin\vartheta)^{(\gamma+1)/2} \omega^{(1-\gamma)/2},$$
$$C_2(\gamma) = \sqrt{e^5 mc} \left(\frac{m^3 c^5}{3e}\right)^{-\gamma/2} \Gamma\left(\frac{3\gamma - 1}{12}\right) \Gamma\left(\frac{3\gamma + 7}{12}\right) \left(\frac{\gamma + 7/3}{\gamma + 1}\right). \quad (7.1.27)$$

Впервые зависимость между показателем энергетического спектра релятивистских электронов и частотным спектром синхро-

тронного излучения была установлена в работе Гетманцева [20]. Характер этой зависимости легко понять на основе следующих соображений. Основной вклад в синхротронное излучение вносят частицы с энергией $\mathscr{E}$, по порядку величины равной $\mathscr{E}_c \approx \approx mc^2(\omega/\omega_H)^{1/2}$. Именно при таких соотношениях между $\mathscr{E}$ и ω функция, заключенная в фигурные скобки (26), как было установлено ранее, достигает максимума. Поэтому в случае степенного характера энергетического спектра $f(\mathscr{E}) \propto \mathscr{E}^{-\gamma}$ коэффициент излучения

$$a(\omega) \propto \int f(\mathscr{E}_c)\, d\mathscr{E}_c \propto \mathscr{E}_c^{(1-\gamma)} \propto \omega^{(1-\gamma)/2}.$$

Влияние среды приводит к нарушению данной степенной зависимости $a(\omega)$ и на частотах $\omega \leqslant \omega_{e0}/2\omega_H$ обусловливает экспоненциальное убывание $a(\omega)$ с уменьшением частоты [21]:

$$a(\omega) \propto \omega^{(1-\gamma)} \exp\left(-\sqrt{3}\,\omega_{e0}^2/\omega\omega_H\right). \tag{7.1.28}$$

Реабсорбция синхротронного излучения. Для определения коэффициента поглощения синхротронного излучения удобно воспользоваться методом коэффициентов Эйнштейна [17]. Этот метод основан на представлении о квантах излучения с энергией $\hbar\omega$ и импульсом $\hbar k = \hbar k_0 n_\beta$ (n_β — показатель преломления для нормальной волны определенной поляризации). Согласно квантовой теории Эйнштейна взаимодействие поля излучения и двухуровневой системы характеризуется тремя элементарными процессами: поглощением, спонтанным и индуцированным излучением. Спонтанное излучение кванта $\hbar\omega$ связано с самопроизвольным (в отсутствие окружающего излучения) переходом квантовой системы из состояния с большей энергией $\mathscr{E} + \hbar\omega$ в состояние с энергией $\mathscr{E}$. Именно классической аналогией такого излучения является рассмотренное выше синхротронное излучение, спектральная мощность которого, согласно принципу соответствия [22], определяется соотношением

$$P(\omega, \widetilde{\Omega}) = \hbar\omega A^{\mathscr{E}}_{\mathscr{E}+\hbar\omega} \tag{7.1.29}$$

($A^{\mathscr{E}}_{\mathscr{E}+\hbar\omega}$ определяется так, чтобы $f(\mathscr{E} + \hbar\omega)\, A^{\mathscr{E}}_{\mathscr{E}+\hbar\omega} d\omega\, d\widetilde{\Omega}$ была равна числу квантов с частотами в интервале $d\omega$ и волновыми векторами в интервале телесных углов $d\widetilde{\Omega}$). Если система находится в поле излучения, то под воздействием последнего появляется возможность индуцированного перехода с уровня $\mathscr{E} + \hbar\omega$ на уровень $\mathscr{E}$ с испусканием кванта $\hbar\omega$, а также возможность обратного перехода системы в возбужденное состояние $\mathscr{E} + \hbar\omega$ при поглощении кванта $\hbar\omega$ (истинное поглощение). Индуцированное излучение и истинное поглощение характеризуются коэффициентами $B^{\mathscr{E}}_{\mathscr{E}+\hbar\omega}$ и $B^{\mathscr{E}+\hbar\omega}_{\mathscr{E}}$, которые определяются так, чтобы величины $f(\mathscr{E} + \hbar\omega)\, B^{\mathscr{E}}_{\mathscr{E}+\hbar\omega} I(\omega)\, d\omega\, d\widetilde{\Omega}$ и $f(\mathscr{E})\, B^{\mathscr{E}+\hbar\omega}_{\mathscr{E}} I(\omega)\, d\omega\, d\widetilde{\Omega}$

соответственно определяли число квантов в интервале частот $d\omega$ в элементе телесных углов $d\tilde{\Omega}$, излученных (поглощенных) в единицу времени под действием излучения со спектральной интенсивностью $I(\omega)$. Соотношение между тремя коэффициентами Эйнштейна устанавливается из условий баланса между указанными процессами в состоянии полного термодинамического равновесия

$$f(\mathscr{E}+\hbar\omega)\left\{A^{\mathscr{E}}_{\mathscr{E}+\hbar\omega}+B^{\mathscr{E}}_{\mathscr{E}+\hbar\omega}I(\omega)\right\}=f(\mathscr{E})\,B^{\mathscr{E}+\hbar\omega}_{\mathscr{E}}I(\omega).$$

Отсюда

$$-I(\omega)=\delta f\,A^{\mathscr{E}}_{\mathscr{E}+\hbar\omega}\Big/\left(\delta f\,B^{\mathscr{E}}_{\mathscr{E}+\hbar\omega}-B^{\mathscr{E}+\hbar\omega}_{\mathscr{E}}\right), \qquad (7.1.30)$$

где $\delta f=f(\mathscr{E}+\hbar\omega)/f(\mathscr{E})$ характеризует отношение «населенностей» уровней $\mathscr{E}+\hbar\omega$, $\mathscr{E}$, которое в равновесном случае определяется формулой Больцмана ($\Delta\mathscr{E}=\mathscr{E}+\hbar\omega-\mathscr{E}=\hbar\omega$)

$$\delta f=\exp\left[-(\hbar\omega/\varkappa T)\right]\approx 1-\hbar\omega/\varkappa T, \qquad \hbar\omega\ll\varkappa T. \qquad (7.1.31)$$

Как известно [23], распределение фотонов по различным квантовым состояниям с энергиями $\mathscr{E}=\hbar\omega$ (ω — собственные частоты излучения в объеме V) характеризуется функцией $[\exp(\hbar\omega/\varkappa T)-1]^{-1}$ (распределение Планка). Число собственных колебаний (нормальных мод с определенной поляризацией) с компонентами волнового вектора $\mathbf{k}$ в интервале $d\mathbf{k}$ равно $V\,d\mathbf{k}/(2\pi)^3\sim Vk^2dk\,d\tilde{\Omega}/(2\pi)^3$. Таким образом, плотность энергии излучения $w(\omega)$ в единичном интервале частот и телесных углов ($k=\omega n_\beta/c$) равна

$$\hbar\omega n_\beta^3\omega^2/(2\pi)^3c^3\left[\exp(\hbar\omega/\varkappa T)-1\right],$$

где индекс β означает номер нормальной волны. Спектральная интенсивность $I(\omega)$ по определению связана с $w(\omega)$ соотношением

$$I(\omega)=w(\omega)\,|d\omega/d\mathbf{k}|=w(\omega)v_{\text{гр}}\cos^{-1}\vartheta_{\text{гр}}$$

($\vartheta_{\text{гр}}$ — угол между векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{v}_{\text{гр}}$, который при распространении радиоволн в изотропной среде равен нулю). Поэтому в случае полного термодинамического равновесия

$$I(\omega)=\hbar n_\beta^2\omega^3/(2\pi)^3c^2\left[\exp(\hbar\omega/\varkappa T)-1\right]|\cos\vartheta_{\text{гр}}|. \qquad (7.1.32)$$

Сравнение (30) с (32) при учете (31) показывает, что

$$\begin{aligned}&B^{\mathscr{E}}_{\mathscr{E}+\hbar\omega}=B^{\mathscr{E}+\hbar\omega}_{\mathscr{E}}=B_{\mathscr{E}},\\&A^{\mathscr{E}}_{\mathscr{E}+\hbar\omega}=B_{\mathscr{E}}\,n_\beta^2\omega^3\hbar/(2\pi)^3c^2\,|\cos\vartheta_{\text{гр}}|.\end{aligned} \qquad (7.1.33)$$

Эти соотношения между коэффициентами Эйнштейна являются достаточно универсальными. Хотя они были получены нами для случая теплового равновесия между полем излучения и частица-

ми, соотношения сохраняются и в тех случаях, когда излучение и взаимодействующая с ним квантовомеханическая система перестают быть равновесными. В последнем случае, однако, величина δf уже не определяется формулой (31).

Определим коэффициент поглощения μ_β волны как (взятое с обратным знаком) относительное уменьшение интенсивности $\Delta I(\omega)/I(\omega)$ на отрезке луча единичной длины, которое вызвано переходами $\mathscr{E}+\hbar\omega \rightleftharpoons \mathscr{E}$ под действием излучения. Тогда

$$\mu_\beta = -\Delta I(\omega)/I(\omega) = \sum_{\substack{\text{по всем}\\ \text{переходам}}} \hbar\omega f(\mathscr{E}+\hbar\omega)\left[(\delta f)^{-1}-1\right] B_{\mathscr{E}} \quad (7.1.34)$$

(в полном выражении для μ_β необходимо учесть все возможные переходы в системе волна — частица). Из (34) ясно, что при $\delta f > 1$, что может, очевидно, иметь место только в неравновесном случае (см. (31)), коэффициент поглощения μ_β становится отрицательным, т. е. возникает усиление излучения.

При получении конкретных выражений для коэффициента реабсорбции синхротронного излучения учтем, что это излучение сосредоточено в малом телесном угле вдоль скорости электрона $\mathbf{v}$, а частотный спектр излучения практически непрерывен. Перейдем в (34) от функции распределения по энергиям к функции распределения по импульсам. Тогда

$$\mu_\beta = \int [f(\mathbf{p}) - f(\mathbf{p}+\hbar\mathbf{k})]\, B_{\mathscr{E}} p^2 dp\, d\widetilde{\Omega} =$$

$$= -\int \hbar\,[(\mathbf{k}\,\partial/\partial\mathbf{p})\, f(\mathbf{p})]\, B_{\mathscr{E}} p^2\, dp\, d\widetilde{\Omega}.$$

Предположим для простоты, следуя [13, 17], что распределение релятивистских электронов по импульсам изотропное, т. е. $f(\mathbf{p}) = f(p)$. Выразим с помощью (33) $B_{\mathscr{E}}$ через $A_{\mathscr{E}}$ (учитывая, что для изотропной плазмы $|\cos\vartheta_{\text{гр}}| = 1$). Тогда

$$\mu_\beta = -\left[(2\pi)^3 c^2/n_\beta^2\omega^2\right] \int \hbar k\,(\partial f/\partial p)\, p^2 \left(\int A_{\mathscr{E}} d\widetilde{\Omega}\right) dp.$$

Учтем (29) и перейдем, кроме того, от интегрирования по импульсам к интегрированию по энергиям, используя очевидные соотношения

$$f(\mathscr{E})\, d\mathscr{E} = f(p)\, p^2 dp, \quad \frac{\partial f(p)}{\partial p}\, p^2 dp = c\mathscr{E}\, \frac{\partial\left(f(\mathscr{E})/\mathscr{E}^2\right)}{\partial\mathscr{E}}.$$

В результате получим

$$\mu_\beta = -\frac{(2\pi)^3 c^2}{n_\beta\omega^2} \int_0^\infty P_\beta(\omega, \mathscr{E})\, \mathscr{E}^2 \frac{d}{d\mathscr{E}} \frac{f(\mathscr{E})}{\mathscr{E}^2}\, d\mathscr{E} =$$

$$= \frac{(2\pi)^3 c^2}{n_\beta\omega^2} \int_0^\infty \frac{d}{d\mathscr{E}} \{P_\beta(\omega, \mathscr{E})\, \mathscr{E}^2\}\, \mathscr{E}^{-2} f(\mathscr{E})\, d\mathscr{E}. \quad (7.1.35)$$

Последнее равенство следует из интегрирования (35) по частям с учетом того факта, что при $\mathscr{E}=0$ и $\mathscr{E}=\infty$ подынтегральное выражение обращается в нуль (при $\mathscr{E}\to\infty$ $f(\mathscr{E})\to 0$, а при $\mathscr{E}\to 0$ — экспоненциально убывает мощность излучения). Из (35) видно, что для $P(\omega)\mathscr{E}^2=\mathrm{const}$ коэффициент реабсорбции равен нулю. Мы уже отмечали выше, что при синхротронном излучении релятивистских частиц в вакууме $P(\omega)\mathscr{E}^2$ увеличивается с ростом $\mathscr{E}$, поэтому в этом случае $\mu_\beta>0$. Однако, если в некотором интервале энергий $d(\mathscr{E}^2P(\omega))/d\mathscr{E}<0$, что имеет место при синхротронном излучении в плазме, при соответствующем распределении электронов $f(\mathscr{E})$ может иметь место отрицательная реабсорбция, т. е. усиление синхротронного излучения. Для этого необходимо, очевидно, чтобы вклад от интеграла на участке энергий, где $\partial(\mathscr{E}^2P(\omega))/\partial\mathscr{E}<0$, был превалирующим. Согласно (22) $P(\omega)$ для фиксированной частоты ω экспоненциально убывает в области больших энергий электронов ($\mathscr{E}>\mathscr{E}_c$). Поэтому необходимым условием существования отрицательной реабсорбции является условие роста подынтегральной функции (35) с увеличением $\mathscr{E}$. Для степенного вида $f(\mathscr{E})\propto\mathscr{E}^{-\gamma}$ такое увеличение подынтегральной функции должно иметь место и в области малых $\mathscr{E}$, где влияние среды пренебрежимо мало. Воспользовавшись (21а), откуда следует, что $P(\omega)\propto\mathscr{E}^{-2/3}$ $(\omega<\omega_c)$, мы получаем

$$(d/d\mathscr{E})(P(\omega)\mathscr{E}^2)\mathscr{E}^{-2}f(\mathscr{E})\propto\mathscr{E}^{-(5/3+\gamma)}.$$

Отсюда следует, что показатель степени при $\mathscr{E}$ становится больше нуля при $\gamma<-5/3$. Из более строгих вычислений [17, 18] следует, что необходимым условием отрицательной реабсорбции синхротронного излучения релятивистских электронов, обладающих степенным спектром, является условие $\gamma<-2$. Очевидно, что в случае электронов с моноэнергетическим видом спектра с $\mathscr{E}\approx\mathscr{E}_0$ неустойчивость имеет место (22а) вблизи частоты $\omega^2\approx\omega_{0e}^3\mathscr{E}_0/\omega_H mc^2$, где $P(\omega)$ достигает максимума (21а), (22а) *).

Выражение для $\mu_\beta(\omega)$ в случае степенного вида $f(\mathscr{E})=c_0\mathscr{E}^{-\gamma}$ и в пренебрежении влиянием плазмы на излучения имеет вид [13, 17, 24]

$$\mu_\beta=c_2(H\sin\alpha)^{(\gamma+2)/2}\omega^{-(\gamma+4)/2}\propto\omega^{-(\gamma+4)/2},$$

$$c_2=\frac{\pi\sqrt{3}}{2}\frac{e^3}{m}\left(\frac{3e}{m^3c^5}\right)^{\gamma/2}c_0\Gamma\left(\frac{3\gamma+2}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3\gamma+22}{12}\right).$$

При рассмотрении синхротронного излучения мы ограничились случаем изотропной плазмы. С вопросами синхротронного излучения в магнитоактивной плазме можно ознакомиться в [22].

*) Согласно [17, 18] степень отрицательной реабсорбции достигает максимума на частоте $\omega_{max}\approx\left(0{,}24\omega_{e0}^3\mathscr{E}_0/\omega_H mc^2\right)^{1/2}$. Интервал частот, в котором $\mu_\beta<0$, примерно составляет $\pm0{,}3\,\omega_{max}$. Впервые явление отрицательной реабсорбции синхротронного излучения в плазме обнаружено Железняковым [18].

Магнитодрейфовое излучение. В неоднородном магнитном поле у заряженной частицы появляется дополнительное ускорение, вызванное, например, движением вдоль изогнутых силовых линий (п. 1.2). Релятивистская частица, двигающаяся в таком поле, также излучает, причем это излучение, получившее название магнитодрейфового, во многом напоминает синхротронное [33]. Различия обусловлены тем, что здесь роль радиуса вращения электрона в магнитном поле r_{eH} играет радиус кривизны силовой линии R_H. Поэтому основные соотношения для магнитодрейфового излучения можно получить из соответствующих формул для синхротронного излучения путем замены $r_H \to R_H$. Например, характерная частота $\omega_м$ магнитодрейфового излучения электрона следует из (20) с заменой $\omega_g = c/r_{eH}$ на $\omega_g' = c/R_H$. Поэтому в вакууме

$$\omega_м \sim cR_H^{-1}(\mathscr{E}/mc^2)^3.$$

В отличие от ω_c, которая пропорциональна $(\mathscr{E}/mc^2)^2$ ввиду релятивистской зависимости массы электрона (а, следовательно, и r_H) от его скорости. Аналогично скорость потерь энергии на излучение из-за кривизны силовых линий [17]

$$P_п = (2e^2c/3R_H^2)(\mathscr{E}/mc^2)^4$$

быстрее растет с увеличением энергии частицы $\mathscr{E}$, чем в случае синхротронного излучения. Если $R_H \gg r_{eH}$, то частота $\omega_м$ может быть существенно меньше частоты ω_c синхротронного излучения, т. е. в спектре излучения релятивистского электрона в неоднородном магнитном поле могут наблюдаться два характерных максимума.

7.2. Излучение электромагнитных волн в магнитоактивной плазме. Циклотронное и черенковское излучения

Общие соотношения. Поле излучения на больших расстояниях от источника. Для точечного гармонического источника тока $\mathbf{j} \propto \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0)$ выражение для поля излучения в магнитоактивной плазме полностью определяется интегралами по $\mathbf{k}$ в (7.1.5). Будем обозначать эти интегралы через $E_{T_j}(\mathbf{R})$. В случае магнитоактивной плазмы в системе координат с осью z, направленной вдоль $\mathbf{h}$ (рис. 7.1) в тензоре ε_{ij} отличны от нуля компоненты $\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{yy} = \varepsilon_1$, $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_3$ и $\varepsilon_{xy} = -\varepsilon_{yx} = i\varepsilon_2$, где в пренебрежении пространственной дисперсией

$$\varepsilon_1 = 1 - \sum_{s=e,i} \omega_{s0}^2/(\omega^2 - \omega_{sH}^2), \quad \varepsilon_2 = -\sum_s \omega_{sH}\omega_{s0}^2/\omega(\omega^2 - \omega_{sH}^2),$$

$$\omega_{iH} = -\Omega_H,$$

а $\varepsilon_3 = \varepsilon_1(\omega_{sH} = 0)$. Дисперсионное уравнение однородной системы $L_{ij}E_j(\omega, \mathbf{k}) = 0$, определяемое равенством нулю детерминанта

матрицы L_{ij}, имеет вид

$$D(\omega, k) = -k_0^2\{\varepsilon_3 k_z^4 + (\varepsilon_1+\varepsilon_3)k_\perp^2 k_z^2 - 2\varepsilon_1\varepsilon_3 k_0^2 k_z^2 + \varepsilon_1 k_\perp^4 - \\ -(\varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_1^2 - \varepsilon_2^2)k_0^2 k_\perp^2 + k_0^4\varepsilon_3(\varepsilon_1^2-\varepsilon_2^2)\} = 0 \qquad (7.2.1)$$

$(k_\perp^2 = k_x^2 + k_y^2)$. Это уравнение, определяющее дисперсионные соотношения $\omega = \omega(k_z, k_\perp)$ для плоских монохроматических волн в однородной магнитоактивной плазме, может рассматриваться как уравнение относительно $k_z^2(\omega, k_\perp^2)$. Оно определяет поверхность волновых векторов в $\mathbf{k}$-пространстве, для которых возможно излучение распространяющихся волн. Направление (среднего за период) потока энергии для каждой возбуждаемой волны определяется направлением $\mathbf{v}_{\text{гр}} = d\omega/d\mathbf{k}$, которая ортогональна поверхности волновых векторов. Уравнение относительно k_z^2 имеет два корня:

$$k_{z1,2}^2 = k_0^2\varepsilon_1 - \frac{k_\perp^2(1+\varepsilon_1/\varepsilon_3)}{2} \pm \\ \pm \{(k_\perp^4/4)(1-\varepsilon_1/\varepsilon_3)^2 - k_0^2\varepsilon_2^2(k_\perp^2/\varepsilon_3 - k_0^2)\}^{1/2}, \qquad (7.2.2)$$

которые соответствуют двум нормальным волнам в плазме с показателями преломления $n_{1,2}^2$ *). Поэтому $D(\omega, \mathbf{k})$ в (1) может быть представлено в виде $D(\omega, \mathbf{k}) = k_0^2\varepsilon_3(k_z^2 - k_{z1}^2)(k_z^2 - k_{z2}^2)$. Учитывая тождество

$$(k_z^2 - k_{z1}^2)^{-1}(k_z^2 - k_{z2}^2)^{-1} = (k_{z1}^2 - k_{z2}^2)^{-1}\left[(k_z^2 - k_{z2}^2)^{-1} - (k_z^2 - k_{z1}^2)^{-1}\right],$$

интеграл по $\mathbf{k}$ (7.1.5) удобно разбить на два, которые соответствуют двум нормальным волнам:

$$E_{T_i} = \sum_{\beta=1}^{2} \frac{(-1)^\beta}{k_0^2\varepsilon_3} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{T_{ij}(\omega, k)\exp(-i\mathbf{kR})}{(k_{z_1}^2 - k_{z2}^2)(k_z^2 - k_{z\beta}^2)}\, d\mathbf{k}_\perp dk_z \qquad (7.2.3)$$

($\beta = 2$ соответствует необыкновенной волне). Рассмотрим область вне источников. Выполним в (3) интегрирование по k_z, учитывая вычеты в полюсах $k_z = k_{z1}$ и $k_z = k_{z2}$ $(k_{z1} \neq k_{z2})$. При нахождении k_{z1} и k_{z2} считаем $\operatorname{Im}(k_{z1}, k_{z2}) < 0$. Тогда в (3) k_z необходимо заменить на $k_{z1,2}$, а интегралы (3) по $\mathbf{k}_\perp$ умножить на πi. Введем углы α и α', которые составляют векторы $\mathbf{k}$ и $\mathbf{R}$ с осью z, а также полярные координаты $k_\perp$, φ ($k_x = k_\perp \sin\varphi$ и $k_y = k_\perp\cos\varphi$). Располагая без ограничения общности вектор $\mathbf{R}$ в плоскости zy

---

*) Нормальная волна, для которой $n^2(\alpha = \pi/2) = \varepsilon_3$, называется обыкновенной, а волна, для которой $n^2(\alpha = \pi/2) = (\varepsilon_1^2 - \varepsilon_3^2)/\varepsilon_1$, —необыкновенной. В некоторых случаях (4) удобно рассматривать как уравнение относительно $k_\perp^2$.

и учитывая, что $k_{1,2}=k_0n_{1,2}$, $k_{z1,2}=k_0n_{1,2}(\alpha)\cos\alpha$, $k_{\perp 1,2}= = k_0n_{1,2}(\alpha)\sin\alpha$, имеем

$$\psi=(\mathbf{k}_{1,2}\mathbf{R})=k_0Rf_{1,2}(\alpha,\ \varphi),$$

$$f_{1,2}(\alpha,\ \varphi)=n_{1,2}(\alpha)(\cos\alpha\cos\alpha'+\sin\alpha\sin\alpha'\cos\varphi),$$

$$E_{T_i}=\frac{\pi i}{k_0^2\varepsilon_3}\sum_{\beta=1,2}(-1)^\beta\int\limits_0^\infty\frac{k_\perp dk_\perp d\varphi\, T_{ij}(k_z,\ k_\perp,\ \varphi)\exp\left[ik_0R+f(\alpha,\ \varphi)\right]}{k_{z\beta}\{\ldots\}^{1/2}}, \tag{7.2.4}$$

где через $\{\ldots\}$ обозначено подкоренное выражение в (2). В (3) удобно перейти к интегрированию по переменной α с помощью замены

$$k_\perp dk_\perp=k_0^2n_{1,2}(\alpha)\left\{\frac{\partial n_{1,2}(\alpha)}{\partial\alpha}\sin\alpha+n_{1,2}(\alpha)\cos\alpha\right\}\sin\alpha\, d\alpha. \tag{7.2.5}$$

На больших расстояниях от источника волн интеграл по α и φ можно взять методом перевала [25]. Точка перевала $\alpha=\alpha_0$, $\varphi=\varphi_0$ находится из условия $\partial\psi/\partial\alpha=\partial\psi/\partial\varphi=0$. Как легко убедиться, одна из них (которую будем считать единственной) определяется условиями $\cos\varphi_0=1$ и $\operatorname{tg}(\alpha_0-\alpha')=n^{-1}\partial n/\partial\alpha$. Поскольку в магнитоактивной плазме $n^{-1}\partial n/\partial\alpha=\operatorname{tg}\vartheta_{\text{гр}}$, $\vartheta_{\text{гр}}=\widehat{\mathbf{v}_{\text{гр}}\mathbf{k}}$, то $(\alpha_0-\alpha')$ должно равняться $\vartheta_{\text{гр}}$; кроме того, α_0 является вещественной величиной. Представляя

$$\Psi_{1,2}(\alpha,\ \varphi)\simeq\Psi(\alpha_0,\ \varphi_0=0)+\frac{1}{2}\Psi''_\alpha(\alpha-\alpha_0)^2+\frac{1}{2}\Psi''_\varphi\varphi^2,$$

$$\Psi''_\alpha=\left.\frac{\partial^2\Psi}{\partial\alpha^2}\right|_{\alpha=\alpha_0,\ \varphi_0=0},\quad \Psi''_\varphi=\left.\frac{\partial^2\Psi}{\partial\varphi^2}\right|_{\alpha=\alpha_0,\ \varphi_0=0},$$

вынесем медленно изменяющиеся функции за знак интеграла (4), заменив их значениями при $\alpha=\alpha_0$ и $\varphi_0=0$. Учитывая тот факт, что при $kR\gg1$ интеграл от оставшейся функции $\exp\left\{i\left[\Psi''_\alpha(\alpha-\alpha_0)^2+\Psi''_\varphi\varphi^2\right]/2\right\}$ быстро убывает с ростом α и φ, распространим пределы интегрирования до бесконечности. Интегралы по α и φ равны $2\pi/\left(\Psi''_\alpha\Psi''_\varphi\right)_0^{1/2}$, поэтому (индекс 0 означает, что значения берутся в точке $\alpha=\alpha_0$, $\varphi=\varphi_0=0$),

$$E_{T_i}=\frac{2\pi^2 i}{k_0^4R}\sum_{\beta=1,2}(-1)^\beta(T_{ij})_0A_\beta(\alpha_0,\ \varphi_0)\exp\left[-ik_0n_\beta(\alpha_0)R\right],$$

$$A_\beta=\frac{\cos\alpha'\sqrt{n_0\sin\alpha_0}\cos^{-1}\alpha_0\cos^{-1}\vartheta_{\text{гр}}}{\sin^{1/2}\alpha\left[\left(n''_0-n_0\right)\cos\vartheta_{\text{гр}}-2n'_0\sin\vartheta_{\text{гр}}\right](\ldots)_0^{1/2}}, \tag{7.2.6}$$

где $(\ldots)_0^{1/2}=\left[(\varepsilon_1-\varepsilon_3)^3n_{\beta0}^4\ \sin^4\alpha_0-4\varepsilon_2\varepsilon_3\ \left(n_{\beta0}^2\ \sin^2\alpha_0-\varepsilon_3\right)\right]^{1/2}$. Обычно с помощью (6) вычисляют одну из компонент $E_\text{т}$ (например, $E_{\text{т}z}$), находя остальные компоненты с помощью соотношений между E_x, E_y и E_z (п. 3.3).

Заметим, что в общем случае решение уравнений (1), (2) получить в аналитическом виде не всегда удается. В магнитоактив-

ной плазме, в частности, в свистовом диапазоне, для (3) может существовать несколько точек перевала (стационарной фазы), вклады от которых соответствуют различным лучам, приходящим в точку наблюдения. Поле излучения тогда необходимо представлять суммой выражений типа (6), вычисленных для каждой точки α_{i0}. Поэтому даже для одной нормальной волны (в свистовом диапазоне распространяющейся является необыкновенная волна — гл. 3) волновые векторы и поляризации лучей могут быть различными. Проведенный выше анализ справедлив в том случае, если поверхности волновых нормалей не имеют точек перегиба по α и являются «замкнутыми», ибо показатель преломления одной из нормальных волн может обращаться в бесконечность. Последнее соответствует, например, излучению плазменных волн. В этих случаях необходим более специальный анализ (см. [1—6]).

Поле излучения элементарного электрического диполя. Введем электрический дипольный момент

$$\mathbf{P} = (i\omega)^{-1} \int \mathbf{j}\, d\mathbf{r}'.$$

Считая изменение E_{T_i} на масштабе диполя малым (размер диполя много меньше длины волны), из (1) и (6) для E_z получаем

$$E_z = k_0^4 A_\beta a_{zj} P_j \exp\left[ik_0 n_\beta(\alpha_0) R\right]/k_0 R, \tag{7.2.7}$$

где

$$a'_{zx} = a'^{*}_{xz} = n_{\beta 0}^2 \sin\alpha_0 \cos\alpha_0 \left[\left(n_{\beta 0}^2 - \varepsilon_1\right)\cos\varphi - i\varepsilon_2 \sin\varphi\right],$$
$$a'_{zy} = a'^{*}_{yz} = n_{\beta 0}^2 \sin\alpha_0 \cos\alpha_0 \left[\left(n_{\beta 0}^2 - \varepsilon_1\right)\sin\varphi - i\varepsilon_2 \cos\varphi\right],$$
$$a_{zz} = \left(n_{\beta 0}^2 \cos\alpha_0 - \varepsilon_1\right)\left(n_{\beta 0}^2 - \varepsilon_1\right) - \varepsilon_2^2.$$

Циклотронное излучение. Выражения для циклотронного излучения слаборелятивистской частицы в вакууме или достаточно разреженной плазме при $\omega_H \ll \omega$ легко получить из (1.13)—(1.16), если умножить (1.15) на $cR^2/2\pi$ и учесть (1.18). Так, для суммарной мощности $P(\Omega) = P_{11}(\Omega) + P_{22}(\Omega)$ излучения в единицу телесного угла имеем

$$P(\Omega) = \frac{\varepsilon e^2\omega^2\left[\beta_\perp^2 J_n'^2(\zeta) + (\varepsilon\sin^2\alpha)^{-1}\left(\cos\alpha - \sqrt{\varepsilon}\beta_\parallel\right)^2 J_n^2(\zeta)\right]}{2\pi c\left(1 - \beta_\parallel\sqrt{\varepsilon}\cos\alpha\right)}, \tag{7.2.8}$$

где ω и ζ определяются (1.14), (1.16), а $J_n'(x) = \partial(J_n(x))/\partial x$. При движении электрона по окружности ($\beta_\parallel = 0$) в вакууме из (8) следует известная формула Шотта

$$P(\Omega) = (e^2\omega^2/2\pi c)\left[\beta^2 J_n'^2(\zeta) + \operatorname{ctg}^2\alpha\, J_n^2(\zeta)\right]$$

($\omega = n\omega_H\sqrt{1-\beta^2}$, $\zeta = n\beta\sin\alpha$). Если энергия электрона такова, что электрон является нерелятивистским, функции Бесселя в (8) можно представить в виде их асимптотического представления в ряд по малому аргументу [11] и ограничиться первым членом

разложения $(J_n(x) \simeq (x/2)^n/(n!))$. Тогда для мощности излучения электрона получаем

$$P(\Omega) = 2^{-2n} e^2 \omega_H^2 \beta_\perp^4 (\pi c)^{-1} n^4 (n!)^{-2} (n\beta_\perp \sin\alpha)^{2n-2} \qquad (7.2.9)$$

или после интегрирования по телесному углу

$$P = 2e^2\omega_H^2 \beta_\perp^{2n} n^{2n+1} (n+1)/c\,(2n+1)!$$

$(n\beta \ll 1,\ 1-\beta^2 \to 1)$. Отсюда следует, что спектр состоит из ряда дискретных линий, интенсивность излучения в которых убывает по закону

$$P(\omega_{n+1})/P(\omega_n) \propto \beta_\perp^2,$$

а интервал между ними примерно равен ω_H. Если энергия электрона такова, что излучением на всех гармониках, кроме основной $(n=1)$, можно пренебречь, то

$$\int P(\omega \approx \omega_H, \Omega)\, d\omega \approx e^2\omega^2\beta_\perp^2 (1+\cos^2\alpha)/2\pi c.$$

Заметим, что мощность излучения в единичный телесный угол вдоль направления $\mathbf{h}$ в два раза больше, чем в перпендикулярном направлении *). Структуру выражения для поля излучения движущегося по винтовой траектории электрона в магнитоактивной плазме при $\omega \gg \Omega_H$ и $\omega \gg \omega_{i0}$ легко установить из (1.9) и (1.13), если учесть, что в фигурных скобках (1.13) фактически стоит $-e_x\{J_n'(\xi) + i[(e_y/e_x)\,n\beta_\perp\xi^{-1} - (e_z/e_x)\,\beta_\parallel]J_n(\xi)\}$, $e_i = E_i/|\mathbf{E}|$. Если ввести коэффициенты поляризации

$$E_y/E_x = -ig_\beta, \quad E_z/E_x = iG_\beta \quad (e_x^2 = (1+K_\beta^2)^{-1}),$$

$$G_\beta = \Gamma_\beta\cos\alpha - K_\beta\sin\alpha, \quad g_\beta = K_\beta\cos\alpha + \Gamma_\beta\sin\alpha,$$

$$K_\beta = C/B^2 - \tilde{n}^2 = -2\sqrt{u_e}\,\times$$
$$\times (1-v_e)\cos\alpha\,\big(u_e\sin^2\alpha \mp (u_e^2\sin^4\alpha + 4u_e(1-v_e)^2\cos^2\alpha)^{1/2}\big)^{-1},$$
$$\Gamma_\beta = \big(-v_e\sqrt{u_e}\sin\alpha +$$
$$+ K_\beta u_e v_e \sin\alpha\cos\alpha\big)(1-u_e-v_e+u_e v_e\cos^2\alpha)^{-1}, \quad \beta = 1, 2.$$

(Здесь $\omega \gg \Omega_H$, $\omega \gg \omega_{i0}$) и при интегрировании в (1.15) по частотам учесть существенную при $\omega \sim \omega_{e0}$ зависимость η от ω (что приведет к замене в (1.16) множителя η^{-1} на $(\eta + \omega\,\partial\eta/\partial\omega)^{-1}$), то можно прийти к следующему выражению для спектральной мощности излучения в единицу телесного угла:

$$P_\beta(\omega) = \frac{n_\beta e^2\omega^2\left[\beta_\perp J_n'(\zeta) + \left(g_\beta n\beta_\perp\zeta^{-1} + G_\beta\beta_\parallel\right)J_n(\zeta)\right]^2}{2\pi c\left(1+K_\beta^2\right)\left|1-\beta_\parallel\cos\alpha\,(n_\beta + \omega\,\partial n_\beta/\partial\omega)\right|}. \qquad (7.2.10)$$

Это выражение впервые было получено в работе Эйдмана [26].

*) При $\alpha = 0$ излучаемая волна имеет круговую поляризацию, а при $\alpha = \pi/2$ волна линейно поляризована, причем электрический вектор образует прямой угол с $\mathbf{h}$. В случае $0 < \alpha < \pi/2$ излучение эллиптически поляризовано.

Отсюда, полагая

$$\beta^2 \ll 1,\ n_\beta \beta_\parallel \ll 1,\ |\beta_\parallel \omega\, \partial n_\beta/\partial\omega| \ll 1,\ |n n_\beta \beta_\perp \sin\alpha| \ll 1 \quad (7.2.11)$$

и используя первый член разложения функций Бесселя для $\omega \approx n\omega_H$, имеем [27] *)

$$P(\Omega) \sim \frac{e^2\omega_H^2 n^4 \beta_\perp^2}{2^{2n+1}\pi c\left(1+K_\beta^2\right)(n!)^2}\, n_\beta (1+g_\beta)^2 (n n_\beta \beta_\perp \sin\alpha)^{2n-2}. \quad (7.2.12)$$

На первой гармонике $(1+g_\beta)_{\omega=\omega_H}=0$, поэтому для $n=1$ фактор

$$1+g_\beta+n_\beta G_\beta \beta_\parallel \sin\alpha \approx \beta_\parallel \cos\alpha\,[n_\beta(\omega\,\partial g_\beta/\partial\omega + G_\beta \operatorname{tg}\alpha)]_{\omega=\omega_H}$$

и мощность циклотронного излучения при $\omega \approx \omega_H$ равна [17]

$$P_\beta(\Omega) = e^2\omega_H^2 \beta_\perp^2 \beta_\parallel^2 \cos^2\alpha [n_\beta(\omega\,\partial g_\beta/\partial\omega + G_\beta \operatorname{tg}\alpha)]^2_{\omega=\omega_H}/8\pi c. \quad (7.2.13)$$

В (13) $\omega \approx n\omega_H(1+n_\beta\beta_\parallel\cos\alpha)$, что следует из (1.14) при $|2n_\beta\beta_\parallel\cos\alpha| \gg 1$. Благодаря малому фактору $\beta_\parallel^2$ в выражении для мощности на первой гармонике отношение $P(2\omega_H,\Omega)/P(\omega_H,\Omega) \sim \sim \beta_\perp^2/\beta_\parallel^2$, т. е. при $\beta_\parallel > \beta_\perp$ в магнитоактивной плотной плазме имеет место эффект депрессии первой гармоники циклотронного излучения. Этот эффект отсутствует, однако, в вакуумном приближении ($\omega_{e0} \to 0$) и при продольном распространении ($\alpha = 0$), когда $(1+g_\beta)_{\omega=\omega_H}$ не обращается в нуль **). В достаточно разреженной плазме $P_\beta(\omega,\Omega)$ отличается от соответствующего выражения (9) множителем $(1+K_\beta\cos\alpha)^2/(1+K_\beta^2)$. В направлении $\alpha=0$, как видно из (9), волна излучается только на первой гармонике (волна необыкновенной поляризации). Под $\alpha \neq 0$ излучаются волны обоих типов, принадлежащие всем гармоникам, хотя необыкновенные волны излучаются электроном (отрицательно заряженной частицей) более эффективно. При $\alpha=\pi/2$ волна линейно поляризована, причем электрический вектор образует прямой угол с $\mathbf{h}$ (необыкновенная волна).

Черенковское излучение плазменных волн в изотропной плазме. Вычислим полную мощность излучения плазменных волн прямолинейно движущегося заряда. Эту мощность можно определить как приращение энергии излучаемых волн в единицу

---

*) При переходе к (12) было принято, что $1+g_\beta+n_\beta G_\beta\beta_\parallel\sin\alpha \approx \approx (1+g_\beta)_{\omega=n\omega_H}$. Это вполне допустимо на гармониках $n \geqslant 2$, если исключить случай поперечного ($\alpha \to \pi/2$) распространения обыкновенных волн [17]. Условие $|n n_{\beta_1}\beta_\perp \sin\alpha| = |\omega n_\beta \beta_\perp \sin\alpha/\omega_H| \ll 1$ эквивалентно условию $kr_{eH} = kv_\perp/\omega_H \ll 1$, т. е. условию дипольного излучения.

**) Поэтому переход к вакуумному приближению и к $\alpha=0$ нетривиален и может быть сделан лишь при учете тепловых поправок в тензоре ε_{ij}. По этой же причине выражение (10) справедливо только для электронов с $\beta > \beta_T = v_{T_e}/c$, так как при $\beta_\parallel \sim \beta_T$ тепловые поправки к коэффициентам поляризации нормальных волн становятся существенными (подробнее см. в [17]).

времени:

$$P = -2^{-1}\,\mathrm{Re}\int \mathbf{E}(r',\,t)\,\mathbf{j}^*(\mathbf{r}',\,t)\,d\mathbf{r}'. \qquad (7.2.14)$$

В изотропной плазме тензор L_{ij} удобно представить в виде

$$L_{ij}(\omega,\,k) = k_0^2\,(k_ik_j/k^2)\,\varepsilon_l + (\delta_{ij} - k_ik_j/k^2)\left(k_0^2\varepsilon_{tr} - k^2\right),$$

где $\varepsilon_l(\omega,\,k)$ и $\varepsilon_{tr}(\omega,\,k)$ — соответственно продольная и поперечная диэлектрическая проницаемости. Тогда вместе с (1.2) следует, что поле $E_l = \mathbf{E}\mathbf{k}/k$ продольных волн

$$E_l(\omega,\,k) = 4\pi i j_l(\omega,\,k)/\omega\varepsilon_l(\omega,\,k), \qquad j_l = \mathbf{j}\mathbf{k}/k, \qquad (7.2.15)$$

а $\mathbf{j}(\omega,\,k) = (2\pi)^{-3}e\mathbf{v}\delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})$ в случае движущегося одиночного заряда. Отсюда видно, что при $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}$ возможно излучение волн, которое получило название *черенковского излучения* (эффект Вавилова — Черенкова). Перейдем в (14) к фурье-компонентам $\mathbf{E}(\omega,\,k)$ и $\mathbf{j}^*(\omega,\,k)$ и, используя (15), проведем интегрирование по $d\mathbf{r}$, $d\mathbf{k}'$ и $d\omega'$. Кроме того, учтем, что $\varepsilon_l \approx 1 - \omega_{e0}^2/\omega^2 \simeq$ $\approx 2\,(\omega - \omega_{e0})/\omega$, $\omega \sim \omega_{e0}$. Поскольку основной вклад в (14) будут вносить области частот, где ε_l близка к нулю, положим $\mathrm{Im}\,(1/\varepsilon_l) \approx \pi\delta(\omega - \omega_{e0})\omega/2$. Тогда интеграл по $d\mathbf{k} = 2\pi k^2 dk \sin\vartheta\,d\vartheta$ равен ($v \approx \omega_{e0}/k\cos\vartheta$)

$$P = e^2\omega_{e0}^2 \int\limits_{k_1}^{k_2} dk \int\limits_{-1}^{1} d(\cos\vartheta)\,\delta(\omega_{e0} - kv\cos\vartheta),$$

где k_1 и k_2 — минимальное и максимальное волновые числа возбуждаемых волн. Очевидно, что k_2 должно быть порядка ω_{e0}/v_{T_e} (где становится существенным затухание Ландау), а $k_1 \sim \omega_{e0}/v$. Таким образом, [28]

$$P \approx e^2\omega_{e0}^2 \ln\left(v/v_{T_e}\right) v^{-1}. \qquad (7.2.16)$$

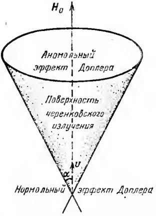

Рис. 7.3. Области черенковского излучения и нормального и аномального эффектов Доплера.

В присутствии постоянного магнитного поля характер излучения заряженных частиц усложняется, однако критерий черенковского излучения $\omega = \mathbf{k}\mathbf{v}$ останется прежним.

На квантовом языке излучение электрона (в том числе на гармониках гирочастоты) связано с его переходом из состояния с энергией $\mathscr{E}_2 = \sqrt{m^2c^4 + p_2^2c^2}$ и импульсом $\mathbf{p}_2$ в состояние с энергией $\mathscr{E}_1 = \sqrt{m^2c^4 + p_1^2c^2}$ и $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1$ (п. 1). При этом

$$\mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1 = \hbar\omega,$$
$$p_{2\parallel} - p_{1\parallel} = \hbar\omega n_\beta \cos\alpha/c. \qquad (7.2.17)$$

Пусть $p_\| = p$, т. е. электрон движется прямолинейно вдоль оси z (рис. 7.1). Тогда из (17) в предположении, что $\Delta p = p_2 - p_1 \ll p$, имеем ($\hbar\omega \ll mc^2$)

$$\omega = \mathbf{pk}c^2/\mathscr{E} = \beta\omega n_\beta(\omega)\cos\alpha. \qquad (7.2.18)$$

Таким образом, при условии $\beta n_\beta \cos\alpha = 1$ возможно излучение волн равномерно и прямолинейно движущимся электроном (эффект Вавилова — Черенкова). Условие (18) определяет поверхность волновых векторов излучаемых электроном волн — «черенковский конус» с осью вдоль $\mathbf{p}$ и углом 2α при его вершине (рис. 7.3). Очевидно, что в изотропной плазме черенковское излучение электромагнитных волн, для которых $n_\beta(\omega) < 1$, невозможно. Однако черенковское излучение плазменных волн может осуществляться даже нерелятивистским электроном, так как на частотах, не слишком близких к ω_{e0}, показатель преломления плазменных волн может существенно превышать единицу *). В магнитоактивной плазме наряду с плазменными волнами таким электроном могут излучаться и электромагнитные волны. Излучение, естественно, происходит на тех участках дисперсионных кривых, для которых $n_\beta^2 > 1$ (гл. 3). Последнее преимущественно имеет место на частотах $\omega < \omega_H$, при этом в интервале $0 < v < 1$ могут излучаться необыкновенные волны, а в области $v > 1$ — «свисты».

Если электрон совершает винтовое движение, т. е. $p_\perp \neq 0$, из (17) следует [29], что

$$\begin{gathered}\hbar\omega = B_1\left(1 \pm \sqrt{1 + B_2}\right),\\ B_1 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}\,\frac{n_\beta\beta_\|\cos\alpha - 1}{n_\beta^2\cos^2\alpha - 1},\\ B_2 = \frac{n_\beta^2\cos^2\alpha - 1}{(n_\beta\beta_\|\cos\alpha - 1)^2}\,\frac{1-\beta^2}{m^2c^2}\left(p_{2\perp}^2 - p_{1\perp}^2\right).\end{gathered} \qquad (7.2.19)$$

Для $n_\beta\beta_\|\cos\alpha$, не слишком близком к единице, так что $B_2 \ll 1$, из (19), выбирая отрицательный знак перед корнем, получаем, что излучение волн возможно при условии

$$\omega = \sqrt{1-\beta^2}\left(p_{2\perp}^2 - p_{1\perp}^2\right)/2\hbar m\,(1 - n_\beta\beta_\|\cos\alpha). \qquad (7.2.20)$$

Квадрат поперечного импульса $p_\perp^2$ в случае движения электрона в магнитном поле принимает квантованные значения $\mathbf{p}_{n\perp}/2m =$

*) Условие (18) можно переписать в виде $v\cos\alpha = v_ф$. Отсюда ясно, что если фазовая скорость плазменных волн будет несколько превышать скорость электрона, то он будет поглощать эти волны, переходя в состояние с большей энергией. Именно этим механизмом объясняется затухание Ландау плазменных волн тепловыми электронами плазмы, которое обсуждалось в гл. 2. Так как затухание Ландау становится малым при $v_ф \gg v_{T_e}$, то в спектре черенковского излучения электрона могут присутствовать только плазменные волны с $v_{T_e} < v_ф < v$ и для них $v_{T_e}/v < \cos\alpha < 1$.

$= (n + 1/2)\hbar\omega$ [30]. Поэтому $(p_{2\perp}^2 - p_{1\perp}^2)/2m = \hbar\omega_H n$ (n равно разнице между номерами уровней в состояниях $\mathscr{E}_2$ и $\mathscr{E}_1$). Тогда вместо (20) получаем

$$\omega = n\omega_H \sqrt{1-\beta^2}/(1 - n_\beta \beta_\parallel \cos\alpha). \qquad (7.2.20a)$$

Соотношение (20а) представляет собой релятивистскую формулу Доплера и при $n_\beta = n_\beta(\omega)$ может рассматриваться как уравнение относительно частоты ω. Однако частота ω в (20а) определяет энергию фотона и является величиной сугубо положительной. С учетом сказанного из (20а) легко установить характер влияния плазмы на излучение электрона. При $n = 0$ из (20а) следует условие черенковского излучения электрона в плазме. Если $n_\beta \beta \cos\alpha < 1$, то подобно вакуумному случаю излучение электрона происходит за счет уменьшения его поперечного импульса. Однако, если $n_\beta \beta_\parallel \cos\alpha > 1$, излучение электрона, согласно (20а), возможно только при $n < 0$ (область углов, для которых $\cos\alpha > 1/\beta_\parallel n_\beta$, обозначена на рис. 7.3 и носит название области аномального эффекта Доплера). В такой ситуации излучение возникает при переходе электрона из состояния с меньшим поперечным импульсом $p_\perp$ в состояние с большим его значением. Необходимая для этого энергия черпается из кинетической энергии поступательного движения электрона. В изотропной плазме мощность излучения в единицу телесного угла в области аномального эффекта Доплера не превышает величины $P(\omega, \Omega)$ при $\beta_\parallel n_\beta \cos\alpha < 1$. Учитывая, что при $\beta_\parallel n_\beta < \infty$ угол α всегда является острым (рис. 7.3), можно заключить, что в суммарное по всем α излучение основной вклад должна вносить область нормального эффекта Доплера, т. е. при циклотронном излучении электрона в плазме его поперечный импульс будет уменьшаться. Однако при излучении электрона в анизотропной среде может иметь место увеличение его поперечного импульса за счет преимущественного излучения в области аномального эффекта Доплера [8].

Коэффициенты циклотронного излучения и поглощения. По определению мощность $P_\beta(\widetilde{\Omega})$ излучения (9), (12), (13) отдельной частицы на $\omega \simeq n\omega_H$, проинтегрированная по всем импульсам с учетом функции распределения частиц $f(p_\parallel, p_\perp)$, есть коэффициент излучения в интервале излучаемых частот, т. е.

$$\int a_\beta(\omega)\, d\omega = \int P_\beta(\widetilde{\Omega})\, f(p_\parallel, p_\perp)\, p_\perp dp_\perp dp_\parallel d\widetilde{\varphi}, \quad \mathbf{p}_\perp = \mathbf{p}_\perp(p_\perp, \widetilde{\varphi}).$$

Продольные скорости, в силу эффекта Доплера, обусловливают ширину частотной полосы излучения на гармониках гирочастоты ($\omega \approx n\omega_H(1 + n_\beta\beta_\parallel \cos\alpha)$). Поэтому $f(p_\parallel, p_\perp)$ можно представить как $f(\omega, p_\perp)|\partial p_\parallel/\partial\omega|d\omega$ ($|\partial p_\parallel/\partial\omega| \approx mc/\omega n_\beta|\cos\alpha|$),

$$a_\beta(\omega) = 2\pi \int_0^\infty P_\beta(\widetilde{\Omega})\, f(\omega, p_\perp) \left|\frac{\partial p_\parallel}{\partial\omega}\right| p_\perp dp_\perp.$$

Для максвелловской функции распределения (2.1.16) с $p^2 = p_\parallel^2 + p_\perp^2$ нахождение $a_\beta(\omega)$ связано с взятием интегралов типа

$$\int_0^\infty x^n e^{-ax} dx = (-1)^n \frac{\partial}{\partial a^n} \int_0^\infty e^{-ax} dx = n!\,(a)^{-(n+1)}.$$

Тогда с помощью (12) при $\omega \approx n\omega_H$ $(n \geqslant 2)$ имеем

$$a_\beta(\omega) = \frac{cn!\,2^n v_{T_e}^{-1} N}{\omega n_\beta |\cos\alpha| \sqrt{2\pi}} P_\beta(\tilde{\Omega}) \exp\left\{-\frac{(\omega - n\omega_H)^2}{2k_\parallel^2 v_{T_e}^2}\right\}, \quad (7.2.21)$$

где $k_\parallel = \omega n_\beta \cos\alpha/c$, а $P_\beta(\tilde{\Omega})$ определяется формулами (9), (12), (13). Коэффициент поглощения в равновесных условиях легко найти на основе соотношения Кирхгофа (п. 8.3) $\mu_\beta = a_\beta(\omega)/I_\beta^{(0)}(\omega)$, где $I_\beta^{(0)}(\omega)$ определяется (1.32) при $\hbar\omega \ll \varkappa T$.

В частности, коэффициент резонансного поглощения на гармониках $n \geqslant 2$

$$\mu_{\beta n} \approx B_n n^{2n} 2^{-n} (n!)^{-1} (\omega/c) \beta_{T_e}^{2n-3} \exp\left\{-\frac{(\omega - n\omega_H)^2}{2(\omega n_\beta \beta_T \cos\alpha)^2}\right\},$$

$$(7.2.22)$$

$$B_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, v_e \left[n_\beta^{2n-4}\left(1 + K_\beta^2\right)^{-1} (1 + g_\beta)^2 \cos\vartheta_{\text{гр}}\right]_{\omega = n\omega_H} \sin^{2n-2}\alpha/|\cos\alpha|.$$

Более подробное обсуждение этих вопросов, в частности, особенностей получения коэффициента циклотронного поглощения на $\omega \approx \omega_H$, где для вычисления полного профиля линии поглощения необходимо кинетическое рассмотрение, можно найти в [17, 31, 32].

ГЛАВА 8

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В КОСМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЕ

В настоящей главе мы рассмотрим некоторые основные вопросы распространения и излучения волн в космической плазме на примере плазмы солнечной короны, межпланетной и межзвездной среды. Прежде всего это рассмотрение будет касаться высокочастотных волн, которые в силу экранирующих свойств ионосферы (гл. 9) в основном и могут приниматься на поверхности Земли и являются одним из основных индикаторов процессов, проходящих в космических объектах. Несомненно, что затронутый здесь круг вопросов далеко не исчерпывает всего многообразия волновых явлений, протекающих в галактической и метагалактической плазме, например, процессов, которые могут иметь место в квазизвездных объектах, вблизи поверхностей аккрецирующих плазму массивных звезд («черных» дыр), в магнитосферах пульсаров и др. Читателю, желающему познакомиться с указанными проблемами, можно рекомендовать превосходные монографии и обзоры [1—7].

8.1. Статистические явления при прохождении метровых радиоволн через межпланетную плазму

Межпланетная плазма является достаточно разреженной и «малостолкновительной», чтобы вызывать отражение или существенное поглощение радиоволн тех радиочастот, которые беспрепятственно проходят через ионосферу. Даже на расстояниях от Солнца $R \sim 10—20R_\odot$ концентрация плазмы межпланетной среды (плазмы солнечного ветра — СВ) составляет всего 10^3—10^4 см$^{-3}$ (п. 1.2), что соответствует плазменным частотам $f_{e0} = \omega_{e0}/2\pi \sim 0{,}3—0{,}8$ МГц, а частоты столкновений электронов ν_e не превышают $5 \cdot 10^{-3}$ с$^{-1}$. При таких условиях основное влияние межпланетной среды на распространение метровых и более коротких радиоволн обусловлено ее неоднородной структурой и проявляется в эффектах рассеяния радиоволн на турбулентных образованиях плазмы СВ *). Неоднородности СВ могут приводить к кажущемуся увеличению угловых размеров источников космического радиоизлучения (квазаров, активных ядер галактик и др.), вызывают искажение характеристик их излучения

*) Эффекты рассеяния играют существенную роль и при распространении метровых радиоволн в межзвездной среде (п. 8.4).

(изменение частотного спектра излучаемых волн, увеличение длительности кратковременных всплесков). С другой стороны, именно на эффектах рассеяния основан ряд основных методов изучения параметров турбулентности межпланетной и межзвездной плазмы.

Поскольку вопросы рассеяния радиоволн на неоднородностях плазмы не затрагивались в предыдущих разделах книги, в данном параграфе мы прежде всего кратко изложим основы теории распространения волн в статистически неоднородной среде в тех рамках, которые будут ниже необходимы при обсуждении вопросов прохождения радиосигналов через межпланетную и межзвездную среду (п. 8.4), и методов диагностики ионосферной и космической плазмы *).

Основные понятия и приближения. При описании распространения радиоволн в хаотически неоднородной изотропной стационарной плазме исходят из волнового уравнения (7.1.1):

$$\Delta \mathbf{E} - \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} + k_0^2 \left[\langle \varepsilon \rangle + \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}) \right] \mathbf{E} = 0, \tag{8.1.1}$$

в котором выделена хаотическая часть диэлектрической проницаемости $\tilde{\varepsilon}$, а скобки $\langle \ \rangle$ обозначают операцию усреднения случайной величины (или функции) по набору ее независимых реализаций (по определению $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - \langle \varepsilon \rangle$ и $\langle \tilde{\varepsilon} \rangle = 0$). В рассматриваемой задаче $\tilde{\varepsilon}$ является неизвестной функцией координат **), но предполагается, что определены ее первые два статистических момента — среднее значение

$$\langle \varepsilon \rangle = \int \varepsilon w_1(\varepsilon)\, d\varepsilon \tag{8.1.2}$$

и корреляционная функция $\Gamma_{\tilde{\varepsilon}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}_1) \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}_2) \rangle$:

$$\Gamma_{\tilde{\varepsilon}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \int \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}_1) \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}_2)\, w_2 \left[\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}_1), \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}_2) \right] d\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}_1)\, d\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}_2), \tag{8.1.3}$$

где $w_1(\tilde{\varepsilon})$, $w_2(\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}_1), \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}_2))$ — соответственно одноточечная плотность вероятности $\tilde{\varepsilon}$ и совместная плотность вероятности величин $\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}_1)$ и $\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}_2)$. В дальнейшем будем считать $\langle \varepsilon \rangle$ и $\Gamma_{\tilde{\varepsilon}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ заданными. Будем также считать, что случайная действительная функция (поле) $\varepsilon(\mathbf{r})$ статистически однородна, т. е. $\langle \varepsilon(\mathbf{r}) \rangle$ не зависит от $\mathbf{r}$, а $\Gamma_{\tilde{\varepsilon}}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ является функцией разности координат $\rho = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Введем

$$\tilde{\varepsilon}(\varkappa) = (2\pi)^{-3} \int \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r})\, e^{-i\varkappa \mathbf{r}} d\mathbf{r} \tag{8.1.4}$$

и вычислим для однородного процесса

$$\langle \tilde{\varepsilon}(\varkappa)\, \tilde{\varepsilon}^*(\varkappa') \rangle = (2\pi)^{-6} \int \Gamma_{\tilde{\varepsilon}}(\rho)\, e^{-i\varkappa'\rho} e^{-i(\varkappa - \varkappa')\mathbf{r}} d\rho\, d\mathbf{r}.$$

*) Более подробное изложение теории рассеяния волн в средах со случайными неоднородностями можно найти, например, в [8—10].

**) В случае, когда случайная функция зависит не от одного, а от нескольких параметров (координат), ее называют случайным полем.

Используя свойства дельта-функции Дирака

$$\delta(\varkappa) = (2\pi)^{-3} \int \exp(-i\varkappa \mathbf{r})\, d\mathbf{r},$$

имеем

$$\langle \tilde{\varepsilon}(\varkappa)\, \tilde{\varepsilon}^*(\varkappa') \rangle = \Phi_\varepsilon(\varkappa)\, \delta(\varkappa - \varkappa'),$$

где

$$\Phi_\varepsilon(\varkappa) = (2\pi)^{-3} \int \Gamma_{\tilde{\varepsilon}}(\rho) \exp(-i\varkappa\rho)\, d\rho \tag{8.1.5}$$

носит название *пространственной спектральной плотности* или *пространственного спектра* случайного поля $\tilde{\varepsilon}$. Используя (2.2.28), нетрудно показать, что для изотропной разреженной плазмы

$$\Phi_\varepsilon(\varkappa) = \left(\omega_{e0}^4/\omega^4\right) \Phi_N(\varkappa), \tag{8.1.6}$$

где $\Phi_N(\varkappa)$ — пространственный спектр флуктуаций концентрации плазмы (п. 1.1). Очевидно, что и напряженность электрического поля $\mathbf{E}$ в (1) содержит случайную составляющую. В связи с этим поле $\mathbf{E}$ можно характеризовать статистическими моментами, аналогичными (2), (3), и ввести понятия среднего поля $\langle \mathbf{E} \rangle$, корреляционной функции $\Gamma = \langle \mathbf{E}(r_1)\mathbf{E}^*(r_2) \rangle$ и средней интенсивности $\langle I \rangle \simeq \langle \mathbf{E}\mathbf{E}^* \rangle = \Gamma(\rho = 0)$. Удобнее, однако, выделить в $\mathbf{E}$ ту часть напряженности электрического поля, которая не зависит от случайных свойств среды, т. е. использовать представление

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}'(\mathbf{r}, t)\, A_0 \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}), \qquad k = k_0 \sqrt{\langle \varepsilon \rangle}. \tag{8.1.7}$$

Здесь $E'(\mathbf{r}) = (A(\mathbf{r})/A_0(\mathbf{r})) \exp(is(\mathbf{r}))$ носит название *комплексной амплитуды* электромагнитного поля, а $A(\mathbf{r})$ и $s(\mathbf{r})$ — соответственно случайные амплитуда и фаза волны. (В дальнейшем, без ограничения общности, невозмущенную неоднородностями среды составляющую амплитуды волны A_0 мы будем полагать равной единице.) Величины E и E' являются комплексными, поэтому для E' можно ввести корреляционные функции

$$\Gamma_E(\rho) = \langle E'(\mathbf{r}_1)\, E'^*(\mathbf{r}_2) \rangle = \Gamma_{E_1}(\rho) + \Gamma_{E_2}(\rho) \tag{8.1.8}$$

и

$$\overline{\Gamma}_E(\rho) = \langle E'(\mathbf{r}_1)\, E'(\mathbf{r}_2) \rangle = \Gamma_{E_1}(\rho) - \Gamma_{E_2}(\rho) + 2i\Gamma_{E_1E_2}(\rho), \tag{8.1.9}$$

где E_1 и E_2 — реальные и мнимые части комплексной амплитуды, а $\Gamma_{E_1E_2}(\rho) = \langle E_1(\mathbf{r}_1)\, E_2(\mathbf{r}_2) \rangle$. Функцию $\Gamma_E(\rho)$ называют *функцией корреляции комплексно-сопряженных полей* или функцией когерентности. Функция $I(\varkappa)$, связанная с $\Gamma_E(\rho)$ соотношением, аналогичным (5), носит название углового спектра волн:

$$\begin{gathered} I(\varkappa) = (2\pi)^{-3} \int \Gamma_E(\rho) \exp(-i\varkappa\rho)\, d\rho, \\ \Gamma_E(\rho) = \int I(\varkappa) \exp(i\varkappa\rho)\, d\varkappa, \ \varkappa = -\mathbf{k}. \end{gathered} \tag{8.1.10}$$

В нашем случае хаотические поля (E', ε и т. п.), строго говоря, не являются однородными. Однако характерные масштабы изменения средних величин и корреляционных функций этих полей существенно превышают характерные масштабы их флуктуаций (которыми мы будем интересоваться). В этом случае можно считать, что корреляционные функции зависят не только от $\boldsymbol{\rho}$, но и имеют достаточно плавную зависимость от средней координаты $\overline{\mathbf{r}} = (\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)/2$ (квазиоднородные поля [8]). Кроме того, неоднородности не являются стационарными (п. 1.2) и $\tilde{\varepsilon}$ является функцией времени. Вместе с тем характерное время изменения $\tilde{\varepsilon}$ существенно (намного порядков величины) больше периода волны ω^{-1}, что позволяет пренебречь поправками к частоте волны при решении (1). В этом случае (носящем название квазистационарного) зависимость поля $\mathbf{E}$ от времени можно учесть в окончательных выражениях, введя в них время в качестве параметра (подробнее см. [8, 11]).

Ниже мы будем пользоваться понятием спектра рассеянных волн

$$I(\Omega) = (2\pi)^{-1} \int \Gamma_E(\tau) \exp(-i\Omega\tau)\, d\tau, \qquad (8.1.11)$$

где Ω — отклонение циклической частоты от ее среднего значения, $\Gamma_E(\tau)$ — корреляционная функция комплексно-сопряженных полей, а τ — разностная временная координата, аналогичная пространственной координате $\boldsymbol{\rho}$ в (5).

Борновское и малоугловое приближения в задаче рассеяния радиоволн. Перенесем в (1) член $k_0^2\tilde{\varepsilon}\mathbf{E}$ в правую часть и будем считать, что он описывает источники рассеянных волн. Представим напряженность поля волны в виде

$$\mathbf{E} = \langle \mathbf{E} \rangle + \mathbf{E}_s, \qquad (8.1.12)$$

где $\mathbf{E}_s$ — напряженность рассеянной компоненты поля. Легко показать, что в случае слабого рассеяния, когда $|\mathbf{E}_s| \ll \langle \mathbf{E} \rangle$, при вычислении поля $\mathbf{E}_s$ в члене $k_0^2\tilde{\varepsilon}\mathbf{E}$ можно заменить $\mathbf{E}$ на $\langle \mathbf{E} \rangle$. Действительно, подставим (12) в (1) и вычтем из полученного уравнения уравнение для среднего поля

$$\Delta \langle \mathbf{E} \rangle - \operatorname{grad} \operatorname{div} \langle \mathbf{E} \rangle + k_0^2 \langle \varepsilon \rangle \langle \mathbf{E} \rangle = -k_0^2 \langle \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r})\, \mathbf{E}_s(\mathbf{r}) \rangle, \qquad (8.1.13)$$

которое получается после подстановки (12) в (1) и проведения операции усреднения. В результате для $\mathbf{E}_s = \mathbf{E} - \langle \mathbf{E} \rangle$ имеем

$$\Delta \mathbf{E}_s - \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E}_s + k_0^2 \langle \varepsilon \rangle \mathbf{E}_s = -k_0^2 \tilde{\varepsilon} \langle \mathbf{E} \rangle - k_0^2 \left(\tilde{\varepsilon} \mathbf{E}_s - \langle \tilde{\varepsilon} \mathbf{E}_s \rangle \right). \qquad (8.1.14)$$

Если $|\mathbf{E}_s| \ll \langle \mathbf{E} \rangle$ и $|\tilde{\varepsilon}| \ll \langle \varepsilon \rangle$, то $k_0^2\left(\tilde{\varepsilon}\mathbf{E}_s - \langle \tilde{\varepsilon}\mathbf{E}_s \rangle\right)$ в (14) содержит величины более высокого порядка малости, чем остальные члены уравнения, поэтому им можно пренебречь. Тогда, используя известное решение задачи о возбуждении электромагнитных волн точечным источником электрического тока $\mathbf{j} \propto \mathbf{e}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$,

расположенным в точке $\mathbf{r}'$ (7.1.5) (при $R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \gg \lambda$ и $\langle \varepsilon(\mathbf{r}) \rangle \approx \approx 1$ такой источник создает в точке $\mathbf{r}$ электромагнитную волну с $\mathbf{E}_s(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \infty [\mathbf{n}_s[\mathbf{e}\mathbf{n}_s]] \exp(-ik\mathbf{R})/R$, где $\mathbf{n}_s = \mathbf{k}_s/k = \mathbf{R}/R$, $\mathbf{e} = \mathbf{j}/|\mathbf{j}|$), получаем, что поле $\mathbf{E}_s$, создаваемое в точке $\mathbf{r}$ распределенным по пространству источником $-k_0^2 \tilde{\varepsilon} \langle \mathrm{E} \rangle \mathbf{e}$, равно

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}) = (4\pi)^{-1} k_0^2 \int \left(e^{-ik\mathbf{R}}/R\right) \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}') [\mathbf{n}_s[\mathbf{e}\mathbf{n}_s]] \langle \mathrm{E}(r') \rangle d\mathbf{r}'. \quad (8.1.15)$$

Подставляя (15) в (13) и проводя операцию усреднения, можно получить интегродифференциальное уравнение для среднего поля, частные решения которого будут рассмотрены ниже.

В предельном случае слабого рассеяния изменением среднего поля при распространении волны в рассеивающей среде можно пренебречь и заменить $\langle \mathbf{E} \rangle$ в (15) на невозмущенное поле $\mathbf{E}_0$. Такое приближение называется *борновским* или *приближением однократного рассеяния* (о борновском ряде, описывающем разложение поля по кратности рассеяния, см. в [8]). В п. 11.6 это приближение будет использоваться при обсуждении метода исследования мелкомасштабной турбулентной ионосферы, межпланетной и солнечной плазмы, основанного на рассеянии радиоволн на большие углы.

Поляризационный множитель $[\mathbf{n}_s[\mathbf{e}\mathbf{n}_s]]$ в (15) отражает тот факт, что вторичное поле $\mathbf{E}_s$, которое в данном случае создается за счет поляризации неоднородностей среды проходящей волной с $\mathbf{E} = \mathbf{e}\langle E \rangle$, должно иметь проекцию на направление, определяемое вектором $\mathbf{e}$. Очевидно, что $[\mathbf{n}_s[\mathbf{e}\mathbf{n}_s]] = \mathbf{e} - (\mathbf{n}_s\mathbf{e})\mathbf{n}_s$, где второе слагаемое описывает вклад члена $\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{E}_s$ уравнения (14) в решение (15). Для поперечных волн $\widehat{\mathbf{e}\mathbf{n}_s} = \pi/2 - \widehat{\mathbf{e}\mathbf{e}_s}$ ($\mathbf{E}_s = \mathbf{e}_s \mathbf{E}_s$) и

$$|[\mathbf{n}_s[\mathbf{e}\mathbf{n}_s]]|^2 = |\mathbf{e} - \mathbf{n}_s(\mathbf{e}\mathbf{n}_s)|^2 = \cos^2 \psi_{\mathbf{e}\mathbf{e}_s}, \quad (8.1.16)$$

где $\psi_{\mathbf{e}\mathbf{e}_s} = \widehat{\mathbf{e}\mathbf{e}_s}$ — угол между векторами $\mathbf{e}$ и $\mathbf{e}_s$.

Назовем угол между $\mathbf{k}$ и $\mathbf{k}_s$ углом рассеяния и обозначим его ϑ_s. При малых углах рассеяния, когда отклонение вектора $\mathbf{k}$ от $\mathbf{k}_s$ незначительно, для рассматриваемого случая поперечных волн $\psi_{\mathbf{e}\mathbf{e}_s} \ll 1$. Таким образом, поляризационный множитель в (15) примерно равен единице, а членом $\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{E}$ в (1), (13), (14) при рассмотрении задачи о рассеянии радиоволн на малые углы (малоугловое приближение) можно пренебречь.

Рассеяние волны на малые углы имеет место, если масштабы l неоднородностей $\tilde{\varepsilon}$ существенно превышают длину волны λ. В этом легко убедиться на примере однократного рассеяния, вычислив с помощью (14) напряженность поля волн, рассеянных под углом ϑ_s к исходной волне. Учитывая, что источник этих волн описывается членом $k_0^2 \tilde{\varepsilon} \langle \mathbf{E} \rangle$ в (14), согласно теореме о свертке имеем

$$\mathbf{E}_s(k_s) \sim \int \tilde{\varepsilon}(\mathbf{k}_s - \mathbf{k}') \langle \mathbf{E} \rangle (\mathbf{k}') \, d\mathbf{k}'.$$

Для плоской волны $\langle \mathbf{E} \rangle \infty \exp(-i\mathbf{kr})$, $\langle \mathbf{E} \rangle \langle \mathbf{k}' \rangle \infty \delta(\mathbf{k}' - \mathbf{k})$ и основной вклад в $\mathbf{E}_s(\mathbf{k}_s)$ будет вносить фурье-компонента флуктуаций диэлектрической проницаемости $\tilde{\varepsilon}(\mathbf{k} - \mathbf{k}_s)$. Так как при рассеянии волн изменяется только направление их волнового вектора, а модуль $\mathbf{k}$ сохраняется, то $|\mathbf{k}_s - \mathbf{k}| = 2k \sin(\vartheta_s/2) \approx k\vartheta_s$ ($\vartheta_s \ll 1$). Предположим, что спектр $\Phi_\varepsilon(\varkappa = \mathbf{k}_s - \mathbf{k}) \propto \exp(-\varkappa^2 l_m^2/4)$, т. е. резко обрывается на волновых числах $\varkappa \gtrsim l_m^{-1}$. Тогда при $\lambda \ll l_m$ угол рассеяния будет определяться граничным (внутренним) масштабом l_m спектра, т. е. $\vartheta_s k \approx \varkappa$ или $\vartheta_s \approx \lambda/\pi l_m$. Последнее нетрудно понять на примере излучения радиоволны антенной с размером $d \sim l_m$: поляризуемая полем $\langle \mathbf{E} \rangle$ первичной радиоволны неоднородность плазмы подобна такой антенне. Но поскольку степень поляризации неоднородности пропорциональна отклонению ее концентрации $\tilde{N}$ от среднего значения $\langle N \rangle$, этой же величине пропорциональна и напряженность «переизлученного» поля. Неоднородности межпланетной среды, оказывающие существенное влияние на распространение метровых и более коротких радиоволн, имеют размеры $l > 1$—10 км, т. е. существенно превышают длину волны λ. Поэтому, несмотря на многократный характер рассеяния радиоволн в межпланетной среде, суммарный угол рассеяния, который в $\sqrt{\Delta z/l}$ раз больше угла рассеяния на единичной неоднородности (Δz — толщина рассеивающего слоя, $\Delta z/l$ — число рассеивающих независимо друг от друга неоднородностей), оказывается достаточно малым. Учитывая, что при $\lambda \ll l$ характер распространения радиоволны мало отличается от случая ее распространения в однородной среде (см. также гл. 5), подставим (7) в (1) и, направляя волновой вектор $\mathbf{k}$ вдоль оси z, получим уравнение для комплексной амплитуды поля E' в виде

$$-2ik \frac{\partial E'(\mathbf{r})}{\partial z} + \Delta_{\mathbf{r}_\perp} E'(\mathbf{r}) + k_0^2 \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}) E'(\mathbf{r}) = 0, \qquad (8.1.17)$$

где $\Delta_{\mathbf{r}_\perp} = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$. При получении (17) мы пренебрегли членом $\partial^2 E'/\partial z^2$ по сравнению с членом $2ik\, \partial E'/\partial z$, что, очевидно, можно сделать при $kl_E \sim l_E/\lambda \gg 1$ (l_E — характерный масштаб изменения комплексной амплитуды поля E' в направлении оси z), и пренебрегли членом $\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{E}$, описывающим, как было показано выше, изменение поляризации рассеянных волн. Если в (17) пренебречь также $\Delta_\perp E'$, то его решение имеет вид

$$E'(z, \mathbf{r}_\perp) \approx e^{-is}, \quad s(z, \mathbf{r}_\perp) = \frac{k_0}{2} \int_0^z \frac{\tilde{\varepsilon}(z', \mathbf{r}_\perp)}{\sqrt{\langle \varepsilon \rangle}}\, dz' \qquad (8.1.18)$$

($E'(z=0) = 1$), т. е. описывает изменение фазы волны в среде с хаотическими неоднородностями в предельном случае геометрикооптического приближения (в котором пренебрегается изменением амплитуды волны, а интегрирование при вычислении флуктуирующей фазы проводится по «спрямленным» лучам, т. е.

без учета их искривления из-за рефракции волны на неоднородностях среды).

Учет в (17) лапласиана по поперечным координатам x, y в первую очередь, как известно, дает возможность описать вариации амплитуды волн, вызванные как рефракцией, так и интерференцией радиоволн, рассеянных разными неоднородностями. Эти эффекты иллюстрирует рис. 8.1.

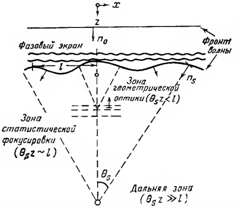

Рис. 8.1. Возникновение амплитудных флуктуаций за хаотическим фазовым экраном.

Пусть плоская волна падает нормально на слой с неоднородностями, толщина которого Δz хотя и много больше характерного масштаба неоднородностей l, но настолько мала, что в каждой точке на выходе слоя фаза s волны определяется интегралом (18) по лучу зрения. На выходе такого слоя, согласно (18), зависимость s от координат x, y, ортогональных волновому вектору падающей волны, характеризуется тем же масштабом l, что и изменение $\tilde{\varepsilon}$, а изменениями амплитуды волны можно пренебречь, так как в соответствии с (17) $\Delta A/A \sim (2k)^{-1}\Delta_{r_\perp} s \Delta z \sim \Delta z \vartheta_s/l$ и при $\vartheta_s \Delta z \ll l$ $\Delta A/A \ll 1$. В связи с этим слой с хаотическими неоднородностями, обладающий такими свойствами, часто называют *хаотическим фазовым экраном.*

Фронт волны на выходе слоя в некоторой точке x' имеет в плоскости xz наклон $\vartheta(x') \sim k^{-1}\partial s/\partial x \sim k^{-1}s/l$, а угол ϑ_s изменяет знак при изменении x' на величину порядка l. Таким образом, в пространстве за слоем имеется набор волн, распространяющихся под различными углами относительно оси z, интервал этих углов характеризуется величиной $\vartheta_s \sim s/kl$. В некоторой точке $a(z_1, x_1)$, удаленной от слоя на расстояние z_1, такое, что $\vartheta_s z_1 \ll l$, поле волны не должно зависеть от неоднородностей, удаленных по оси x от $x = x_1$ на расстояние, сравнимое с l. Это означает, что изменение амплитуды поля в точке a определяется только локальным изменением фронта волны, определяемым неоднородностями, которые расположены вблизи вертикальной оси, проходящей через эту точку. С другой стороны, в точке b, расположенной на расстоянии z_2, удовлетворяющем условию $z_2\vartheta_s \gg l$, поле является суммой полей, рассеянных различными неоднородностями, которые расположены в интервале $\Delta x \sim \vartheta_s z_2$. Такое поле представляет собой результат интерференции многих не зависимых друг от друга вторичных волн со случайной фазой.

Очевидно, что если толщина неоднородного слоя Δz удовлетворяет условию $\Delta z \vartheta_s \gg l$, то интерференция случайных полей уже имеет место внутри слоя с неоднородностями. Однако при $\vartheta_s \ll 1$ в неоднородном слое всегда можно выделить такой интервал L вдоль оси z $(L \gg l,\ L\vartheta_s \ll l)$, на котором изменения амплитуды волны из-за неоднородностей, расположенных в этом интервале, пренебрежимо малы. Такой подход будет использован нами при получении уравнений переноса корреляционных функций поля и интенсивности волн, использование которых удобно при количественном описании эффектов рассеяния радиоволн в плазме.

Существует несколько способов вывода таких уравнений. Проиллюстрируем подробно один из них на примере уравнения переноса функции $\Gamma_E(z, \boldsymbol{\rho}_\perp)$ (8). Умножим (17) слева на $E'^*(z, \mathbf{r}'_\perp)$. Считая $\mathbf{r}'_\perp$ независимой от $\mathbf{r}$ координатой, введем $E'^*(z, \mathbf{r}'_\perp)$ под знак $\Delta_{\mathbf{r}_\perp}$. Проводя в полученном уравнении операцию усреднения по набору реализаций случайных величин, получаем

$$-2ik\left\langle E'^*(z, \mathbf{r}'_\perp)\frac{\partial E_\perp(z, \mathbf{r}_\perp)}{\partial z}\right\rangle + \Delta_{\mathbf{r}_\perp}\langle E'(z, \mathbf{r}_\perp)E'^*(z, \mathbf{r}'_\perp)\rangle + \\ + k_0^2\langle\tilde{\varepsilon}(z, \mathbf{r}_\perp)E'(z, \mathbf{r}_\perp)E'^*(z, \mathbf{r}'_\perp)\rangle = 0. \quad (8.1.19)$$

Запишем уравнение для $E'^*(z, \mathbf{r}'_\perp)$:

$$2ik\frac{\partial E'^*(z, \mathbf{r}'_\perp)}{\partial z} + \Delta_{\mathbf{r}'_\perp}E'^*(z, \mathbf{r}'_\perp) + k_0^2\tilde{\varepsilon}(z, \mathbf{r}'_\perp)E'^*(z, \mathbf{r}'_\perp) = 0.$$

Умножим его слева на $E'(z, \mathbf{r}_\perp)$ и после проведения операции усреднения вычтем из (19). Тогда приходим к следующему уравнению:

$$\left\{-2ik(\partial/\partial z) + \Delta_{\mathbf{r}_\perp} - \Delta_{\mathbf{r}'_\perp}\right\}\langle E'(z, \mathbf{r}_\perp)E'^*(z, \mathbf{r}'_\perp)\rangle + \\ + k_0^2\{\langle\tilde{\varepsilon}(z, \mathbf{r}_\perp)E'(z, \mathbf{r}_\perp)E'^*(z, \mathbf{r}'_\perp)\rangle - \langle\tilde{\varepsilon}(z, \mathbf{r}'_\perp)E'(z, \mathbf{r}_\perp)\times \\ \times E'^*(z, \mathbf{r}'_\perp)\rangle\} = 0. \quad (8.1.20)$$

Для дальнейших вычислений необходимо найти входящие в (20) функции типа $\langle\tilde{\varepsilon}(z, \mathbf{r}_\perp)E'(z, \mathbf{r}_\perp)E'^*(z, \mathbf{r}'_\perp)\rangle$. Рассмотрим решение уравнения (17) на интервале $\Delta z = L$, удовлетворяющем условию $L \ll l/\vartheta_s$. Тогда, используя (18), полученное при этом условии, имеем

$$\langle\tilde{\varepsilon}(z, \mathbf{r}_\perp)E'(z, \mathbf{r}_\perp)E'^*(z, \mathbf{r}'_\perp)\rangle \approx \langle\tilde{\varepsilon}(z, \mathbf{r}_\perp)E'(z-L, \mathbf{r}_\perp)\times \\ \times E'^*(z-L, \mathbf{r}'_\perp)\exp\{is(z, z-L, \mathbf{r}'_\perp) - is(z, z-L, \mathbf{r}_\perp)\}\rangle, \quad (8.1.21)$$

$$s(z, z-L, \mathbf{r}_\perp) = \frac{k_0}{2}\int_{z-L}^{z}\frac{\tilde{\varepsilon}(z', \mathbf{r}_\perp)\,dz'}{\sqrt{\langle\varepsilon\rangle}}.$$

Будем считать, что на длине пути L разность $\Delta s = s(z, z-L, \mathbf{r}'_\perp) - s(z, z-L, \mathbf{r}_\perp)$ достаточно мала, так что $\exp(i\Delta s) \approx 1 + i\Delta s$. Кроме того, учитывая малость величин $\tilde{\varepsilon}$ и Δs, ограничимся рассмотрением в (21) только членов, содержащих $\tilde{\varepsilon}$ в степени, меньшей или равной двум. Тогда правую часть (21) можно представить в виде

$$\langle \tilde{\varepsilon}(z, \mathbf{r}_\perp) E'(z-L, \mathbf{r}_\perp) E'^*(z-L, \mathbf{r}'_\perp)\rangle +$$
$$+ i\langle \tilde{\varepsilon}(z, \mathbf{r}_\perp) \Delta s(z, z-L, \mathbf{r}_\perp, \mathbf{r}'_\perp) E'(z-2L, \mathbf{r}_\perp) E'^*(z-2L, \mathbf{r}'_\perp)\rangle.$$

Здесь учтено, что $E'(z-L, \mathbf{r}_\perp) E'^*(z-L, \mathbf{r}'_\perp) \sim E'(z-2L, \mathbf{r}_\perp) \times E'^*(z-2L, \mathbf{r}'_\perp)\{1 + i\Delta s(z-2L, z-L, \mathbf{r}_\perp, \mathbf{r}'_\perp)\}$. Очевидно, что комплексное поле E' в точке $z-L$ не может зависеть от $\tilde{\varepsilon}$ в точке z, если интервал L существенно превышает характерный масштаб l корреляции флуктуаций $\tilde{\varepsilon}$. Поэтому $\langle\tilde{\varepsilon}(z)E'(z-L) \times E'^*(z-L)\rangle = \langle\tilde{\varepsilon}(z)\rangle\langle E'(z-L)E'^*(z-L)\rangle = 0$ (по определению $\langle\tilde{\varepsilon}\rangle = 0$). По той же причине не могут быть связаны между собой величины $\Delta s(z, z-L)$ и $E(z-2L)$. В результате правая часть (21) в пренебрежении изменением корреляционной функции комплексно-сопряженного поля $\Gamma_E(z, \boldsymbol{\rho}_\perp, \bar{\mathbf{r}}_\perp)$ $(\boldsymbol{\rho}_\perp = \mathbf{r}_\perp - \mathbf{r}'_\perp$, $\bar{\mathbf{r}}_\perp = (\mathbf{r}_\perp + \mathbf{r}'_\perp)/2)$ на участке пути L становится равной $\Gamma_E(z, \boldsymbol{\rho}_\perp, \bar{\mathbf{r}}_\perp)\{-iD_{\varepsilon s}(z, \boldsymbol{\rho}_\perp, \bar{\mathbf{r}}_\perp)/2\}$, где для статистически однородной среды

$$D_{\varepsilon s}(z, \boldsymbol{\rho}_\perp) = k_0 \int\limits_{z-L}^{z} \{\Gamma_{\tilde{\varepsilon}}(z'-z, 0) - \Gamma_{\tilde{\varepsilon}}(z'-z, \boldsymbol{\rho}_\perp)\}\, dz', \quad (8.1.22)$$

а $\Gamma_{\tilde{\varepsilon}}(z-z', \boldsymbol{\rho}_\perp) = \langle\tilde{\varepsilon}(z, \mathbf{r}_\perp)\,\tilde{\varepsilon}(z', \mathbf{r}'_\perp)\rangle$. Учитывая, что $z \gg L \gg l$, а функция корреляции $\Gamma_{\tilde{\varepsilon}}(z-z')$ при $|z-z'| > l$ экспоненциально стремится к нулю, верхний предел интегрирования в (22) можно устремить к бесконечности, а нижний — к нулю. Легко убедиться в том, что последний член (20), вычисленный подобным образом, равен $\Gamma_E(z, \boldsymbol{\rho}_\perp, \bar{\mathbf{r}}_\perp) D_{\varepsilon s}(z, \boldsymbol{\rho}_\perp, \bar{\mathbf{r}}_\perp)/2$.

Перейдем в (20) к переменным $\boldsymbol{\rho}_\perp$ и $\bar{\mathbf{r}}_\perp$. В новых переменных

$$\left\{\Delta_{\mathbf{r}_\perp}, \Delta_{\mathbf{r}'_\perp}\right\} = 4^{-1}\Delta_{\bar{\mathbf{r}}_\perp} + \Delta_{\boldsymbol{\rho}_\perp} \pm \nabla_{\bar{\mathbf{r}}_\perp}\nabla_{\boldsymbol{\rho}_\perp}$$

и уравнение (20) примет вид

$$\left\{\partial/\partial z + (i/k)\nabla_{\bar{\mathbf{r}}_\perp}\nabla_{\boldsymbol{\rho}_\perp} + (k_0^2/2k) D_{\varepsilon s}(z, \boldsymbol{\rho}_\perp, \bar{\mathbf{r}}_\perp)\right\}\Gamma_E(z, \boldsymbol{\rho}_\perp, \mathbf{r}_\perp) = 0. \quad (8.1.23)$$

Уравнение (23) носит название уравнения переноса функции когерентности. Впервые оно было получено в [12]. Для статистически однородной среды и случая падения на слой плоской волны,

когда функция когерентности не зависит от $\overline{\mathbf{r}}_\perp$, уравнение (23) имеет решение

$$\Gamma_E(z, \boldsymbol{\rho}_\perp) = \exp[-D_s(z, \boldsymbol{\rho}_\perp)/2], \quad D_s(z, \boldsymbol{\rho}_\perp) = k_0 \int\limits_0^z D_{\varepsilon s}(z', \boldsymbol{\rho}_\perp)\, dz', \tag{8.1.24}$$

где, как и ранее, принято $A_0 = 1$. Функция $D_s(\rho)$ носит название структурной функции геометро-оптической фазы волны *).

Перейдем в (22) к разностной переменной $\zeta = z' - z$ и с целью упрощения вычислений распространим интегрирование в (22) до бесконечного предела. Тогда с учетом (5) выражение (22) можно представить в виде

$$D_{\varepsilon s}(z, \boldsymbol{\rho}_\perp) = \frac{k_0}{2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} d\zeta \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(1 - e^{i\boldsymbol{\varkappa}_\perp \boldsymbol{\rho}_\perp}\right) e^{i\varkappa_z \zeta} \Phi_\varepsilon(\varkappa_z, \boldsymbol{\varkappa}_\perp)\, d\boldsymbol{\varkappa}_\perp\, d\varkappa_z$$

($\boldsymbol{\varkappa}_\perp = \boldsymbol{\varkappa}_\perp(\varkappa_x, \varkappa_y)$). Интеграл по $d\zeta$ равен $2\pi\delta(\varkappa_z)$, а последующее интегрирование по $\varkappa_z$ приводит к формуле

$$D_{\varepsilon s}(z, \boldsymbol{\rho}_\perp) = \frac{\pi\omega_{e0}^4}{\omega^3 c} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(1 - e^{i\boldsymbol{\varkappa}_\perp \boldsymbol{\rho}_\perp}\right) \Phi_N(0, \boldsymbol{\varkappa}_\perp)\, d\boldsymbol{\varkappa}_\perp, \tag{8.1.25}$$

в которой использовано соотношение (6) между $\Phi_\varepsilon(\boldsymbol{\varkappa})$ и $\Phi_N(\boldsymbol{\varkappa})$. Будем считать спектр флуктуаций концентрации плазмы изотропным, т. е. $\Phi_N(0, \boldsymbol{\varkappa}_\perp) = \Phi_N(0, |\boldsymbol{\varkappa}_\perp|)$. Переходя в (25) к полярным координатам $\rho_x = \rho\cos\varphi$ и $\rho_y = \rho\sin\varphi$, где φ — угол между $\boldsymbol{\varkappa}_\perp$ и $\boldsymbol{\rho}_\perp$, и учитывая, что

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi e^{ia\cos\varphi} d\varphi = J_0(a), \qquad J_0(a) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(a/2)^{2k}}{(k!)^2},$$

$J_0(a)$ — функция Бесселя нулевого порядка, из (24) и (25) имеем ($|\boldsymbol{\varkappa}_\perp| = \varkappa_\perp$)

$$D_s(z, \rho) = \frac{2\pi^2}{\omega^2 c^2} \int\limits_0^z \omega_{e0}^4 dz' \int\limits_0^\infty \{1 - J_0(\varkappa_\perp \rho)\} \Phi_N(0, \varkappa_\perp)\, \varkappa_\perp d\varkappa_\perp. \tag{8.1.25a}$$

Зададим спектр $\Phi_N(\varkappa)$ в виде **)

$$\Phi_N(\varkappa) = c_0 \varkappa^{-p} \exp\left(-\varkappa^2/\varkappa_m^2\right). \tag{8.1.26}$$

---

*) Структурной функцией любого случайного поля $\tilde{\varepsilon}$, вообще говоря, называют функцию $D_\varepsilon(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle|\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}_1) - \tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}_2)|^2\rangle$. Если $D_\varepsilon(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ и приращение среднего поля $\langle\varepsilon(\mathbf{r}_1)\rangle - \langle\varepsilon(\mathbf{r}_2)\rangle$ зависят только от разности $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, то такие случайные поля носят название локально-однородных. Для однородных (и квазиоднородных) случайных полей $D_\varepsilon(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = 2\{\Gamma_\varepsilon(0) - \Gamma_\varepsilon(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)\}$.

**) Выражение (26) является частью спектра (1.1.26). Такая упрощенная форма спектра облегчает интегрирование по $d\varkappa_\perp$ в (25a), но при больших степенях $p\,(p \geqslant 4)$ приводит к расходимости интегралов. Поэтому полученные ниже результаты для D_ε относятся к $p < 4$. Для получения пред-

Подставим (26) в (25а) и представим функцию Бесселя в виде ряда. Тогда интеграл по $d\varkappa_\perp$ в (25а) можно записать следующим образом:

$$-\frac{c_0}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(-\frac{\rho^2}{4}\right)^k (k!)^{-2}\varkappa_m^{2k-p+2}\int_0^\infty y^{k-p/2}e^{-y}dy =$$
$$= -\frac{c_0}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\Gamma\left(k-\frac{p}{2}+1\right)\left(-\frac{\varkappa_m^2\rho^2}{4}\right)^k\varkappa_m^{-p+2}(k!)^{-2},$$

где $\Gamma(x)$ — гамма-функция, а $p < 2(k+1)$ (при интегрировании использована замена переменных $y = \varkappa_\perp^2/\varkappa_m^2$, чтобы свести интеграл к табличному [13]). Полученную сумму, следуя [9], можно выразить через вырожденную гипергеометрическую функцию ${}_1F_1\left(1-p/2,\, 1,\, -\varkappa_m^2\rho^2/4\right)$, используя ее определение

$$ {}_1F_1(\alpha,\beta,x) = \frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(k+\alpha)}{\Gamma(k+\beta)\,k!}x^k. \tag{8.1.27}$$

Тогда вместо (25) имеем

$$D_s(z,\rho) = \int_0^z dz' c_1(z')\,\Gamma(1-p/2)\left\{1 - {}_1F_1\left(1-p/2,\,1,\,-\varkappa_m^2\rho^2/4\right)\right\},$$

где $c_1 = \pi^2 c_0\omega_{\varepsilon 0}^4\varkappa_m^{-p+2}/c^2\omega^2$. Поведение $D_s(z,\rho)$ при малых ρ можно установить, используя первые два члена разложения

$$ {}_1F_1\left(1-p/2,\,1,\,-\varkappa_m^2\rho^2/4\right) \approx 1-(1-p/2)\,\varkappa_m^2\rho^2/4.$$

Используя соотношение $x\Gamma(x) = \Gamma(x+1)$, получаем

$$D_s(z,\rho) \approx \int_0^z dz' c_1(z')\,\Gamma(2-p/2)\,\varkappa_m^2\rho^2/4 \propto \rho^2 \tag{8.1.28}$$

независимо от показателя степени p спектра (26).

В области больших ρ ($\varkappa_m\rho \sim \rho/l_m$, l_m — внутренний масштаб спектра $\Phi_N(\varkappa)$) можно воспользоваться асимптотическим разложением функции ${}_1F_1(\alpha,\beta,x)$ при больших отрицательных значениях аргумента x:

$$ {}_1F_1(\alpha,\beta,x) \approx \Gamma(\beta)(-x)^{-\alpha}/\Gamma(\beta-\alpha).$$

Тогда при $\alpha < 0$ ($p > 2$) ${}_1F_1(\alpha,\beta,x) \gg 1$ и

$$D_s(z,\rho) \simeq \frac{2\Gamma(2-p/2)}{(p-2)\,\Gamma(p/2)}\int_0^z dz' c_1(z')\left(\frac{\varkappa_m\rho}{2}\right)^{p-2} \propto \rho^{p-2}. \tag{8.1.28a}$$

Для вычисления коэффициента c_0 учтем, что интеграл по $d\boldsymbol{\varkappa}$ от $\Phi_N(\boldsymbol{\varkappa})$ есть средний квадрат флуктуаций концентрации $\langle(\Delta N)^2\rangle$. Однако спектр (26)

ставлений о поведении $D_s(z,\rho)$ при больших p необходимо в (25а) заменить нижний предел интегрирования по $d\varkappa_\perp$ на $\varkappa_1 \geqslant \varkappa_0$ ($\varkappa_0 = 2\pi/l_0$, l_0 — внешний масштаб спектра (1.1.26)).

является частью более общего спектра (1.1.26). Поэтому интегрирование спектра (26) в бесконечных пределах можно провести не для всех значений p. Так как $\Phi_N(\varkappa)$ в (26) экспоненциально убывает при $\varkappa > \varkappa_m$, с целью упрощения интеграла по $d\varkappa$ будем считать $\Phi_N(\varkappa) \approx c_0\varkappa^{-p}$, а верхний предел интегрирования заменим на $\varkappa_m$. Кроме того, исключим из интегрирования область малых $\varkappa$ ($\varkappa < \varkappa_1$), вводя фактически величину

$$\langle(\Delta N)^2\rangle_{\varkappa_1} \approx 4\pi \int\limits_{\varkappa_1}^{\varkappa_m} \Phi_N(\varkappa)\,\varkappa^2 d\varkappa \approx 4\pi\, c \int\limits_{\varkappa_1}^{\varkappa_m} \varkappa^{-p+2} d\varkappa. \tag{8.1.29}$$

(Здесь осуществлен переход к сферической системе координат $\varkappa$, α, φ и проведено интегрирование по углам α и φ.) После интегрирования по $\varkappa$ получаем

$$c_0 \sim (4\pi)^{-1} \langle(\Delta N)^2\rangle_{\varkappa_1} \left\{\left(\varkappa_1^{3-p} - \varkappa_m^{3-p}\right)/(p-3)\right\}^{-1}.$$

Отсюда видно, что для изотропного спектра $\langle(\Delta N)^2\rangle_{\varkappa_1}$ и c_0 определяются масштабом $\varkappa_1$ только при $p > 3$, а для $p < 3$ эти величины преимущественно зависят от волнового числа $\varkappa_m$ *). Введение величины $\langle(\Delta N)^2\rangle_{\varkappa_1}$ позволяет представить следующим образом:

$$D_s(z, \rho) \approx 2s_{0\varkappa_1}^2(z)\, \widetilde{D}_s(z, \rho), \qquad \lim_{\rho\to\infty} D_s(\rho) = 2s_{0\varkappa_1}^2, \tag{8.1.30}$$

где $s_0^2 = \langle(\Delta s)^2\rangle$ носит название среднего квадрата флуктуаций геометрооптической фазы. Индекс $\varkappa_1$ в (30) указывает на то, что при вычислении флуктуаций фазы учитываются только масштабы, меньшие некоторого граничного масштаба $l_1 \leqslant l_0$. Для гауссова вида спектра, который следует из (26) при $p = 0$, имеем

$$\begin{gathered} D_s(z, \rho) = 2s_0^2\left[1 - \exp\left(-\rho^2/l_m^2\right)\right], \\ s_0^2 \sim \left(\pi^{5/2}/f^2c^2\right) \int\limits_0^z f_{e0}^4 l_m \delta N^2 dz', \qquad f_{e0} = \omega_{e0}/2\pi, \end{gathered} \tag{8.1.31}$$

где через δN^2 обозначена величина $\langle(\Delta N)^2\rangle/\langle N\rangle^2$.

Пределы применимости (23) следуют из пренебрежения на участке $L \gg l$ членом, содержащим оператор $\Delta_{\mathbf{r}_\perp}$, по сравнению с $\partial/\partial z$ (что было необходимо для представления на L решения уравнения (17) в виде (18)), а также из условия $|s(z, z-L, \mathbf{r}'_\perp) - s(z, z-L, \mathbf{r}_\perp)| \ll 1$, которое использовалось при замене входящих в (21) экспоненциальных функций первыми двумя членами их разложения в ряд Тейлора **). Подобно тому, как это было сделано при выводе уравнения переноса функции когерентности (23), можно вывести уравнения переноса среднего поля

$$\left\{\partial/\partial z + (i/2k)\,\Delta_{\mathbf{r}_\perp} + \left(k_0/2\sqrt{\langle\varepsilon\rangle}\right)\Gamma_{\tilde{\varepsilon}s}(z, 0)\right\}\langle E'\rangle = 0 \tag{8.1.32}$$

---

*) Нетрудно убедиться, что для анизотропного спектра (1.1.28) таким граничным значением показателя степени p является $p = 2$.

**) При $L \sim l_z$ они имеют вид $l_z/kl_\perp^2 \ll 1$ и $D_s(l_z, \rho) \ll 1$.

и функции частотной корреляции комплексно-сопряженных полей [14, 15] $\Gamma_\omega(z, \rho_\perp) = \langle E'_{\omega_1}(z, \mathbf{r}_\perp) E'^*_{\omega_2}(z, \mathbf{r}'_\perp)\rangle$ (E'_{ω_j} — комплексная амплитуда поля частоты ω_j)

$$\left\{\frac{\partial}{\partial z} + i\,\frac{k_1+k_2}{2k_1k_2}\nabla_{\bar{\mathbf{r}}_\perp}\nabla_{\rho_\perp} + i\,\frac{k_2-k_1}{4k_1k_2}\left(\frac{1}{2}\Delta_{\bar{\mathbf{r}}_\perp} + 2\Delta_{\rho_\perp}\right) + H_\omega\right\}\Gamma_\omega = 0, \tag{8.1.33}$$

где для статистически однородной среды

$$H_\omega(z, \rho_\perp) = 2^{-1}\left\{k_1\left[\Gamma_{\tilde{\varepsilon}_1 s_1}(z, 0) - \Gamma_{\tilde{\varepsilon}_1 s_2}(z, \rho_\perp)\right] + k_2\left[\Gamma_{\tilde{\varepsilon}_2 s_2}(z, 0) - \Gamma_{\tilde{\varepsilon}_2 s_1}(z, \rho_\perp)\right]\right\}.$$

Индексы 1 и 2 при $\tilde{\varepsilon}$ и s указывают, что эти величины относятся к частотам ω_1 и ω_2. Уравнение для $\Gamma_\omega(z, \rho_\perp)$, впервые полученное в [14], принимает наиболее простой вид в случае $\langle\varepsilon\rangle \approx 1$ и $\delta = (\omega_2-\omega_1)/(\omega_1+\omega_2) = \Omega'/2\bar{\omega} \ll 1$, $\bar{\omega} = (\omega_1+\omega_2)/2 \approx \omega$. Если, кроме того, ограничиться рассмотрением падения на статистически однородный слой плоских радиоволн $(\nabla_{\mathbf{r}_\perp}\Gamma_\omega = 0)$, то вместо (33) имеем

$$\left\{\frac{\partial}{\partial z} + \frac{i\delta}{k}\,\Delta_{\rho_\perp} + \frac{k_0^2}{2}\left[2\delta^2\Gamma_{\tilde{\varepsilon}s}(z, 0) + D_{\varepsilon s}(z, \rho_\perp)\right]\right\}\Gamma_\omega(z, \rho_\perp) = 0. \tag{8.1.33a}$$

Пределы применимости уравнений (32) и (33) имеют вид $k_0 l_\perp^2/l_z \gg 1$, $s_0^2(z\sim l) \ll 1$ и $\left(k_0 l_\perp^2/\delta l_\perp\right) \gg 1$, $\delta^2 s_0^2(z\sim l) \ll 1$ соответственно. Аналогичным образом может быть получено и уравнение переноса функции $\bar{B}_E(z, \rho_\perp) = \langle E'(z, \mathbf{r}_\perp) E'(z, \mathbf{r}'_\perp)\rangle - \langle E\rangle^2$:

$$\left\{\partial/\partial z + (i/4k)\,\Delta_{\bar{\mathbf{r}}_\perp} + (i/k)\,\Delta_{\rho_\perp} + k_0\langle\varepsilon\rangle^{-1/2}\left[\Gamma_{\tilde{\varepsilon}s}(z, 0) + \Gamma_{\tilde{\varepsilon}s}(z, \rho_\perp)\right]\right\}\bar{B}_E(z, \rho_\perp) + k_0\langle\varepsilon\rangle^{-1/2}\Gamma_{\tilde{\varepsilon}}(z, \rho_\perp)\langle E\rangle^2 = 0, \tag{8.1.34}$$

пределы применимости которого идентичны пределам применимости (32).

Среднее поле, угловой и частотный спектры рассеянных радиоволн. Из (32) следует, что изменение среднего поля первоначально плоской волны в статистически однородном слое, когда $\Delta_{\mathbf{r}_\perp}\langle E'\rangle = 0$, в рамках рассматриваемых приближений обусловлено изменением его реальной части, т. е.

$$\langle E'\rangle = \langle E'^*\rangle = \exp\left(-s_0^2/2\right), \qquad s_0^2 = k_0\int_0^z \Gamma_{\tilde{\varepsilon}s}(z', 0)\,dz'. \tag{8.1.35}$$

(Здесь для простоты считается, что $\langle\varepsilon\rangle = 1$ и $\langle E'\rangle_{z=0} = 1$.) С другой стороны, согласно (24), $\langle I\rangle = \Gamma_E(z, 0) = 1$. Представляя $E' = \langle E'\rangle + E'_s$ и вычисляя $\langle I\rangle = \langle E'\rangle^2 + \langle I_s\rangle$ $\left(\langle I_s\rangle = \langle E'_s E'^*_s\rangle\right)$,

имеем

$$\langle I_s\rangle = 1 - \langle E'\rangle^2. \qquad (8.1.35a)$$

Формула (35a) отражает закон сохранения средней интенсивности волны, который имеет место в приближении малоуглового рассеяния. Из (35) и (35a) видно, что при $s_0^2 \ll 1$ преобладает нерассеянная компонента сигнала, величина которой характеризуется $\langle E'\rangle^2$. В этом случае $\langle I_s\rangle \ll 1$, и мы говорим о слабом или однократном рассеянии радиоволн. Если $s_0^2 \gg 1$, то $\langle E'\rangle \ll 1$, а $\langle I_s\rangle \approx 1$. Следует заметить, что часто могут интересовать величины $\langle E'\rangle$ и $\langle I_s\rangle$, обусловленные не всем спектром $\Phi_N(\varkappa)$, а только его частью. Например, в случае солнечного ветра эффекты рассеяния на неоднородностях, масштабы которых сравнимы с расстоянием от Земли до Солнца, как будет видно из дальнейшего, оказываются существенно более слабыми, чем те, которые вызваны неоднородностями с $l \sim (1-5)\cdot 10^7$ см. Вместе с тем в s_0^2 основной вклад могут вносить крупные неоднородности, поэтому ниже под s_0^2 будет пониматься величина $s_{0\varkappa_1}^2$ (30), определяемая неоднородностями с $\varkappa < \varkappa_1$, где $\varkappa_1$ — некоторое характерное волновое число спектра $\Phi_N(\varkappa)$.

Функция $\Gamma_E(z, \boldsymbol{\rho}_\perp)$, определяемая (24), позволяет найти угловой спектр рассеянных волн (см. (10))

$$I(\boldsymbol{\vartheta}_\perp) = (2\pi)^{-2} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Gamma_E(z, \boldsymbol{\rho}_\perp)\, e^{ik\boldsymbol{\vartheta}_\perp \boldsymbol{\rho}_\perp} d\boldsymbol{\rho}_\perp, \qquad \boldsymbol{\vartheta}_\perp = \boldsymbol{\vartheta}_\perp(\vartheta_x, \vartheta_y). \quad (8.1.36)$$

Для статистически однородного поля E', когда $\Gamma_E(z, \boldsymbol{\rho}_\perp)$ зависит только от модуля $|\boldsymbol{\rho}_\perp| = \rho$, после несложных вычислений, аналогичных проведенным при получении (25a), имеем

$$I(\vartheta) = (2\pi)^{-1} \int\limits_0^{\infty} \rho d\rho \Gamma_E(z, \rho)\, J_0(k\vartheta\rho). \qquad (8.1.36a)$$

Если считать, что неоднородности среды перемещаются со скоростью $\mathbf{u}$, а время их жизни $\tau_ж$ много больше характерного времени $\tau \sim l/u$, то $\Gamma_E(z, \boldsymbol{\rho}_\perp) = \Gamma_E(z, \mathbf{u}\tau)$. В этом случае функция $\Gamma_E(z, \mathbf{u}\tau)$ описывает временную корреляцию флуктуаций комплексно-сопряженного поля. Через функцию $\Gamma_E(z, \mathbf{u}\tau)$ можно выразить частотный спектр первоначально монохроматической волны, прошедшей через слой с движущимися неоднородностями плазмы:

$$I(\Omega) = (2\pi)^{-1} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Gamma_E(z, \mathbf{u}\tau) \exp(-i\Omega\tau)\, d\tau. \qquad (8.1.37)$$

Предположим, что максимальное значение $D_s(z, \rho)$ (которое имеет место при больших ρ) существенно меньше единицы. Тогда после подстановки в (37) первых двух членов разложения

функции $\Gamma_E(z, \boldsymbol{\rho} = \mathbf{u}\tau)$ (24) имеем

$$I(\Omega, z) = \delta(\Omega) - (4\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} D_s(z, \mathbf{u}\tau) \exp(-i\Omega\tau)\, d\tau.$$

Используя (25) и связь между D_s и D_{es}, после интегрирования по τ и $\varkappa_x$, где ось x направлена вдоль $\mathbf{u}$, имеем

$$I(\Omega, z) = \\ = \left(1 - s_0^2\right) \delta(\Omega) + (\pi/2\omega^2 c^2 u) \int_0^z \omega_{e0}^4 dz' \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_N(0, \Omega/u, \varkappa_y)\, d\varkappa_y. \quad (8.1.37а)$$

Легко видеть, что первый член равен квадрату амплитуды среднего поля $\langle E' \rangle^2$ при $s_0^2 \ll 1$ с учетом «отсоса» из нее энергии в рассеянную компоненту, а второй член описывает уширение частотного спектра рассеянного сигнала. Таким образом, в случае слабого рассеяния усредненный частотный спектр сигнала, прошедшего через слой с неоднородностями, состоит из нерассеянной компоненты, описывающей форму частотного спектра исходного сигнала, и пьедестала, форма которого определяется видом спектра неоднородностей среды. Нетрудно установить, что площадь этого пьедестала равна s_0^2, т. е. $\langle I_s \rangle$. Вместе с тем если $D_s(\boldsymbol{\rho}_\perp)$ увеличивается с ростом $\boldsymbol{\rho}_\perp$ до достаточно большой величины, то основной вклад в $I(\Omega)$ в области не очень малых значений $I(\Omega)$, как следует из (24), (37), будут вносить значения $D_s(z, \mathbf{u}\tau)$, соответствующие малым τ. В этом случае достаточно использовать асимптотику (28), т. е. ограничиться квадратичным членом разложения $D_s(\rho)$. Тогда

$$I(\Omega, z)/I(0, z) = \exp\left(-\Omega^2/4\Omega_D^2\right), \quad \Omega_D^2 = u^2 s_{0l_m}^2 / l_m^2, \quad (8.1.38)$$

где через $s_{0l_m}^2$ обозначена величина, имеющая смысл среднего квадрата флуктуаций геометро-оптической фазы волны, вызванных неоднородностями с размером $l_m \infty 2/\varkappa_m$. Таким образом, в случае сильного рассеяния $\left(s_0^2 \gg 1\right)$ форма частотного спектра первоначально монохроматической волны имеет гауссов вид и определяется граничным масштабом спектра $\Phi_N(\varkappa)$. При $p < 4$, как это имело место в рассмотренном случае, определяющую роль играет внутренний масштаб l_m. Учитывая подобие выражений для $I(\vartheta)$ и $I(\Omega)$, можно показать, что аналогичные зависимости будут иметь место и для углового спектра рассеянных волн: в случае слабого рассеяния угловой спектр волны, прошедшей через неоднородный слой, будет содержать нерассеянную компоненту и «пьедестал», характерная ширина и форма которого будет определяться формой спектра $\Phi(\varkappa = k\vartheta)$, а в случае достаточно сильного рассеяния и $p \leqslant 4$ угловой спектр рассеянных волн будет определяться рассеянной компонентой и иметь гауссов вид:

$$I(\vartheta, z)/I(0, z) \approx \exp\left(-\vartheta^2/4\vartheta_s^2\right), \quad \vartheta_s^2 = s_{0l_m}^2 / k_0^2 l_m^2. \quad (8.1.39)$$

Из сравнения (38) и (39) видно, что $\Omega_D = uk_0\vartheta_s = \omega\vartheta_s u/c$. Эту связь легко понять, так как уширение частотного спектра при рассеянии обусловлено продольным эффектом Доплера. Тогда $\Omega_D = \omega u c^{-1} \cos(\widehat{\mathbf{uk}})$, а $\cos(\widehat{\mathbf{uk}}) \approx \sin\vartheta_s \approx \vartheta_s$ $(\vartheta_s \ll 1)$. Нетрудно убедиться в том, что при $p > 4$ и в случае сильного рассеяния $I(\Omega)$ и $I(\vartheta)$ по-прежнему будут иметь гауссову форму, однако роль характерного масштаба неоднородностей будет играть не l_m, а внешний масштаб l_0. Действительно, из (25а) и (26) следует, что при $p > 4$ и малых ρ основной вклад в $D_s(\rho)$ будет вносить область малых $\varkappa$: $\{1 - J_0(\varkappa\rho)\} \infty \varkappa^2\rho^2$ и $\{1 - J_0(\varkappa\rho)\}\varkappa^{-p+1} \infty \varkappa^{-p+3}$. Поэтому, заменяя в (25а) нижний предел интегрирования на $\varkappa_0$ и ограничиваясь первыми двумя членами разложения функции $J_0(\varkappa\rho)$, с помощью (31) можно установить, что $D_s(\rho) \approx s_0^2\rho^2/l_0^2$.

Уширение частотного спектра радиоволн, проходящих через плазму солнечного ветра, может играть важную роль при установлении оптимального диапазона частот и полосы пропускания $\Delta f_п$ радиоприемников для радиосвязи с космическими аппаратами. Очевидно, что в случае сильного рассеяния ширина полосы

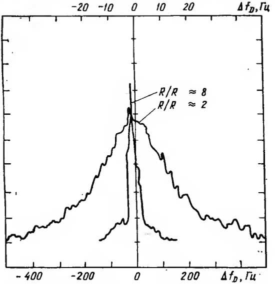

Рис. 8.2. Уширение частотного спектра сигнала за счет рассеяния радиоволн на неоднородностях солнечного ветра: R — минимальное расстояние от центра Солнца до луча, верхняя шкала относится к спектру для $R/R_\odot \approx 8$.

$\Delta f_п$ приемного устройства должна быть больше $\Delta f_D = \Omega_D/2\pi$. Так как при распространении метровых и более коротких волн в межпланетной плазме выполняется условие $f \gg f_{e_0}$, то согласно (31), (38) s_θ и Ω_D пропорциональны ω^{-2}, и влиянием рассеяния можно пренебречь на высоких частотах. На рис. 8.2 приведены экспериментальные данные, иллюстрирующие изменение частотного

спектра сигнала при просвечивании с борта космического аппарата солнечного ветра на различных расстояниях от Солнца [16]. Из этих данных, в частности, следует, что спектр флуктуаций концентрации в широком диапазоне масштабов может быть описан степенной функцией (26) с показателем p, близким к 3,5. Внутренний масштаб $l_m \sim 2/\varkappa_m$ в межпланетной плазме составляет 10—100 км, уменьшаясь на малых расстояниях от Солнца. Это означает, что при исследованиях космического радиоизлучения с помощью радиоинтерферометров (п. 11.2), элементы которых разнесены на расстояния, большие l_m, в ряде случаев оказывается необходимым учитывать угловое уширение спектра радиоволн за счет их рассеяния в межпланетной плазме. Однако наиболее сильно проявляется этот эффект в плазме солнечной короны, изменяя кажущиеся угловые размеры источников солнечного спорадического излучения (п. 8.3), и в межзвездной среде (п. 8.4).

Флуктуации амплитуды (интенсивности) радиоволн. Появление флуктуаций амплитуды радиоволн в точке приема в случае прохождения радиоволн через неоднородный слой связано со сменой реализаций, обусловленной движением неоднородностей. Вместе с тем, величина флуктуаций, которую принято характеризовать параметром

$$F_I = (\langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2)/\langle I \rangle^2, \tag{8.1.40}$$

в рассматриваемом квазистационарном случае, конечно, не зависит от движения неоднородностей, а определяется локальными сгущениями и разрежениями «лучевых трубок» и интерференцией рассеянных волн (рис. 8.1). Процедура вычисления индекса флуктуаций F_I довольно сложна и громоздка. Здесь мы коснемся наиболее простых аспектов этого вопроса, поэтому наше рассмотрение не всегда будет достаточно строгим в количественном отношении. Пусть $E' = \langle E' \rangle + E_s'$. Тогда

$$\begin{gathered} \langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2 = \{\langle E_s' E_s'^* E_s' E_s'^* \rangle - \langle I_s \rangle^2\} + 2\langle E' \rangle^2 \langle I_s \rangle + \\ + \{\langle E_s'^2 \rangle + \langle E_s'^{*2} \rangle\} \langle E' \rangle^2, \quad (8.1.41) \\ \langle E_s' \rangle^2 + \langle E_s'^* \rangle^2 = 2\mathrm{Re}\, \overline{\mathrm{B}}_E(z, 0), \quad \langle I_s \rangle = 1 - \langle E' \rangle^2. \end{gathered}$$

Для вычисления $\mathrm{Re}\, \overline{\mathrm{B}}_E$ в случае $\langle \varepsilon \rangle \simeq 1$ и первоначально плоской волны $\Delta_{\tilde{\mathbf{r}}_\perp} \overline{\mathrm{B}}_E = 0$ запишем (34) в виде

$$\frac{\partial \overline{\overline{\mathrm{B}}}_E(z, \boldsymbol{\rho}_\perp)}{\partial z} + \frac{i}{k_0} \Delta_{\varrho_\perp} \overline{\overline{\mathrm{B}}}_E(z, \boldsymbol{\rho}_\perp) + k_0 \Gamma_{\tilde{\varepsilon} s}(z, \boldsymbol{\rho}_\perp) \{\overline{\overline{\mathrm{B}}}_E(z, \boldsymbol{\rho}_\perp) + 1\} = 0, \tag{8.1.42}$$

где $\overline{\overline{\mathrm{B}}}_E = \overline{\mathrm{B}}_E e^{s_0^2}$, а s_0^2 определяется (35). Из (42) следует, что $\overline{\overline{\mathrm{B}}}_E \lesssim 1 - k_0 \int \Gamma_{\varepsilon s} dz$. Таким образом, при $s_0^2 \gg 1$

$$\overline{\mathrm{B}}_E(z, \boldsymbol{\rho}_\perp) \propto \exp(-s_0^2) \to 0.$$

В приближении однократного рассеяния $\left(s_0^2 \ll 1\right)$ решение (42) нетрудно получить, пренебрегая $\overline{\overline{B}}_E(z, \boldsymbol{\rho}_\perp)$ по сравнению с единицей. Умножим (42) на $(2\pi)^{-2}\exp(-i\boldsymbol{\varkappa}_\perp\boldsymbol{\rho}_\perp)$ и проведем интегрирование по $d\boldsymbol{\rho}_\perp$. Обозначая через $\Phi_E(z, \boldsymbol{\varkappa}_\perp)$ спектр функции $\overline{B}_E(z, \boldsymbol{\rho}_\perp)$, имеем

$$\partial\Phi_E/\partial z - i\left(\varkappa_\perp^2/k_0\right)\Phi_E \approx -k_0\Phi_{\varepsilon s}\langle E'\rangle^2 \approx -k_0\Phi_{\varepsilon s},$$

а $\Phi_{\varepsilon s}(z, \boldsymbol{\varkappa}_\perp)$ — спектр функции $\Gamma_{\varepsilon s}(z, \boldsymbol{\rho}_\perp)$. Это уравнение имеет решение

$$\Phi_E(z, \boldsymbol{\varkappa}_\perp) = -k_0\int_0^z \Phi_{\varepsilon s}(z', \boldsymbol{\varkappa}_\perp)\exp\left[i\varkappa_\perp^2(z-z')/k_0\right]dz', \quad (8.1.42а)$$

или после перехода к $\overline{B}_E(z, \boldsymbol{\rho}_\perp)$ (с помощью преобразования, аналогичного (10))

$$\overline{B}_E(z, \boldsymbol{\rho}_\perp) =$$

$$= -\frac{\pi k_0^2}{2}\int\int_0^z \exp\left[i\boldsymbol{\varkappa}_\perp\boldsymbol{\rho}_\perp + i\varkappa_\perp^2(z-z')/k_0\right]\Phi_\varepsilon(\varkappa_z = 0, \boldsymbol{\varkappa}_\perp)\,dz'd\boldsymbol{\varkappa}_\perp, \quad (8.1.43)$$

$$\Phi_{\varepsilon s}(\boldsymbol{\varkappa}_\perp) = \left(\pi\omega_{c0}^4/2\omega^3 c\right)\Phi_N(0, \boldsymbol{\varkappa}_\perp).$$

При $s_0^2 \ll 1$ первым членом (41), который по порядку величины равен $\langle I_s^2\rangle \sim \langle I_s\rangle^2 \sim s_0^4$, можно пренебречь ($\langle I_s\rangle \ll \langle E'\rangle \sim 1$). Поэтому из (40) и (41) следует, что

$$F_I \simeq 1 - \langle E\rangle^4 + 2\,\mathrm{Re}\,\overline{B}_E(z, 0) = 2\left[s_0^2 + \mathrm{Re}\,\overline{B}_E(z, 0)\right].$$

В результате

$$F_I \simeq (\pi/\omega^2c^2)\int\int_0^z \omega_{c0}^4\left[1 - \cos\left(\varkappa_\perp^2(z-z')/k_0\right)\right]\Phi_N(0, \boldsymbol{\varkappa}_\perp)d\boldsymbol{\varkappa}_\perp dz'. \quad (8.1.44)$$

Из (43), (44) видно, что если $\Phi_N(\boldsymbol{\varkappa})$ имеет характерный масштаб $\varkappa_m$, т. е. при $\varkappa > \varkappa_m$ экспоненциально стремится к нулю, то при условии $\varkappa_m^2 z/k_0 \gg 1$ подынтегральная функция содержит быстроосциллирующую компоненту $\cos\left(\varkappa_\perp^2(z-z')/k_0\right)$. Поэтому на достаточно больших расстояниях от слоя или при достаточно большой его протяженности $F_I \simeq 2s_0^2$.

Равенство нулю $\langle E_s^2\rangle$ при больших z' означает, что рассеянное поле представляет собой сумму многих независимых полей (из рис. 8.1 нетрудно убедиться, что такая ситуация должна иметь место при условии $\theta_s z \gg l$). Но в этом случае, в силу центральной предельной теоремы теории вероятностей, суммарное

поле E_s распределено по нормальному закону, и, следовательно, четвертый момент случайной величины может быть выражен через сумму произведений моментов второго порядка:

$$\langle E_s' E_s'^* E_s' E_s'^* \rangle = 2\langle I_s\rangle^2 + \langle E_s^2\rangle^2 \simeq 2\langle I_s\rangle^2.$$

Таким образом, из (41) имеем

$$F_I = 1 - \langle E'\rangle^4 = 1 - \exp(-2s_0^2), \qquad (8.1.45)$$

откуда в частном случае малых s_0^2 следует полученное выше выражение $F = 2s_0^2$. Можно показать, что для спектра (26) для любых z при $s^2_{0\varkappa_1} \ll 1 \left(\varkappa_1 \sim \left(\sqrt{\lambda z}\right)^{-1}\right)$ и $2 < p < 6$

$$F_I \simeq \frac{\pi^2 k_0^{3-p/2}}{\Gamma(p/2)\,\omega^4}\left(-\frac{\sin(\pi p/4)}{\sin(\pi p/2)}\right)\int\limits_0^z \omega_{\varepsilon 0}^4 c_0(\zeta)(z-\zeta)^{p/2-1}\,d\zeta \sim$$
$$\sim \omega^{-(p+2)/2}. \qquad (8.1.45а)$$

Проведенный выше анализ позволяет также вычислить в рамках использованных приближений корреляционную функцию флук-

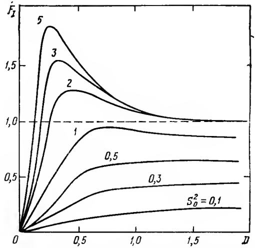

Рис. 8.3. Зависимость среднего квадрата флуктуаций интенсивности за хаотическим фазовым экраном с гауссовым спектром $\Phi_N(\varkappa)$ от волнового параметра D при различных значениях s_0^2.

туаций интенсивности $\Gamma_I(\rho)$. В частности, для случая больших z, когда $\overline{B}_E(z, \rho) \to 0$,

$$B_I(\rho) = \Gamma_I(\rho) - 1 \approx \Gamma_E^2(\rho) - \langle E\rangle^4 \quad (\langle I\rangle = 1). \qquad (8.1.46)$$

Анализ F_I и $\Gamma_I(\rho)$ для $s_0^2 \gg 1$ и любых расстояний z можно найти в [17—22]. На рис. 8.3 показано поведение F_I за хаотическим

фазовым экраном с гауссовым видом спектра $\Phi_N(\varkappa) = \exp(-\varkappa^2 l_m^2/4)$ для различных значений s_0^2 и волнового параметра $D = 4z/k_0 l_m^2$ [18]. Из рис. 8.3 следует, что при $s_0^2 > 1$ на расстоянии за слоем z, удовлетворяющем условию $Ds_0 \simeq 1$ ($\theta_s z \sim l$), наблюдается максимум F_I, который связан с эффектом фокусировки радиоволн случайными неоднородностями [18]. Величина $F_{I\max} \infty s_0^2$; при $Ds_0 \sim \theta_s z/l \gg 1$ F_I стремится к (45). Эффект статистической фокусировки имеет место и для более общего вида спектра (26) [8, 20—22].

Выше был рассмотрен случай нормального падения плоской волны на слой с неоднородностями. При просвечивании СВ сигналами бортовых передатчиков космических аппаратов источник излучения находится либо в самой рассеивающей среде, либо на конечном расстоянии от нее. Поэтому волна является сферической. Решения для такой волны, вообще говоря, содержатся в полученных выше уравнениях переноса. Однако в случае сферической волны удобно, записывая поле волны от источника в виде $E = (E'/R)\exp(i\mathbf{kR})$, уравнение для комплексной амплитуды E' искать в сферической системе координат R, ϑ, φ. Тогда на расстояниях от источника $R \gg l$ и $\lambda \ll l$ вместо (17) имеем

$$\left[-2ik\partial/\partial R + R^{-2}\Delta_\perp + k_0^2\tilde{\varepsilon}(\mathbf{R})\right] E'(\mathbf{R}) = 0, \qquad \Delta_\perp = \partial^2/\partial\vartheta^2 + \partial^2/\partial\varphi^2. \tag{8.1.17a}$$

Из сравнения (17а) и (17) видно, что уравнения для комплексной амплитуды сферической и плоской волн имеют тот же вид, если под $\Delta_\perp$ понимать оператор $\partial^2/\partial\mathbf{r}_1$, где $\mathbf{r}_1$ — вектор, ортогональный $\mathbf{k}$, и соответственно вычислить $\mathbf{r}_1$ в ε и E с учетом отклонения луча от оси z (рис. 8.4):

$$\mathbf{r}_1(z') = \mathbf{r}_{\perp 0} + \int_0^{z'} \Theta(z'')\,dz'', \tag{8.1.47}$$

где Θ — угол между осью z и вектором $\mathbf{R}$, а $\mathbf{r}_{\perp 0}$ — координата источника в плоскости, ортогональной оси z. Очевидно, что при этом с точностью до членов, содержащих малый множитель $\vartheta^2 \sim \vartheta_s^2$, интегрирование по R можно заменить интегрированием по z (пренебрежение удлинением пути, проходимым волной в рассеивающей среде). Соотношение (47) устанавливает связь между координатой $\boldsymbol{\rho}_1(z') = |\mathbf{r}_1(z') - \mathbf{r}_1'(z)|$ и разностными координатами $\boldsymbol{\rho}_\perp(z)$ и $\boldsymbol{\rho}_{\perp 0}$, относящимися соответственно к пунктам приема и излучения. Из рис. 8.4 следует, что в приближении, когда искривлением «лучей» в среде можно пренебречь,

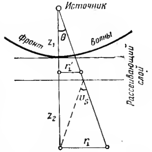

Рис. 8.4. Геометрия рассеяния сферической волны.

$$\boldsymbol{\rho}_1 = \boldsymbol{\rho}_{\perp 0}(z - z')/z' + \boldsymbol{\rho}_\perp z'/z. \tag{8.1.47a}$$

Таким образом, для статистически однородной среды выражение для функции когерентности $\Gamma_E(z, \boldsymbol{\rho}_\perp)$ по-прежнему имеет вид (24), однако в $D_{\varepsilon s}(z, \boldsymbol{\rho}_\perp)$ необходимо $\boldsymbol{\rho}_\perp$ заменить на $\boldsymbol{\rho}_1$, определяемый (47а). Аналогичные замены для сферической волны необходимо сделать и в выражениях (36), (36а), описывающих угловой спектр рассеянных волн, а также в формуле (37), описывающей частотный спектр рассеянных волн. В последнем случае необходимо, однако, иметь в виду, что для неподвижного наблюдателя изменение частотного спектра может быть вызвано как движением источника (со скоростью $\mathbf{u}_c$), так и рассеивающих неоднородностей (скорость

$\mathbf{u}_н$). Поэтому, согласно (24) и (37),

$$I(\Omega) = (2\pi)^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-(k_0/2)\int\limits_0^z dz' D_{\varepsilon s}(z', (z-z')\,\mathbf{u}_c\tau/z + \mathbf{u}_н\tau)\right\}\exp(-i\Omega\tau)\,d\tau.$$

(Здесь использовано то обстоятельство, что при движении неоднородностей среды $\boldsymbol{\rho}_1 = \boldsymbol{\rho}_1 - \mathbf{u}_н\tau$.) Можно видеть, что при $u_c(z-z')/z \ll u_н$ форма частотного спектра такая же, как и в случае плоской волны.

Предположим, что рассеивающий слой достаточно тонкий, так что в (24) при интегрировании по dz' функцию $D_{\varepsilon s}(z', \boldsymbol{\rho}'_\perp)$ можно вынести из-под знака интеграла, заменив ее аргумент некоторым эффективным значением $z' = z - z_2$ (z_2 — расстояние от точки наблюдения до центра рассеивающего слоя). При рассмотрении рассеяния в межпланетной среде такую замену часто можно сделать, так как основной вклад в рассеяние радиоволн в силу убывания электронной концентрации с расстоянием от Солнца вносит слой плазмы, расположенный на минимальном расстоянии «луча» от солнечного диска. Тогда вместо (39) имеем

$$I(\vartheta, z)/I(0, z) \simeq \exp\left(-\vartheta^2/4\vartheta^2_{эф}\right), \qquad \vartheta_{эф} = (z_1/z)\,\vartheta_s$$

(z — расстояние от источника до наблюдателя), т. е. в случае, когда рассеивающий слой расположен на конечном расстоянии z_1 от источника излучения, измеряемый эффективный угол рассеяния в z_1/z раз меньше истинного угла рассеяния $\vartheta_s \sim s_0/kl$. Последнее связано с тем, что в случае сферической волны мы имеем дело с расходящимся пучком радиоволн (рис. 8.4).

Очевидно, что при рассмотрении эффектов рассеяния сферической волны замены $\boldsymbol{\rho}_\perp$ на $\boldsymbol{\rho}_1$, определяемые (47а), необходимо провести и в (25), (25а), а также в уравнениях переноса (33), (34), (42). В последних удобно перейти к переменной $\boldsymbol{\rho}_\perp$, заменив $\partial^2/\partial\boldsymbol{\rho}_1^2$ на $(z^2/z'^2)\,\partial^2/\partial\boldsymbol{\rho}^2$. Проводя в (42) преобразование Фурье, для случая слабого рассеяния вместо (42а) имеем

$$\Phi(z, \varkappa_\perp) = -k_0\int\limits_0^z \frac{z'^2}{z^2}\,dz'\Phi_{\varepsilon s}\left(z', \frac{z'}{z}\varkappa_\perp\right)\exp\left\{i\varkappa_\perp^2\,\frac{z(z-z')}{z'}\right\}.$$

Вводя переменную $\varkappa'_\perp = (z'/z)\,\varkappa_\perp$, после преобразований, аналогичных проведенным при выводе (44), получаем выражение для индекса флуктуаций интенсивности

$$F_I = \frac{\pi}{\omega^2 c^2}\int\int\limits_0^z \omega_{e0}^4 dz'\left\{1 - \cos\left(\varkappa'^2_\perp\,\frac{(z-z')\,z'}{zk_0}\right)\right\}\Phi_N\left(z', \varkappa'_\perp, 0\right)d\varkappa'_\perp. \quad (8.1.48)$$

Отсюда видно, что при прочих равных условиях флуктуации сферической волны на определенном расстоянии z меньше, чем для плоской волны. Последнее связано с тем, что ϑ_s в этом случае больше угла $\vartheta_{эф}$, определяющего число независимо рассеянных волн в точке приема. Вместо (48) часто используют одномерную спектральную плотность флуктуаций

$$F_I(\varkappa_x) = \frac{\pi}{\omega^2 c^2}\int\limits_0^z \omega_{e0}^4 dz'\int\left\{1 - \cos\left(\varkappa'^2_\perp\,\frac{(z-z')\,z'}{zk_0}\right)\right\}\Phi_N\left(z', \varkappa'_x, \varkappa'_y\right)d\varkappa'_y. \quad (8.1.48а)$$

Обычно изучается временной спектр флуктуаций. Здесь (в предположении, что время жизни неоднородностей достаточно велико) с помощью (48а) лег-

ко установить связь между частотой флуктуаций ν и $\varkappa_x$, что позволяет, таким образом, получать сведения о пространственном спектре флуктуаций $\Phi_N(\varkappa_\lambda)$.

Аналогичным образом обобщается на случай сферической волны (или случай наклонного падения) и уравнения для частотной корреляции Γ_ω. При распространении радиоволн в среде с $\langle\varepsilon\rangle \neq 1$ угол θ в (47) может зависеть от $\langle\varepsilon\rangle$, что обусловлено рефракцией волны в среде с регулярно изменяющимися свойствами (п. 9.1). Обычно эти изменения незначительны. Однако они могут оказать существенное влияние на функцию Γ_ω. Последнее связано с зависимостью угла рефракции при распространении радиоволн в плазме от частоты ω. В результате, в (33а) вместо $\boldsymbol{\rho}_\perp$ войдет величина $\boldsymbol{\rho}_\perp + \boldsymbol{\rho}_\omega(z)$, где

$$\boldsymbol{\rho}_\omega(z) = \int\limits_0^z [\theta(\omega_1, z') - \theta(\omega_2, z')]\, dz',$$

и если ρ_ω превысит радиус корреляции флуктуаций поля, то $\Gamma_\omega(\rho_\omega)$ будет близка к нулю (п. 8.4).

8.2. Волны и неустойчивости в солнечном ветре

Солнечный ветер является наиболее близкой к нам космической лабораторией, демонстрирующей многообразие волн в бесстолкновительной полностью ионизированной плазме. Здесь с помощью приборов, установленных на космических аппаратах,

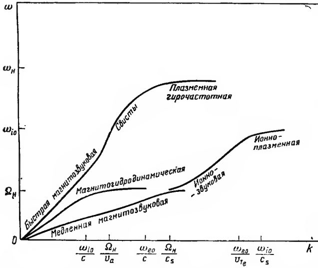

Рис. 8.5. Дисперсионные характеристики волн на низких частотах (по оси ординат отложены ($\tilde{\omega}_H = \omega_H \cos\alpha$, $\tilde{\Omega}_H = \Omega_H \cos\alpha$).

были обнаружены альвеновские и магнитозвуковые волны, волны свистового диапазона, ионно-звуковые, ионно-циклотронные, плазменные электронные и другие. На рис. 8.5 приведены дисперсионные кривые для низкочастотных волн в бесстолкновитель-

ной плазме, которые в значительной мере обсуждались уже в гл. 3. Кривые приведены для случая $\omega_{He} \ll \omega_{e0}$ и $v_A \gg c_s$ и при $\cos\alpha \neq 0$. В условиях, типичных для СВ, первое неравенство выполняется с большим запасом. На расстояниях R от Солнца, меньших 10 а. е., напряженность магнитного поля и концентрация плазмы, однако, убывают с расстоянием как R^{-2} и, следовательно, $v_A = \sqrt{H^2/4\pi MN} \propto \propto 1/R$. Вместе с тем температура частиц в СВ убывает с ростом R медленнее, поэтому условие $v_A > c_s$ нарушается на расстояниях R, больших 1 а. е. Из рис. 8.5 видно, что на частотах, меньших ионной гирочастоты Ω_H, существуют три низкочастотные волны. Общее дисперсионное соотношение для этих волн следует из (3.5.21). При этом волны, для которых вектор $\mathbf{u}$, характеризующий возмущение скорости плазмы в волне, ортогонален плоскости, содержащей $\mathbf{v}_A = v_A\mathbf{h}$ и $\mathbf{k}$ (альвеновские волны), подчиняются дисперсионному уравнению (3.5.24). Так как в альвеновской волне вектор $\mathbf{u}$ ортогонален $\mathbf{k}$, то $\operatorname{div}\mathbf{u} = (\mathbf{ku}) = 0$ и согласно уравнению непрерывности возмущения концентрации плазмы в такой волне отсутствуют. Групповая скорость альвеновской волны направлена всегда вдоль $\mathbf{h}$, а $\mathbf{H}'$ и $\mathbf{u}$ — параллельны или антипараллельны $\mathbf{H}'/|\mathbf{H}| = -\mathbf{u}/v_A \operatorname{sgn}(\cos\alpha)$. Последнее свойство, наряду с отсутствием флуктуаций концентрации, часто используется для диагностики этих волн в межпланетной среде. Электрическое поле в альвеновской волне ортогонально $\mathbf{h}$ (продольная компонента E' порядка kr_{iH}, где r_{iH} — гирорадиус ионов). Дисперсионные соотношения для двух других типов волн *), быстрой магнитозвуковой (БМЗ) и медленной магнитозвуковой (ММЗ) волн, определяются (3.5.25а). При $c_s \ll v_A$

$$\omega_1 \simeq k_1\sqrt{v_A^2 + c_s^2\sin^2\alpha}, \quad \omega_2 = k_2 v_A|\cos\alpha|, \quad \omega_3 \simeq \simeq k_3 c_s|\cos\alpha| \quad (8.2.1)$$

(индексы 1, 2, 3 относятся соответственно к БМЗ, альвеновской и ММЗ волнам *)). При $c_s = 0$ $\omega_1 = k_1 v_A$ и БМЗ волна эквивалентна магнитному звуку. Здесь упругость среды (в отличие от обычного звука) создается не изменением газокинетического давления, а магнитным давлением $H^2/8\pi$, и альвеновскую скорость можно рассматривать как скорость звука в среде $\sqrt{\gamma p/\rho}$, где $\rho = MN$, а показатель адиабаты равен 2, что отражает условие вмороженности магнитного поля в плазму [23]. Для БМЗ справедливы

---

*) Решение (3.5.21) относительно $\mathbf{u}$ для волн можно представить в виде

$$\left(c_s^2 + v_A^2\right)(\mathbf{ku})\,\mathbf{k} - \omega^2\mathbf{u} - (\mathbf{v}_A\mathbf{k})\left[(\mathbf{v}_A\mathbf{u})\,\mathbf{k} + \mathbf{v}_A(\mathbf{ku}) - (\mathbf{v}_A\mathbf{k})\mathbf{u}\right] = 0. \quad (8.2.2)$$

Умножая (2) векторно на $\mathbf{u}$, получаем дисперсионное уравнение для альвеновской волны. Вместе с тем, после скалярного умножения (2) на $\mathbf{k}$ и $\mathbf{v}_A$ получаем систему из двух уравнений относительно $(\mathbf{ku})$ и $(\mathbf{v}_A\mathbf{u})$, детерминант которой определяет дисперсионное уравнение для магнитозвуковых волн (3.5.25).

соотношения

$$H'/H_0 = u/v_A, \quad N'/N = u/v_A \sin\alpha,$$

которые используются для диагностики БМЗ моды. Для данной волны вектор **u** ортогонален **H′** и расположен в плоскости, содержащей векторы **k** и **h**. Быстрая магнитозвуковая волна с ростом **k** переходит в свистовую моду и затем в необыкновенную (плазменную гирочастотную) моду, частота которой при $\alpha = \pi/2$ соответствует частоте нижнего гибридного резонанса $\omega = \sqrt{\omega_H\Omega_H}$. Дисперсионная кривая для ионно-звуковых волн начинается при $k \sim \sim\Omega_H/c_s$ и характеризует плазменную моду при $k \geqslant \omega_{i0}/c_s$.

В межпланетной среде альвеновские волны с $kr_{iH} \ll 1$ практически не затухают. Последнее связано с тем, что при таком условии становится малым как гирорезонансное поглощение (4.2.30), так и затухание Ландау [24], которое пропорционально множителю

$$\omega^2/\Omega_H^2 = \left(v_A^2/v_{T_i}^2\right)(kr_{iH})^2 \cos^2\alpha \ll 1.$$

По указанной причине крупномасштабные альвеновские волны с $\lambda \sim 10^{10}—10^{11}$ см могут распространяться в межпланетной среде на большие расстояния. Считается, что такие волны, наблюдаемые в направлении от Солнца, возбуждаются в подфотосферных слоях. Очевидно, что и черенковское возбуждение крупномасштабных альвеновских волн потоками электронов или ионов затруднено, так как механизм возбуждения имеет ту же природу, что и бесстолкновительное затухание (необходимо только, чтобы функция распределения имела положительную производную в области $v = v_ф = v_A\cos\alpha$). Однако такое возбуждение становится возможным при $kr_{iH} \geqslant 1$ и $\alpha \neq 0$ *). В случае $v_A\cos\alpha \gg v_{T_i}$ взаимодействие альвеновской волны в основном происходит с электронами плазмы, однако при больших α, в связи с уменьшением $v_{ф2} = \omega_2/k_2$, и на больших расстояниях от Солнца (где газокинетическое давление становится сравнимым с магнитным, т. е. $v_A \simeq v_{T_i}$) существенную роль как в поглощении, так и в генерации альвеновских возмущений могут играть ионы.

Гирорезонансное поглощение быстрой магнитозвуковой волны при $kr_{iH} \ll 1$ также мало, однако в коэффициенте затухания Ландау на ионах и электронах плазмы для БМЗ волны отсутствует малый множитель ω^2/Ω_H^2. Поэтому такие волны при $\alpha \neq 0$ могут сильно затухать (на расстояния от Солнца $R \sim 20R_\odot$, где $v_{ф1}$ мо-

*) Для $\alpha^2 \leqslant \omega/\Omega_H$ затухание как альвеновских, так и магнитозвуковых волн пропорционально α^2 и стремится к нулю при $\alpha \to 0$, что связано с поляризационными характеристиками указанных волн. Например, коэффициент затухания обоих типов волн на электронах [25]

$$q_e \infty (m/M)\left(v_{T_e}/v_A\right) n_{1,2}\alpha^2, \tag{8.2.3}$$

где $n_{1,2}$ — показатели преломления БМЗ и альвеновской волн соответственно.

жет достигать v_{T_e}, эти волны могут затухать за счет взаимодействия с тепловыми электронами). По указанной причине облегчаются и условия возбуждения указанных возмущений потоками электронов и ионов даже при $kr_{iH} \gg 1$ (более подробно [25]). При $\alpha = 0$, однако, подобно альвеновской волне, возбуждение БМЗ волны потоками частиц, двигающихся вдоль **h**, отсутствует (3).

Свисты подчиняются следующему дисперсионному соотношению:

$$\omega = \Omega_H + (\omega_H/\omega_{e0}^2)\,|\cos\alpha|\,c^2k^2 \qquad (8.2.4)$$

(при $\omega \gg \Omega_H$ (4) переходит в (3.4.8)). Гирорезонансное поглощение свиста определяется (4.2.6). Черенковское поглощение свиста становится существенным, если фазовая скорость свиста $v_\phi \lesssim v_{T_e}\cos\alpha$ (поглощение электронами). Возможно и черенковское взаимодействие свиста с ионами, если его фазовая скорость примерно равна скорости ионов. Черенковская генерация свистовых волн осуществляется соответственно потоками электронов и ионов. Если же плазма имеет анизотропное распределение по продольным (относительно **h**) и поперечным импульсам, то может иметь место генерация свистовых волн за счет циклотронной неустойчивости. На квантовом языке эффект циклотронного излучения (поглощения) волн пояснялся в п. 7.2. Из закона сохранения энергии для волн и частицы и закона сохранения их импульсов была получена формула Доплера, которая в нерелятивистском приближении имеет вид

$$\omega = n\omega_g/(1 - n\beta_\parallel\cos\alpha), \qquad n = 1,\ 2,\ \ldots$$

($\beta_\parallel = v_\parallel/c$, $v_\parallel$ — проекция скорости частицы на **h**, а ω_g равна ω_H или Ω_H в зависимости от того, является излучающая частица электроном или ионом). Так как частота свистовой волны меньше ω_H, то ее взаимодействие с электроном возможно, в принципе, либо в области нормального эффекта Доплера, но при $\alpha > \pi/2$ ($v_\parallel$ и $k_\parallel$ антипараллельны), либо в области аномального Доплера $n_c\beta_\parallel\cos\alpha > 1$ ($v_\parallel \| k_\parallel$), где n_c — показатель преломления свиста. Но в свистовой волне направление вращения вектора **E** совпадает с направлением вращения электрона. Поэтому в области аномального эффекта Доплера, когда в системе координат, где $v_\parallel = 0$, доплеровское изменение частоты волны $\Delta\omega = \omega v_\parallel n_c/c$ станет порядка ω, вектор **E** будет вращаться в направлении, обратном направлению вращения электрона. Поэтому циклотронное излучение электронами свистовой волны возможно только в области нормального эффекта Доплера. Для того чтобы излучение преобладало над поглощением, необходимо, чтобы производная функции распределения по скорости была положительной. Запишем

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial f}{\partial p_\parallel}\frac{\partial p_\parallel}{\partial \mathbf{p}} + \frac{\partial f}{\partial p_\perp}\frac{\partial p_\perp}{\partial \mathbf{p}}.$$

Если $\partial f/\partial p_\parallel$ и $\partial f/\partial p_\perp$ отрицательны, то для выполнения условия $\partial f/\partial p > 0$ необходимо, чтобы либо $\partial p_\parallel/\partial \mathbf{p}$, либо $\partial p_\perp/\partial \mathbf{p}$ были отрицательны. В области нормального эффекта Доплера при излучении частицы продольный импульс увеличивается, т. е. $\partial p_\parallel/\partial \mathbf{p} < 0$. Поэтому циклотронное возбуждение свистов электронами при анизотропной максвелловской функции $f(p_\parallel, p_\perp)$ возможно только при $\partial f/\partial p_\parallel > \partial f/\partial p_\perp$, т. е. $T_{e\perp} > T_{e\parallel}$.

Вместе с тем циклотронное излучение свистовых волн ионами ($\Omega_H < \omega$) может иметь место только в области аномального эффекта Доплера. Здесь с учетом изменения знака заряда для иона в системе координат, где $v_\parallel = 0$, направление вращения вектора $\mathbf{E}$ будет совпадать с направлением вращения иона. Так как в области аномального эффекта Доплера при излучении происходит увеличение поперечного импульса и уменьшение $p_\parallel$ (гл. 7), то оно возможно при условии, что

$$(\partial f/\partial p_\parallel)\partial p_\parallel/\partial \mathrm{p} > (\partial f/\partial p_\perp)\partial p_\perp/\partial \mathrm{p},$$

т. е. при $T_{i\parallel} > T_{i\perp}$, что наблюдается в солнечном ветре. Инкремент ионно-циклотронной неустойчивости имеет узкий по частоте максимум вблизи $\omega \sim \Omega_H$. Для такой частоты длина волны свиста в СВ составляет примерно 100 км.

Довольно часто ионно-звуковые волны $\left(\omega = kc_s/\left(1 + k^2 r_{eD}^2\right)^{1/2}, c_s = \sqrt{(T_e + T_i)/T_i}\, v_{T_i}\right)$ регистрируются в СВ с помощью космических аппаратов [26]. В гл. 2 было показано, что эти волны могут существовать только при $c_s \gg v_{T_i}$, т. е. при $T_e \gg T_i$. В противном случае они сильно затухают из-за взаимодействия с тепловыми ионами плазмы. В солнечном ветре ионный звук может возбуждаться токами, если $|\Delta \mathbf{v}| = |\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i| > c_s$ и $T_e \gg T_i$. Как считают, такой ток образуется в виде противотока «тепловых» электронов энергичным электронам, двигающимся в направлении от Солнца. Действительно, наблюдается тесная корреляция появляемости ионно-звуковых волн в СВ и анизотропии температур электронов $T_{e\parallel}/T_{e\perp} > 1$, обусловленной наличием потока горячих электронов («гало» в функции распределения). Поток горячих электронов должен вызвать в неоднородной среде поляризационное поле, которое приведет к противотоку основного количества (тепловых) электронов солнечного ветра по направлению к Солнцу («ядро» функции распределения). В результате функция распределения тепловых электронов оказывается сдвинутой относительно функции распределения ионов. В тех случаях, когда этот сдвиг Δu превышает c_s, могут генерироваться ионно-звуковые волны *). Их длина волны составляет от 10—30 м ($\lambda \sim r_{eD}$) до сотен метров.

*) Условие противотока следует из равенства нулю полного электронного тока в спокойном СВ: $N_я U_я + N_г U_г = 0$ (индексы я и г означают, что величины N и U относятся к ядру и гало). В СВ $T_e = 1{,}5 \cdot 10^5$ К и $T_i = 4 \cdot 10^4$ К, т. е. $T_e/T_i \approx 4$, что, вообще говоря, несколько меньше, чем необходимо для пренебрежения затуханием Ландау ионного звука на ионах.

Такая особенность $f(\mathbf{v}_e)$ может быть и причиной генерации альвеновских, быстрых и медленных магнитозвуковых волн. Последние, однако, из-за сильного затухания могут существовать только при $T_e \gg T_i$.

Взаимодействие частиц СВ с ионно-звуковыми волнами может изменить характер процессов переноса. Так, резонансное взаимодействие электронов с этими волнами приводит к изменению импульсов электронов $\mathbf{p}$. Это изменение $\mathbf{p}$ можно характеризовать эффективной силой трения $\mathbf{F}_{\text{тр}} = Nm\nu_{\text{эф}}\Delta\mathbf{u}$. Тогда, если W_k — спектральная плотность волн, то $dp_k/dt \sim \gamma_e p_k$, $p_k \sim W_k/v_k \sim \sim W_k(\mathbf{k}/\omega_\mathbf{k})$ и [27]

$$\nu_{\text{эф}} \approx ((2\pi)^3\, mN\, \Delta u)^{-1} \int \gamma_e W_\mathbf{k}(\mathbf{k}/\omega_\mathbf{k})\, d\mathbf{k},$$

где γ_e — инкремент нарастания волн с учетом квазилинейной релаксации $f(\mathbf{v}_e)$. Отсюда можно оценить $\nu_{\text{эф}}$. Часто принимают, что по порядку величины

$$\nu_{\text{эф}} \approx 10^{-2}\Omega_p \frac{\Delta u}{c_s}\frac{T_e}{T_i}\theta^{-2} \leqslant \Omega_p, \qquad \theta = \widehat{\Delta\mathbf{u}\mathbf{k}}.$$

Величина $\nu_{\text{эф}}$, по-видимому, приводит к появлению конечной длины свободного пробега частиц в СВ, к нагреву плазмы солнечного ветра. Последнее, в частности, может быть ответственным за появление нагревных неустойчивостей, приводящих к образованию крупномасштабных неоднородностей с масштабом l вдоль $\mathbf{h}$ около 10^9—10^{11} см [28]. Нелинейные процессы, в частности, индуцированное рассеяние ионно-звуковых волн на ионах (*индуцированное рассеяние* [23]) формирует, по-видимому, спектр наблюдаемой ионно-звуковой турбулентности СВ в определенном диапазоне частот (рис. 8.6).

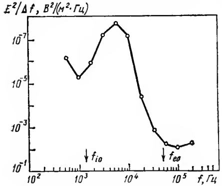

Рис. 8.6. Спектр ионно-звуковой турбулентности в солнечном ветре [26].

С каким типом волн связана наблюдаемая в межпланетной среде неоднородная структура плазмы с масштабами от десятков до миллиона километров, в настоящее время уверенно не установлено. Кроме кратко отмеченных выше механизмов генерации волн и неоднородностей предлагался ряд неустойчивостей, связанных в основном с анизотропией температур электронов и ионов.

В области $\omega \ll \omega_H$ дисперсионное уравнение для волн обыкновенной и необыкновенной поляризаций имеет вид $(\omega < \Omega_H$,

$kv_{T_e}/(\omega-\omega_H)\ll 1,\ kv_{T_i}/|\omega+\Omega_H|\ll 1)$ [29]

$$\frac{\omega^2}{k^2}=v_A^2\left\{1-B_eA_e+\frac{B_i}{1+u_i}\left(\frac{u_i}{1+u_i}+A_i\right)(1+u_i)\right\},$$

где $B_\alpha=4\pi T_{\alpha\parallel}NH_0^{-2}\,(\alpha=e,\,i),\ u_i=\omega/\Omega_H,\ A_\alpha=(T_{\alpha\parallel}-T_{\alpha\perp})/T_{\alpha\parallel}$ — параметр анизотропии температур частиц. Отсюда можно получить выражения для инкрементов неустойчивостей. Видно, что неустойчивость возможна и при $\operatorname{Re}\omega\to 0$ (апериодическая шланговая неустойчивость). Условие возникновения шланговой неустойчивости: $1-B_eA_e-B_iA_i<0$, т. е. при $B_{e,i}\gg 1$ она может возникнуть при достаточно малой анизотропии температур. Условие $B_{e,i}\gg 1$ выполняется, однако, только на расстояниях от Солнца, больших 1 а. е. Для объяснения крупномасштабных неоднородностей в межпланетной плазме привлекаются также механизмы, связанные с образованием структур типа разрывов, для которых сохраняется сумма газокинетического и магнитного давлений. Более полно с состоянием вопроса о неустойчивостях механизмов образования неоднородностей плазмы можно познакомиться в [30, 31].

8.3. Радиоволны в атмосфере Солнца

При описании распространения радиоволн в атмосфере Солнца можно воспользоваться большинством тех формул, которые были получены для ионосферы и межпланетной среды. Например, в пренебрежении влиянием магнитного поля и на частотах $\omega\gg\nu_e$ [24]

$$\varepsilon=1-\frac{\omega_{e0}^2}{\omega^2},\quad \sigma=\frac{\varepsilon-1}{4\pi}\nu_{ei}$$

(плазма считается полностью ионизированной) и коэффициент поглощения волны или «оптическая толщина» слоя атмосферы вдоль луча

$$\tau(\mathbf{r}_1,\mathbf{r}_2)=\int\limits_{\mathbf{r}_1}^{\mathbf{r}_2}\mu(\mathbf{r})\,d\mathbf{l},\quad \mu=\frac{\omega_{e0}^2\nu_{ei}}{c\omega^2\sqrt{1-\omega_{e0}^2/\omega^2}},\qquad(8.3.1)$$

где $d\mathbf{l}$ — элемент длины луча. В сферически симметричной атмосфере лучевые траектории описываются законом Снеллиуса (гл. 5):

$$n(R)R\sin\vartheta(R)=R_\infty\sin\vartheta_\infty=r_p,\quad n(R_\infty)=1,\qquad(8.3.2)$$

где $n(R)$ — показатель преломления в точке, расположенной на расстоянии R от центра Солнца, ϑ — угол между направлением луча и радиусом-вектором $\mathbf{R}$, r_p — «прицельный параметр», характеризующий расстояние от входящего в атмосферу луча до парал-

лельного ему солнечного радиуса (рис. 8.7). Из простых геометрических соображений легко найти, что элемент длины луча равен $dl = dR/\cos\vartheta = dR/\sqrt{1-(r_p/nR)^2}$. Тогда оптическая толщина

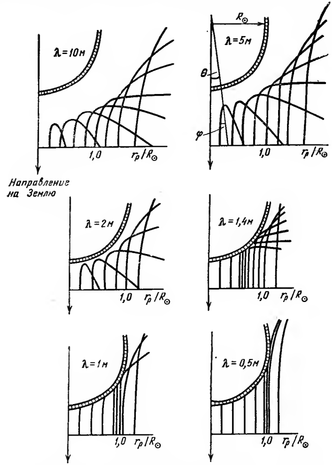

Рис. 8.7. Лучевые траектории в солнечной короне [7].

вдоль луча от произвольного расстояния R в атмосфере Солнца до R_∞ равна

$$\tau(R) = \int\limits_{R}^{R_\infty} \frac{\mu(R)\,dR}{\sqrt{1-r_p^2/n^2R^2}}, \tag{8.3.3}$$

а траектория луча в полярных координатах R, θ

$$\theta = \theta_\infty + \int\limits_{R}^{R_\infty} \frac{r_p dR}{R\sqrt{n^2R^2-r_p^2}}. \tag{8.3.4}$$

Точка поворота луча определяется из условия

$$R_0 n(R_0) = r_p,$$

где R_0 — расстояние от центра Солнца до точки поворота. В точке поворота $\vartheta = \pi/2$ и траектория луча симметрична относительно солнечного радиуса, проходящего через точку поворота. Примеры траекторий лучей в солнечной короне приведены на рис. 8.7, из которого видно, что луч, соответствующий радиоволне частоты ω, проникает глубже в корону при меньших значениях «прицельного» параметра r_p и для радиоволны большей частоты. Поверхность, проведенная через точки поворота, является, очевидно, нижней границей области короны, в которую могут проникать радиоволны и из которой радиоизлучение солнечной атмосферы может выйти за ее пределы в заданном направлении. Например, радиоизлучение из центра солнечного диска ($r_p = 0$) может выходить за пределы короны из более глубоких областей короны, чем в том случае, если источник расположен на лимбе Солнца $r_p = R_{\odot}$. Из рис. 8.7 следует также, что видимое в радиолучах положение какого-либо излучающего источника смещено из-за рефракции к центру диска относительно его истинного положения в солнечной атмосфере. Изменения интенсивности радиоволн вдоль различных лучей определяется уравнением переноса излучения [2]. В пренебрежении влиянием рассеивающихся неоднородностей среды уравнение переноса имеет вид

$$n^2 \frac{d}{dl} \frac{I_\omega}{n^2} = a_\omega - \mu_\omega I_\omega, \tag{8.3.5}$$

где I_ω — спектральная интенсивность излучения вдоль луча, т. е. поток энергии в единичной полосе частоты ω к единице телесного угла, а a_ω — излучательная способность среды. Смысл (5) легко понять, если учесть, что изменение I_ω может быть вызвано также рефракционным изменением углов θ и φ (φ — угол, характеризующий направление луча в плоскости, ортогональной l), т. е. изменением направления и сечения лучевой трубки (гл. 5). В стационарной среде поток энергии через одинаковые площади $\sigma(l)$ и $\sigma(l')$, ортогональные $R(\nabla N)$ в элементах телесных углов $d\Omega$ и $d\Omega'$, при $a_\omega = \mu_\omega = 0$ должен сохраняться, т. е.

$$I_\omega \cos\theta\, d\Omega = I'_\omega \cos\theta'\, d\Omega'. \tag{8.3.6}$$

С другой стороны, на малых длинах dl, когда $R \approx R'$, и при $\varphi - \varphi' \ll \varphi$ из (2) имеем

$$n \cos\theta\, d\theta = n' \cos\theta'\, d\theta', \quad d\varphi = d\varphi'.$$

Так как $d\Omega = \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$, то

$$n^2 \cos\theta\, d\Omega = n'^2 \cos\theta'\, d\Omega', \quad I_\omega n^{-2} = I'_\omega n'^{-2},$$

т. е. на элементе dl $d(I_\omega n^{-2}) = 0$. Отсюда вносимое рефракцией

изменение спектральной интенсивности $\partial I_\omega/\partial l = 2I_\omega n^{-1}\partial n/\partial l$. С учетом излучения среды и поглощения в ней радиоволны

$$\frac{\partial I_\omega}{\partial l} = 2In^{-1}\frac{\partial n}{\partial l} + a_\omega - \mu_\omega I_\omega.$$

Перенося рефракционный член в левую часть уравнения, получаем (5). В магнитоактивной плазме аналогичное (5) уравнение переноса имеет вид [2]

$$|\cos\vartheta_{\text{гр}}|^{-1} n_\beta^2 \frac{d}{dl} I_\beta(\omega) n_\beta^{-2} |\cos\vartheta_{\text{гр}}| = a_\omega - \mu_\omega I_\beta(\omega), \quad (8.3.5а)$$

т. е. получается из (5) заменой n^2 на $n_\beta^2|\cos\vartheta_{\text{гр}}|^{-1}$, где $\vartheta_{\text{гр}}$— угол между вектором групповой скорости и волновым вектором $\mathbf{k}$, а индекс α означает тип нормальной волны. Отличие (5а) от (5) связано с тем, что в магнитоактивной плазме вектор $\mathbf{v}_{\text{гр}}$ по определению направлен вдоль $\mathbf{l}$, а не вдоль $\mathbf{k}$. Из (5а) следует, что при $a_\omega = \mu_\omega = 0$ величина $I(\omega)|\cos\vartheta_{\text{гр}}|$ сохраняется вдоль луча. Уравнению (5) можно придать более простой вид. Если плазма и излучение находятся в равновесии, то величины a_ω и μ_ω связаны уравнением Кирхгофа

$$a_\omega = \mu_\omega I_{pH}(\omega), \qquad I_{pH} = \frac{n_\beta^2\omega^2\varkappa T}{(2\pi)^3 c^2 |\cos\vartheta_{\text{гр}}|}. \quad (8.3.7)$$

Однако закон Кирхгофа оказывается справедливым и в том случае, если равновесной является только среда. Последнее объясняется слабым воздействием излучения на вещество при не слишком больших интенсивностях излучения, когда a_ω и μ_ω определяются параметрами вещества и характером распределения частиц плазмы по скоростям, а не излучением. В радиоастрономии спектральную интенсивность излучения принято характеризовать величиной эффективной или яркостной температуры $T_{\text{эф}}$. Она определяется как температура такого равновесного излучения, для которого $I(\omega) = I_{pH}(\omega)$. Используя это обстоятельство и вводя оптическую толщину среды (3) на отрезке l_0, $l_0 + l$

$$\tau_\beta = \int_{l_0}^{l_0+l} \mu_\beta dl', \quad (8.3.8)$$

уравнение переноса можно записать в виде [2]

$$dT_{\text{эф}}/d\tau_\beta = T - T_{\text{эф}}. \quad (8.3.9)$$

Его решение

$$T_{\text{эф}}(l) = e^{-\tau_\beta}\int_0^{\tau_\beta(l)} T(l')\, e^{\tau'_\beta} d\tau' + e^{-\tau_\beta} T_{\text{эф}}(l_0) \quad (8.3.10)$$

($T_{\text{эф}}$ — эффективная температура излучения вдоль луча в точке l_0), а τ' — оптическая толщина среды на участке пути l', l_0. Если

кинетическая температура не изменяется вдоль луча, то

$$T_{\text{эф}}(l) = T\left(1 - e^{-\tau_\beta}\right) + e^{-\tau_\beta} T_{\text{эф}}(l_0), \qquad (8.3.11)$$

где второй член описывает излучение среды на уровне l_0 (ослабленное последующими слоями), а первый — равновесное излучение этих слоев. При $\tau_\beta \gg 1$ $T_{\text{эф}}(l) \approx T$, т. е. в равновесной среде эффективная температура излучения не может превышать кинетической температуры излучающих частиц. Однако в неравновесной среде, где μ может стать отрицательным, эффективная температура излучения может существенно превысить T. Один из примеров такого усиления электромагнитного излучения в неравновесной среде (мазер-эффект) был рассмотрен в п. 7.1 на примере синхротронного излучения. Существует немало других примеров такого усиления, играющего большую роль в создании наблюдаемого радиоизлучения космической плазмы (черенковское усиление плазменных волн, усиление излучения молекул гидроксила в H II областях и др. [1—3, 5]).

При $\tau \ll 1$ (оптически тонкий слой)

$$T_{\text{эф}} \simeq T\tau_\beta + T_{\text{эф}}(l_0)(1 - \tau_\beta), \qquad (8.3.12)$$

т. е. эффективная температура излучения оптически тонкого слоя существенно меньше кинетической температуры. В случае плавнонеоднородного распределения температуры $(|\partial T/\partial l|\Delta l(\tau \sim 1) < < 1)$ величина $T_{\text{эф}}$ излучения, выходящего за пределы оптически толстого слоя плазмы, ориентировочно может быть оценена из условия, что излучение создается за счет тех слоев плазмы, для которых $\tau_\beta \sim 1$. Принимаемое наблюдателем излучение из равновесной плазмы в этом случае приходит с уровня, оптическая толщина (отсчитанная от ближайшего к наблюдателю конца слоя) которого близка к единице, а $T_{\text{эф}} \sim T(l)$, где $T(l)$ — кинетическая температура на уровне $\tau_\beta(\infty, l_1) \sim 1$.

При наличии в среде хаотических неоднородностей уравнение переноса должно быть дополнено членами, учитывающими рассеяние радиоволн. Эффекты рассеяния могут приводить как к увеличению пути, проходимого волной в среде (что приводит к увеличению τ_β), так и к перераспределению излучения по углам. Если речь идет о высокочастотном электромагнитном излучении в космических условиях, то, поскольку масштабы неоднородностей космической плазмы на много порядков превышают длину излучаемых волн, угол рассеяния волн ϑ_s (п. 8.1) достаточно мал, и основным является эффект углового перераспределения излучения. В простейшем случае изотропной плазмы при $\omega \gg \omega_{e0}$ уравнение переноса (5) принимает вид

$$\frac{\partial I_\omega(\varkappa_\perp)}{\partial z} + k_0\Gamma_{\varepsilon s}(0)\, I_\omega(\varkappa_\perp) - k_0\int \Phi_{\varepsilon s}\left(\varkappa_\perp - \varkappa'_\perp\right) I_\omega\left(\varkappa'_\perp\right) d\varkappa'_\perp = = a_\omega(\varkappa_\perp) - \mu_\omega I_\omega(\varkappa_\perp) \qquad (8.3.13)$$

где $\varkappa_\perp = \varkappa_\perp(\varkappa_x, \varkappa_y)$, $\varkappa_{x,y} \approx k_0\vartheta_{x,y}$. Последние два члена левой части

(13) соответственно учитывают «уход» волн из единичного телесного угла около направления ϑ во все другие направления и «приход» волн в указанный угол из других направлений. Регулярно и хаотически неоднородная магнитоактивная плазма изменяет и характеристики поляризации радиоволн.

При определении поляризации излучения обычно пользуются параметрами Стокса [2, 32, 33], которые связаны простыми соотношениями с тензором поляризации $I_{\alpha\beta} = \widetilde{E_\alpha E_\beta^*}$ (п.7.1):

$$I = I_{xx} + I_{yy} = I_1 + I_2, \quad Q = I_{xx} - I_{yy} = 2\widetilde{E_1 E_2} \cos \psi_{1,2},$$
$$U = I_{xy} + I_{yx} = 2\widetilde{E_1 E_2} \sin \psi_{1,2}, \quad V = i\,(I_{yx} - I_{xy}) = I_2 - I_1. \tag{8.3.14}$$

Здесь индексы 1 и 2 означают, что величины относятся к циркулярно поляризованным по правому или левому кругу волнам, $\psi_{1,2}$ — разность фаз между этими волнами; волнистая черта означает усреднение по высокой частоте. Набор параметров Стокса дает полную информацию о состоянии поляризации. Например, степени круговой и линейной поляризации соответственно равны

$$\zeta_к = \frac{I_2 - I_1}{I_2 + I_1} = \frac{V}{I}, \quad \zeta_л = \frac{\sqrt{U^2 + Q^2}}{I}. \tag{8.3.15}$$

В плавнонеоднородной среде с $\omega_H \ll \omega$ и $\omega_{e0} \ll \omega$ уравнения переноса параметров Стокса нетрудно получить, используя параболическое уравнение (8.1.17). Эти уравнения имеют вид

$$\frac{dI}{dz} = 0, \quad \frac{dV}{dz} \simeq \frac{1}{2} k_0 uv \sin^2 \alpha U,$$
$$\frac{dU}{dz} = k_0 \sqrt{u}v \cos \alpha Q - \frac{1}{2} k_0 uv \sin^2 \alpha V, \quad \frac{dQ}{dz} = -k_0 \sqrt{u} v \cos \alpha U. \tag{8.3.16}$$

Они позволяют описать регулярное и статическое взаимодействие нормальных волн во всех случаях, когда размеры областей взаимодействия волн существенно превышают длину волны излучения [34].

Последнее нетрудно понять, если вспомнить (гл. 5), что взаимодействие имеет место, когда на масштабе, характеризующем изменение разности фаз нормальных волн на 2π, происходит существенное изменение параметров среды, влияющих на поляризацию волн.

В статистически неоднородной среде удобно ввести параметры Стокса, усредненные по ансамблю реализаций. В этих параметрах в качестве E_α фигурируют соответствующие комплексные амплитуды поля. Методом, изложенным в п. 8.1, можно вывести уравнения переноса параметров Стокса в слабозамагниченной ($\omega_H \ll \omega$) плазме с крупномасштабными неоднородностями. Например, в квазипродольном приближении и в пренебрежении поглощением радиоволн эти уравнения вне области источников излучения имеют вид [34]

$$\frac{d}{dz}\begin{Bmatrix} I \\ V \end{Bmatrix} = 0, \quad \frac{d}{dz}\begin{Bmatrix} U \\ Q \end{Bmatrix} = -a_л \begin{Bmatrix} U \\ Q \end{Bmatrix} + \psi' \begin{Bmatrix} Q \\ -U \end{Bmatrix},$$

где $\psi' = k_0 \sqrt{u} v \cos \alpha$, и для $\Phi_N(\varkappa) \propto \exp\left(-\varkappa^2 l_m^2/4\right)$

$$a_л = \frac{k_0^2}{4}\sqrt{\pi}\,\langle(\Delta v)^2\rangle\, l \left\{2u \cos^2 \alpha + 1 - \exp\left(-\frac{1}{l_m}\int_0^z \sqrt{u} \sin \alpha v\, dz'\right)^2\right\} \tag{8.3.17}$$

($a_л$ — коэффициент экстинкции линейной поляризации). В среде с хаотическими неоднородностями линейная поляризация убывает за счет хаотиче-

ского вращения плоскости поляризации волны. Если лучи нормальных волн проходят через одни и те же неоднородности, то степень линейной поляризации $\chi_л$ существенно убывает, если разность фаз нормальных волн $\langle(s_1 - s_2)^2\rangle \sim (\omega_H/\omega)^2 s_0^2 \gtrsim 1$. Однако при $\alpha \neq 0$ нормальные волны имеют разные траектории (гл. 5). Поэтому если расхождение лучей, соответствующих этим волнам (значение интеграла под знаком экспоненты), превысит масштаб неоднородностей l_m, то флуктуации их фаз станут некоррелированными и средняя величина линейной поляризации будет мала уже при $s_0^2 \gtrsim 1$.

В солнечной короне поляризационное взаимодействие нормальных волн играет большую роль в формировании поляризационных характеристик наблюдаемого солнечного радиоизлучения. Последнее, в частности, связано с резким изменением магнитного поля в области пятен и т. п., когда на сравнительно небольшом участке траектории волны магнитное поле может изменить знак [2, 7]. Неоднородности солнечной короны накладывают очень жесткое ограничение на степень линейной поляризации, так как, например, в солнечной короне для метровых волн $s_0^2 \sim 10^8$. Обнаружение линейной поляризации в солнечном радиоизлучении свидетельствовало бы о том, что ее образование (за счет процессов регулярного взаимодействия нормальных волн) произошло на таких расстояниях, начиная с которых статистическая деполяризация мала ($a_л \ll 1$). С некоторыми вопросами распространения радиоволн в статически неоднородной магнитоактивной плазме можно познакомиться в [34—37].

Основные характеристики солнечного радиоизлучения. Излучение спокойного Солнца. Радиоизлучение Солнца обычно подразделяют на излучение спокойного Солнца, локальных источников и спорадическое. Излучение спокойного Солнца определяется тормозным механизмом. Оно возникает за счет изменения скорости электронов (плотности электрического тока) при столкновениях с ионами [1, 2, 32]. Эффективная температура излучения спокойного Солнца на разных частотах зависит от того, превышает или нет значения, близкие к единице, оптическая толщина τ (3) на уровне отражения волны в короне. Зависимость τ для разных частот приведена на рис. 8.8. На рис. 8.9 приведены характерные кривые распределения $T_{эф}$ по диску Солнца [2, 38]. В сантиметровом диапазоне длин волн $T_{эф}$ спокойного Солнца определяется преимущественно хромосферой, где $\tau \approx 1$ и $T_{эф} \sim T_{хр} \approx \approx 3 \cdot 10^4$ К (рис. 1.18). На более низких частотах роль короны увеличивается и на метровых волнах $T_{эф}$ становится близкой к кинетической температуре корональной плазмы $T_к \sim 10^6$ К. Еще на более низких частотах оптическая толщина короны ($\tau \propto \omega^{-2}$ на $\omega > \omega_{e0}$) ввиду смещения уровня отражения волны в короне в наружные слои становится меньше единицы и эффективная температура спокойного Солнца уменьшается. «Уярчение» на лимбе диска на дециметровых волнах, которое хорошо видно на рис. 8.9, возникает при $\tau_{хр} < 1$. В этом случае сразу за лимбом увеличивается вклад более горячей короны, чем и обусловлен этот эффект. Его отсутствие на метровых волнах объясняется отсутствием вклада внутренних слоев солнечной атмосферы в $T_{эф}$. Учет эффектов рассеяния в солнечной короне помогает объяснить аномально медленное уменьшение $T_{эф}$ на метровых волнах с ростом r_p за лимбом. С рассеянием волн в короне можно связать,

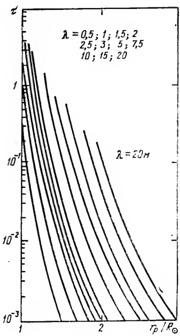

Рис. 8.8. Оптическая толщина солнечной короны для различных длин волн (случай радиального распространения).

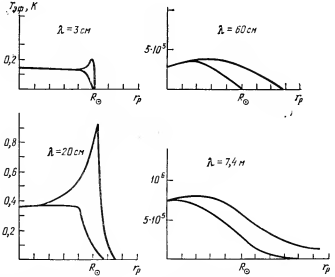

Рис. 8.9. Распределения эффективной температуры по диску спокойного Солнца: верхняя кривая — экваториальный; нижняя — меридиональный разрезы.

в принципе, и наблюдаемое смещение уярчения к меньшим значениям r_p. Излучение спокойного Солнца служит одним из методов диагностики параметров солнечной хромосферы и короны.

Другой тип солнечного радиоизлучения — медленно меняющаяся или S-компонента — связан с существованием над солнечными пятнами с сильным магнитным полем активных областей. Основные его характеристики (частотный спектр, поляризация) объясняются тепловым циклотронным механизмом. Об относительном вкладе циклотронного излучения в S-компоненту можно судить, сравнив коэффициенты поглощения циклотронного и обычного тормозного поглощения радиоволны [2]. Коэффициент циклотронного поглощения обыкновенных (на гармониках $n \geqslant 1$) и необыкновенных ($n \geqslant 2$) волн в плазме с $v_e \ll 1$ и под углами $\alpha \sim 1$ ориентировочно можно оценить на основе приближенных формул, следующих из более строгих выражений п. 7.2:

$$\mu_{2,n\geqslant 1} \infty \frac{\omega}{c} v_e \beta_{T_e}, \quad \mu_{1,n\geqslant 2} \simeq \frac{n^{2n}}{2^n n!} \frac{\omega}{c} \beta_{T_e}^{2n-3}$$

(приведенные оценки μ_{in} относятся к области частот в пределах линии поглощения $\omega \approx \omega_n$, вне которых поглощение экспоненциально мало). Коэффициент тормозного поглощения при $v_e \ll 1$ и $|\sqrt{u}\cos\alpha| \ll 1$ равен $\mu_T \sim v_e \nu_e / c$ [2]. Отсюда для первой и второй гармоник *)

$$\mu_\alpha / \mu_T \sim \omega v_{T_e} / \nu_e c, \quad \mu_\alpha = (\mu_{2,n}; \mu_{1,2}).$$

В солнечной короне $v_{T_e}/c \simeq 10^{-2}$, $\nu_e \sim 10^{-1}$ с и на $\omega \sim 6 \cdot 10^9$ с$^{-1}$ ($\lambda \sim 30$ см) это отношение порядка $6 \cdot 10^6$!

Магнитное поле над солнечным пятном сильно неоднородно, поэтому за циклотронные поглощение и излучение на данной частоте ответственны локальные слои, где величина магнитного поля удовлетворяет соотношению $\omega \simeq n\omega_H \simeq neH/mc$, $n = 1, 2, \ldots$ Оптическая толщина такого слоя $\tau_\beta \sim \mu_\beta L$, где L — минимальная из длин $L_{\beta\omega}$ (характерная длина, на которой $\omega - n\omega_H(l)$ изменяется на ширину поглощения), L_n (длина, на которой номер гармоники изменяется на единицу), L_N (характерный масштаб изменения параметров плазмы). Если положить $\omega - n\omega_H \approx \omega l / L_H$, то ясно из (7.2.21), что

$$L_{\beta\omega} = 2\sqrt{2} L_H \beta_{T_e} n_\beta |\cos\alpha|, \quad L_n \sim L_H / n, \quad L_H \sim H |\partial H / \partial l|^{-1}.$$

При $L_N \ll L_n$ спектр поглощения носит линейный характер. Если T_e изменяется слабо на масштабе L, то эффективная температура гирорезонансных слоев находится с помощью (11). Существование оптически толстых гирорезонансных слоев в активных об-

*) Циклотронное поглощение плазменных волн еще значительнее, так как оно в $\beta_{T_e}^{-2n+2}$ раз превышает соответствующее поглощение электромагнитных волн [2].

ластях над солнечными пятнами и является основной причиной S-компоненты солнечного излучения. Частотный спектр S-компоненты определяется распределением температуры и магнитного поля над пятнами. Над крупными пятнами с сильным магнитным полем эффективно излучающие уровни $2\omega_H$, $3\omega_H$ расположены в короне с $T_{ek} \sim (1-3)\cdot 10^6$ К. Поэтому $T_{эф}$ на таких частотах (дециметровые волны) равно T_{ek} $(I(\omega) \propto \omega^2)$. В сантиметровом диапазоне излучающие уровни с повышением частоты перемещаются из более горячих в более глубокие и холодные слои хромосферы, поэтому $T_{эф}$ уменьшается и $I(\omega) \propto \omega^2 T_{эф}(\omega)$ также уменьшается с ростом частоты. По положению максимума в частотном спектре излучения можно судить о параметрах солнечной атмосферы над пятном [2, 39, 40].

С особенностями циклотронного поглощения и усиления электромагнитных и плазменных волн можно связать ряд особенностей, наблюдаемых в частотном спектре солнечного радиоизлучения [41, 42].

Плазменные волны в солнечной короне играют большую роль в наблюдаемом радиоизлучении активного Солнца. Эти волны,

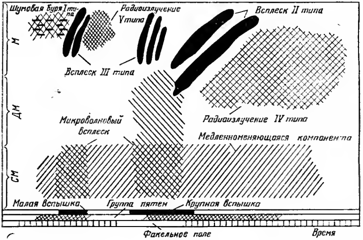

Рис. 8.10. Схематическое изображение динамических спектров спорадического радиоизлучения Солнца [7].

являясь медленными $(v_ф < c)$, хорошо взаимодействуют с потоками энергичных электронов. Последующая трансформация плазменных волн за счет рассеяния на тепловых флуктуациях, низкочастотных волнах и неоднородностях приводит к появлению электромагнитного излучения примерно той же частоты. Комбинационное рассеяние плазменных волн на плазменных волнах приводит к появлению радиоизлучения на второй гармонике. Поскольку плазменные волны излучаются на частотах $\omega \approx \omega_{e0}$, то в динамическом спектре солнечного радиоизлучения (рис. 8.10)

содержится информация о распределении концентрации плазмы в солнечной атмосфере.

Наиболее интересными с точки зрения проверки теории возбуждения плазменных волн в космических условиях являются так называемые всплески третьего типа. Они наблюдаются в широком диапазоне частот от десятков килогерц (измерения на космических аппаратах) до сотен мегагерц по мере продвижения потока от солнечной короны до орбиты Земли.

Мы отметили только два ярких явления в излучении активного Солнца. Они далеко не исчерпывают многообразие типов солнечного излучения. Появление потоков электронов на фронте ударных волн в короне также вызывает излучение плазменных, а следовательно, и радиоволн. Наличие магнитных ловушек приводит к излучениям, связанным с двухпотоковым движением электронов в этих ловушках, появление релятивистских электронов (особенно во время вспышек) служит причиной синхротронного излучения. Подробное изложение этих вопросов можно найти в [2, 7, 38, 43—45].

8.4. Некоторые замечания о генерации и распространении электромагнитных волн в галактической и метагалактической плазме

Радиоизлучение космической плазмы подразделяют на распределенное радиоизлучение Галактики, излучение оболочек сверхновых [46], излучение звезд, а также радиоизлучение других галактик, среди которых особое место занимают квазизвездные объекты [47].

Распределение радиоизлучения Галактики преимущественно вызвано движением релятивистских электронов (энергии от одного до нескольких десятков ГэВ) в галактическом магнитном поле. Основные выражения для интенсивности, коэффициентов излучения и поглощения синхротронного излучения были получены в п. 7.1. Поэтому остановимся вкратце лишь на вопросе о его поляризации.

Синхротронное излучение имеет линейную компоненту поляризации. Степень линейной поляризации $\zeta_л$ при этом определяется излучательной способностью a_{11} и a_{22} линейно поляризованных компонент по главным осям эллипса поляризации (которые ортогональны магнитному полю $\mathbf{H}_0$), а также изменением степени поляризации на пути распространения волны. В однородном магнитном поле и в пренебрежении влиянием тепловой плазмы для степенного энергетического спектра релятивистских электронов и $f(\mathbf{p}) = f(p)$ [1] *)

$$\zeta_л = \frac{a_{11} - a_{22}}{a_{11} + a_{22}} = \frac{\gamma + 1}{\gamma + 7/3}, \tag{8.4.1}$$

*) Ниже будем считать, что $f(\mathscr{E}) = N_e(\gamma - 1)(1\ \text{ГэВ}/\mathscr{E})^{\gamma}\ \text{см}^{-3}\ (\text{ГэВ})^{-1}$, где N_e — полная концентрация релятивистских электронов с $\mathscr{E} > 1$ ГэВ.

что составляет 75% при $\gamma=3$. Принимаемое излучение, однако, имеет, даже для случая регулярного поля H_0, значения $\zeta_л$, существенно меньшие, чем (1). Это связано с вращением плоскости поляризации на пути распространения волны — эффектом Фарадея (п. 11.4). Угол поворота плоскости поляризации $\psi_Ф \propto \propto \omega^{-2} \int NH \cos\alpha \, dz$, поэтому, если в области излучения, имеющей характерный размер $L_и$, угол $\psi_Ф(L) \geqslant \pi$, то даже при однородном поле H_0 степень поляризации будет мала $\left(\zeta_л^L = \zeta_л |\sin\psi_Ф/\psi_Ф|\right)$ [48]. Кроме того, излучение принимается в конечном интервале частот $\Delta f_п$ ($\Delta f_п$ — полоса пропускания приемного устройства), и если в пределах полосы $\Delta\psi_ф = (\partial\psi_ф/\partial f)\Delta f_п > \pi$, χ будет много меньше $\chi_л$. Если же излучение происходит в хаотическом поле $\mathbf{H}_0$, то поляризация также исчезает. Сказанное позволяет понять, что степень поляризации принимаемого излучения может быть существенно меньшей (1). Вместе с тем, информация о поляризации излучения является одним из критериев того, что излучение связано с синхротронным механизмом (впервые на это обстоятельство было обращено внимание в [49], а экспериментально обнаружена линейная поляризация распределенного радиоизлучения Галактики была в [48, 50]). Измерения $\xi_л$ поляризации позволяют также судить о $\mathbf{H}_0$ п. 11.4.

Уравнение переноса синхротронного излучения в случае, когда поглощение определяется только синхротронной реабсорбцией на тех же релятивистских электронах (см. п. 7.1), имеет вид

$$dI(\omega)/d\tau_c = -I(\omega) + S_c(\omega), \tag{8.4.2}$$

где $\tau_c = \int \mu_c(z')\,dz'$ (п. 8.3), а $S_c(\omega)$, которая равна отношению коэффициентов синхротронного излучения и реабсорбции, называют функцией источника. Для использованного выше степенного вида $f(\mathscr{E})$ [51]

$$S_c(\omega) = \frac{2\gamma f^2\, a(\gamma) m}{(\gamma-1)(\gamma+2)\, a(\gamma+1)} \left(\frac{2\pi f}{\omega_H}\right)^{1/2}, \tag{8.4.3}$$

$$a(\gamma) = \sqrt{\frac{3}{\pi}}(\gamma-1)\,\Gamma\left(\frac{3\gamma-1}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3\gamma+19}{12}\right)\Gamma\left(\frac{\gamma+5}{4}\right)\times$$
$$\times\left\{8(\gamma+1)\,\Gamma\left(\frac{\gamma+7}{4}\right)\right\}^{-1}.$$

Если в области источника функция источника постоянна, то

$$I(\omega) = S_c(\omega)\,[1-\exp(-\tau_c(\omega))], \tag{8.4.4}$$

$$\tau_c = 1{,}17\cdot 10^2\,(5{,}86)^\gamma\,\frac{(\gamma-1)(\gamma+2)}{\gamma}\,a(\gamma+1)\left(\frac{10^6}{f}\right)^{(\gamma+2)/2}\times$$
$$\times\,(10^6 H_0)^{(\gamma+2)/2}\,N_{сп},$$

где $N_{сп} = \int N_c dz$. Для оценок потока излучения (п. 7.1) при

$\tau_c \ll 1$ можно пользоваться следующей формулой [51]:

$$F(\Omega) = 7 \cdot (5{,}86)^{\gamma} \cdot 10^{12}\, a(\gamma) \left(10^{-6} f\right)^{(1-\gamma)/2} \left(10^{6} H_0\right)^{(\gamma+1)/2} N_{\text{сп}}\, d\Omega, \quad (8.4.5)$$

где $F(\Omega)$ измеряется в единицах Ян, а $d\Omega$ — телесный угол, занимаемый на небе радиоисточником.

В межзвездной среде $N_{\text{сп}} = 10^{-8}$ пс · см$^{-3}$, поэтому τ_c для всей Галактики мало. Здесь существенным является на низких частотах ослабление излучения, вызванное тепловой плазмой (о спектрах распределенного радиоизлучения Галактики см. в [51]). Однако в плотных объектах типа мощных внегалактических источников τ_c может оказаться сравнимой с единицей в радиодиапазоне. Тогда интенсивность излучения будет иметь максимум на частоте $f_{\max}$, для которой $\tau_c \approx 1$:

$$f_{\max} = \omega_{\max}/2\pi \approx 0{,}04 \left(10^{6} H_0\right)^{(\gamma+2)/(\gamma+4)}, \quad \text{МГц}. \quad (8.4.6)$$

В точечных источниках с синхротронной реабсорбцией можно установить связь между $f_{\max}$ и угловым радиусом источника $\vartheta_{\text{и}}$ [51—53]

$$\vartheta_{\text{и}} \sim \left\{\frac{F(f_{\max})}{1\ \text{ян}}\right\}^{1/2} \left(10^{6} H_0\right)^{1/4} \left(10^{-6} f\right)^{-5/4}. \quad (8.4.7)$$

Синхротронный механизм определяет не только радиоизлучение космических объектов, но также их оптическое, ультрафиолетовое, рентгеновское и мягкое гамма-излучения. Классическим примером в этом случае является Крабовидная туманность, излучение которой в оптическом диапазоне обусловлено движением релятивистских электронов в магнитном поле туманности. Еще более яркой иллюстрацией проявления синхротронного механизма является пульсар PSR 0532, расположенный в Крабовидной туманности. С помощью синхротронного излучения релятивистских ($\mathscr{E} > 10^2\ mc^2$) электронов в релятивистской вращающейся магнитосфере PSR 0532 можно объяснить основные характеристики наблюдаемых потоков в диапазоне длин волн от инфракрасных до жестких рентгеновских [54]. Наряду с синхротронным механизмом в астрофизических объектах большую роль, по-видимому, играет и циклотронное излучение. Особую роль механизм циклотронного излучения приобретает в связи с обнаружением циклотронных линий в спектре рентгеновского излучения источников, входящих в двойные системы [55, 56]. На возможность обнаружения циклотронных линий в спектре таких источников — рентгеновских пульсаров — указывалось в [57]. Естественно, что приведенные примеры далеко не полностью иллюстрируют многообразие механизмов излучения в галактической и метагалактической плазме — бурно развивающейся в последние годы области астрофизики. Мы не касались роли тепловых механизмов излучения, излучения в линиях (например, классического вопроса излучения межзвездного водорода, мазерного механизма излучения в областях H II, излучения молекул межзвездного газа), вопросов излучения и трансформации волн в сильнотурбулентной

релятивистской плазме, особенностей поведения частиц и их излучения в сильных магнитных полях ($\hbar\omega_H \sim mc^2$), которые могут быть вблизи поверхности нейтронных звезд. Эти вопросы выходят за рамки данной книги и являются в настоящее время предметом интенсивных исследований.

Распространение радиоволн (в межзвездной плазме Галактики) характеризуется прежде всего их поглощением и рассеянием. Поглощение радиоволн является существенным в областях слабоионизированной холодной плазмы (области H I), а также в плотных полностью ионизированных областях Галактики (п. 1.4). Как правило, оно проявляется на частотах $f \lesssim 10$ МГц.

Рассеяние радиоволн может оказывать существенное влияние на характеристики принимаемого излучения дискретных радиоисточников вплоть до частот 1—5 ГГц.

В п. 8.1 были получены основные уравнения, описывающие эффекты рассеяния радиоволн в приближении малых углов рассеяния ϑ_s. Это приближение хорошо выполняется в условиях межзвездной среды, где характерные масштабы неоднородностей, как правило, превышают 10^9—10^{10} см. Выражение для среднего квадрата флуктуаций фазы в случае гауссова спектра неоднородностей и $\omega_{c0} \gg \omega$ можно записать в виде

$$s_0^2 \simeq 1{,}4 \cdot 10^{-4} f^{-2} \langle (\tilde{N})^2 \rangle Ll, \tag{8.4.8}$$

где $\langle \tilde{N}^2 \rangle$ — средний квадрат флуктуаций концентрации электронов ($\langle \tilde{N}^2 \rangle \sim N^2 \delta N^2$), L — характерная толщина рассеивающего слоя, а l — размер неоднородностей *). Соответственно для угла рассеяния при $s_0^2 \gg 1$ имеем (п. 8.1)

$$\vartheta_s \sim \frac{2}{\pi} \frac{\lambda s_0}{l}, \quad \theta_H \sim \frac{z_1}{z} \vartheta_s \tag{8.4.9}$$

(θ_H — наблюдаемый угол рассеяния, если источник и наблюдатель расположены от рассеивающего слоя на расстояниях z_1 и $z_2 = z - z_1$). Так как $s_{0\varkappa}^2 \infty l^{p-2}$, то $\vartheta_{s\varkappa}^2 \sim l^{p-4}$, т. е. при $p < 4$ угол рассеяния определяется минимальным масштабом спектра l_m. Однако если $s_0^2(l_m)$ при этом будет значительно меньше единицы, то согласно (8.1.37а) наблюдаемое распределение интенсивности $I(\theta)$ по источнику будет иметь вид «пика» и «пьедестала». Ширина «пьедестала» будет определяться рассеянием на неоднородностях с размерами $l < l^*$, где l^* — масштаб, для которого $s_0^2(l^*) \simeq 1$. Вместе с тем форма «пика» будет определяться ϑ_s ($l > l^*$). Поэтому несколько условно можно характеризовать характерную угловую ширину источника, излучение которого рассеялось на

*) Из (8) легко оценить, как ведет себя s_0^2 в зависимости от $\varkappa \sim 1/l$. Если спектр флуктуаций $\Phi_N(\varkappa) \sim \varkappa^{-p}$, то $\langle \tilde{N}_\varkappa^2 \rangle = \int_\varkappa \Phi_N(\varkappa)\, d\varkappa \sim \varkappa^{-p+3}$ и $s_{0\varkappa}^2 \infty \varkappa^{-p+2} \sim l^{p-2}$.

пути распространения, величиной $\vartheta_s^* = \vartheta_s(l^*)$. Так как $s_0^2 \infty$ $\infty\, \omega^{-2} l^{p-2}$, то $l^* \infty \omega^{2/(p-2)}$, откуда

$$\vartheta_s^* \propto 1/\omega l^* \propto \omega^{-p/(p-2)}. \tag{8.4.10}$$

Аналогично доплеровскую ширину линии можно характеризовать величиной $\Delta\Omega_D^*$, которая пропорциональна $\vartheta_s\omega$, т. е. $\omega^{-2/(p-2)}$.

Рассмотрим вопрос о средней форме импульсного сигнала при его прохождении через рассеивающую среду. По определению

$$\langle I(t)\rangle = \langle E(t) E^*(t)\rangle = \int \langle E'(\omega) E^{*\prime}(\omega')\rangle e^{i(\omega-\omega')t}\, d\omega\, d\omega', \tag{8.4.11}$$

где $E'(\omega)$ — комплексная амплитуда поля (8.1.16). Функция $\langle E'(\omega) E^{*\prime}(\omega')\rangle = \Gamma_\omega \langle \gamma_0(\omega) \gamma_0^*(\omega')\rangle = \Gamma_\omega \Gamma_{\gamma_0}$, где Γ_{γ_0} характеризует форму спектра исходного сигнала. Выражение для Γ_ω нетрудно получить из уравнения (8.1.33), решая его в приближении фазового экрана, т. е. записывая решение в свободном пространстве за экраном, а в качестве граничного условия подставляя решение для Γ_ω в приближении геометрической оптики (т. е. при $\Delta_\perp \Gamma_\omega = 0$). Тогда

$$\Gamma_\omega(z, \rho_\perp) = \frac{i\omega}{4\pi(z - z_H)\,\delta c} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \Gamma_\omega(z_H, \rho_\perp') \exp\left\{-\frac{i\omega(\rho_\perp - \rho_\perp')^2}{4\delta c(z - z_H)}\right\} d\rho_\perp'. \tag{8.4.12}$$

Для гауссова вида спектра $\Phi_N(\varkappa)$ имеем

$$\Gamma_\omega(z_H, \rho_\perp') = \exp\left\{-\frac{D_s(\rho_\perp + \rho_\omega)}{2}\right\} = \\ = \exp\left\{-s_0^2\left(1 - \exp\left\{-\frac{(\rho_\perp' + \rho_\omega)^2}{l^2}\right\}\right)\right\}, \quad \delta^2 s_0^2 \ll 1, \tag{8.4.13}$$

где ρ_ω — рефракционное расхождение лучей, соответствующих волнам разной частоты $\left(\rho_\omega \simeq 4\delta\theta_p z_H,\ \theta_p \simeq 2\pi e^2/m\omega^2 \int N dz\right)$. При $s_0^2 \gg 1$ (13) можно представить в виде $\Gamma_\omega(z_H, \rho) \approx \exp\left[-s_0^2(\rho + \rho_\omega)^2/l^2\right]$, и интегрирование (12) после перехода к полярным координатам $\rho_x = \rho_\perp \cos\varphi$, $\rho_y = \rho_\perp \sin\varphi$ $(\rho_\perp = 0)$ приводит к следующему выражению:

$$\Gamma_\omega = \frac{\exp\left(-s_0^2\rho_\omega^2/l^2\right)}{1 + i\delta D s_0^2}, \qquad D = \frac{4z_H c}{\omega l^2}. \tag{8.4.14}$$

Отсюда видно, что функция частотной корреляции Γ_ω имеет два характерных масштаба

$$\Omega_1 = \omega^2 l^2/2z_H c s_0^2, \quad \Omega_2 \sim \omega l/2\theta_p z_H s_0.$$

Достаточно далеко за экраном $(Ds_0 \gg 1)$, где флуктуации поля распределены по нормальному закону, частотная корреляция флуктуаций интенсивности $\Gamma_{I,\omega} = |\Gamma_\omega|^2$ $(s_0^2 \gg 1)$ (по аналогии с (8.1.46)). Отсюда ясно, что динамический спектр радиоизлучения источника (рис. 8.10) может иметь «пятнистую» структуру, размер по частоте которой будет определяться минимальной из величин Ω_1 и Ω_2. Если при этом неоднородности движутся со скоростью $\mathbf{v}_H$ в плоскости, где расположены лучи, то при $\Omega_2 < \Omega_1$ динамический спектр может состоять из наклонных «полос». Такие полосы наблюдаются в динамическом спектре радиоизлучения пульсаров [58]. Величина Ω_2 может быть вызвана рефракцией на крупномасштабных неоднородностях межзвездной среды с масштабами $l \sim 10^{12}-10^{13}$ см [58, 59].

Предположим, что излучаемый источником импульс радиоволн достаточно короткий, так что $\gamma_0(\omega)$ можно вынести из-под знака интеграла (11). Тогда, подставляя (14) в (11) при $\rho_\omega = 0$, получаем

$$\langle I(t)\rangle \propto \exp(-\Delta t/\Delta t_0), \quad \Delta t_0 \sim 1/\Omega.$$

Физика данного эффекта расплывания связана с дополнительным запаздыванием рассеянных волн ввиду увеличения на $z_H \vartheta_s^2/2$ длины пути в пространстве за экраном. Такое расплывание приводит к исчезновению импульсного излучения пульсаров на низких частотах $(f < 10^8$ Гц) [3]. Если $D_s(\rho_\perp)$ достаточно велика, то Δt_0 определяется минимальным масштабом неоднородностей l_m и $\Delta t_0 \propto \omega^{-4}$. Если же на масштабе l_m $s_0^2(l_m) \ll 1$, то для степенного вида $\Phi_N(\varkappa)$, аналогично рассмотренным выше случаям углового и частотного спектра сигналов, принимая за характерную ширину импульса величину $\Delta t^*_{\text{эф}}$ для l^*, получаем, что $\Delta t_0^* \propto 1/\omega^{2p/(p-2)}$. Такого типа формулы часто приводятся в литературе. Необходимо, однако, помнить весьма ограниченный характер области их применимости.

Формулы (12)—(14) легко обобщаются на случай сферической волны (п. 8.1). В этом случае, в частности, в (14) необходимо сделать замену $z_H \to z_1 \cdot z_2/z$.

ГЛАВА 9

РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН В ИОНОСФЕРЕ И МАГНИТОСФЕРЕ

9.1. Метровые радиоволны в ионосфере

Наиболее простые и общие выводы теории распространения электромагнитных волн в плазме исторически были впервые проверены в условиях земной ионосферы. Исследования распространения радиоволн в ионосфере всегда тесно увязывались с запросами радиосвязи. За многие десятилетия накоплен колоссальный научно-практический материал, позволяющий выявить ряд суточных, сезонных и широтных зависимостей и особенностей распространения при наличии возмущений и спорадических образований [1, 2]. На роли этих зависимостей и факторов мы здесь подробно останавливаться не можем.

Свойства ионосферных областей рассматривались в гл. 1. В этом параграфе для нас наиболее существенно влияние области F, которая характеризуется как большими вертикальными размерами, так и максимальными значениями концентрации электронов $N(z)$. Реально форма области F не вполне симметрична относительно максимума электронной концентрации $N_{\max}$. Несмотря на это часто используется параболическая аппроксимация, которая является хорошим приближением для высот от начала слоя до его максимума при $z = z_0$, где $N = N_{\max}$. Если использовать параболическую модель, то

$$N(z) = N_{\max}\left\{1 - \frac{(z - z_0)^2}{z_m^2}\right\}, \tag{9.1.1}$$

где z_m — полутолщина слоя. Естественно, что при $z_0 > z_m$ в силу положительности N формулу (1) нужно применять только к интервалу высот z от $z_0 - z_m$ до $z_0 + z_m$.

В диапазоне длин волн $\lambda_0 = 2\pi c/\omega = c/f$ от 1 до 10 м частоты $f = 30$—300 МГц заметно превышают частоты $f_{\text{н}} = \omega_{\text{н}}/2\pi \leqslant 1$ МГц. Поэтому влияние магнитного поля Земли $\mathbf{H}_0$ в этом диапазоне незначительно, его можно в первом приближении не учитывать. То же можно отнести и к движению ионов, тепловому движению электронов и столкновениям электронов с другими частицами. Так что можно вместо (3.1.17) использовать для диэлектрической проницаемости простейшее соотношение $\varepsilon = 1 - v_e$. Используя (1), имеем

$$\varepsilon(z) = n^2 = 1 - \frac{4\pi e^2 N(z)}{m\omega^2} = 1 - \frac{f_k^2}{f^2}\left\{1 - \frac{(z - z_0)^2}{z_m^2}\right\}, \tag{9.1.2}$$

где $f_h = \sqrt{e^2 N_{\max}/\pi m} \approx 9\cdot 10^3 \sqrt{N_{\max}}\ c^{-1}$.

Согласно выводам п. 5.2 положение точки отражения (поворота) при падении волны на слой под углом ϑ_0 определяется условием

$$\varepsilon(z_n) = \sin^2\vartheta_0. \tag{9.1.3}$$

При нормальном падении ($\sin\vartheta_0 = 0$) из (2), (3) получаем, что от уровня $N = N_{\max}$ отражение происходит при $f = f_k$. Если $f > f_k$, то отражение при $\sin\vartheta_0 = 0$ невозможно. В этом смысле $f = f_k$ является предельной и ее называют критической частотой области F (при нормальном падении).

В области F всегда $N < 10^6$ см$^{-3}$ (гл. 1) и $f_k \lesssim 10$ МГц. Тогда при $\cos^2\vartheta_0 \sim 1$ отражение не возникает и радиоволны проходят через ионосферу. Поэтому метровые волны используются в радиоастрономии, при приеме сигналов с искусственных спутников Земли (ИСЗ) и с других устройств. Отражение этих волн от ионосферы возможно только при очень пологом распространении ($\cos^2\vartheta_0 \ll 1$) на трассах с очень сильным разнесением наземных пунктов передачи и приема.

В отсутствие достаточно резких мелкомасштабных неоднородностей электронной концентрации, что типично для среднеширотной ионосферы, при $\lambda_0 = 1$—10 м длины волн неизмеримо меньше характерных регулярных масштабов, так что применимо приближение геометрической оптики. При этом очень часто в указанном диапазоне выполнено условие $v_e \ll 1$.

При расчете фазовых траекторий*) для плоскослоистых моделей ионосферы на основе (5.2.3) какие-либо принципиальные трудности отсутствуют. Возьмем для примера параболический слой (1), (2). При $z < (z_0 - z_m)$, $z_0 > z_m$, или при $z > (z_0 + z_m)$ для этой модели траектории представляют прямые линии. Будем рассматривать распространение в плоскости yz. Тогда из (5.2.3) с использованием (2) имеем

$$\frac{dy}{\sin\vartheta_0} = \frac{dz}{\left\{\cos^2\vartheta_0 - \dfrac{f_k^2}{f^2}\left\{1 - \dfrac{(z - z_0)^2}{z_m^2}\right\}\right\}^{1/2}}. \tag{9.1.4}$$

Предполагаем, что волна падает из вакуума при $z = z_0 - z_m$ в точке $y = y_m$. Тогда, интегрируя (4), приходим к уравнению траектории, справедливому при $(z - z_m) < z < (z_0 + z_m)$,

$$\frac{y - y_0}{\sin\vartheta_0} = \\ = z_m\frac{f}{f_k}\ln\left\{\left\{\left(\cos^2\vartheta_0\frac{f^2}{f_k^2} - 1 + \left(\frac{z - z_0}{z_m}\right)^2\right)^{1/2} + \frac{z - z_0}{z_m}\right\}\left(\cos\vartheta_0\frac{f}{f_k} - 1\right)^{-1}\right\}. \tag{9.1.5}$$

При условии

$$\cos^2\vartheta_0\frac{f^2}{f_k^2} \gg 1 \tag{9.1.6}$$

в первом приближении получаем прямолинейную траекторию не только вне параболического слоя, но и внутри него, а именно,

$$\frac{y - y_m}{\sin\vartheta_0} = \frac{z - z_0 + z_m}{\cos\vartheta_0}. \tag{9.1.7}$$

*) Так как сейчас мы считаем $H_0 = 0$, то эти траектории совпадают с групповыми (лучами).

Если вернуться к дифференциальному уравнению (4), то результат (7) получается при отсутствии влияния плазмы $\left(f_k^2 \to 0\right)$, когда $dy/dz = \operatorname{tg} \vartheta_0$. Поправки в правой части (7), содержащие отношение $f_k/f \ll 1$, будут квадратичными. Например, на выходе из параболического слоя при $z = z_0 + z_m$, используя (5), получаем

$$\frac{y - y_m}{\sin \vartheta_0} = \ln \frac{\cos \vartheta_0 (f/f_k) + 1}{\cos \vartheta_0 (f/f_k) - 1},$$

откуда при условии (6) имеем

$$\frac{y - y_m}{\sin \vartheta_0} = \frac{2z_m}{\cos \vartheta_0} + \frac{2}{3} \frac{z_m}{\cos \vartheta_0} \frac{f^2}{f_k^2}.$$

При приеме в метровом диапазоне радиоизлучения дискретных галактических источников, сигналов с геофизических ракет и ИСЗ часто ставят своей целью измерение угла рефракции $\delta\vartheta$. Несмотря на то, что ионосферная рефракция в этом диапазоне обычно слабая, она представляет интерес, так как дает возможность определить интегральное содержание электронов в вертикальном столбе ионосферы.

Пусть источник в точке B находится на высоте z_B (может быть, за пределами ионосферы), а излучение принимается на поверхности Земли в пункте A (рис. 9.1). Если бы плазма отсутствовала, то источник был бы «виден» под углом ϑ_0. Из-за влияния плазмы направление прихода излучения в точке A характеризуется углом ϑ_A. Угол рефракции $\delta\vartheta$ представляет собой разность

$$\delta\vartheta = \vartheta_0 - \vartheta_A \tag{9.1.8}$$

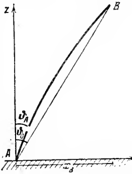

Рис. 9.1. Рефракция метровых волн в ионосфере (к определению угла рефракции ϑ_A).

и при выполнении условия (6) считается малым ($\delta\vartheta \ll 1$), что подтверждается расчетами. Для простейшей модели плоскослоистой ионосферы мы не будем обращаться к решению уравнения для траектории. Фактически для нас будет достаточным знание закона преломления, который здесь имеет вид $n \sin \vartheta = \sin \vartheta_A \, (n_A = 1)$.

Расстояние до источника вдоль земной поверхности x_B (рис. 9.1) можно определить двояко, следствием чего будет равенство

$$\operatorname{tg} \vartheta_0 z_B = \int_0^{z_B} \operatorname{tg} \vartheta \, dz. \tag{9.1.9}$$

Используя закон Снеллиуса при $n^2 = 1 - v_e$, из (9) имеем

$$\operatorname{tg} \vartheta_0 z_B = \int_0^{z_B} \frac{\sin \vartheta_A \, dz}{\sqrt{\cos^2 \vartheta_A - v_e(z)}}. \tag{9.1.10}$$

При условии (6) и слабой рефракции, когда $\cos^2 \vartheta_0 \gg v_e$, имеем $(\cos^2 \vartheta_A - v_e)^{-1/2} \sim (1 - v_e/2\cos^2 \vartheta_A)/\cos \vartheta_A \approx (1 - v_e/2\cos^2 \vartheta_0)/\cos \vartheta_0$. Далее, из (8) $\sin \vartheta_A = \sin(\vartheta_0 - \delta\vartheta) \approx \sin \vartheta_0 - \delta\vartheta \cos \vartheta_0$. Подставляя приближенные выражения для числителя и знаменателя в (10) и пренебрегая

малыми слагаемыми второго порядка, получаем

$$\delta\vartheta = \frac{2\pi e^2 \operatorname{tg} \vartheta_0}{m\omega^2 \cos^2 \vartheta_0 \, z_B} \int\limits_0^{z_B} N(z)\, dz. \qquad (9.1.11)$$

При $\cos\vartheta_0 \sim 1$ и выполнении условий (6) из (11) получаем, что $\delta\vartheta \ll 1$. Можно заметить, что ограничение (6) недостаточно для обеспечения малости $\delta\vartheta$ при $\cos^2\vartheta_0 \ll 1$. Однако в подобных случаях нужно использовать не плоскослоистые, а сферическислоистые модели ионосферы.

Можно считать, что в стандартных условиях метровые радиоволны проходят через ионосферные слои. Наряду с рефракцией может оказаться существенным и рассеяние этих волн. В области F это рассеяние незначительно и для его обнаружения нужны специальные средства с высокой чувствительностью [3]. Частичное исключение составляют приэкваториальная и авроральная области F, а также эта область при искусственном воздействии на нее мощным наземным радиоизлучением (гл. 10). Основным источником рассеяния являются неоднородности, ориентированные вдоль геомагнитного поля $\mathbf{H}_0$ с поперечными масштабами в несколько метров в области E (на высотах в 100—120 км). Их появление связано с ионосферными токами [1, 4]. Поэтому такие неоднородности систематически появляются только в приэкваториальной или авроральной областях E, где ионосферные токи достигают максимальных интенсивностей. Эти токи выделяются на фоне общей глобальной картины в виде двух подсистем, образующих экваториальную и авроральную токовые струи [1, 4].

Другой тип неоднородностей, который может дать рассеяние, связан с турбулентностью нижней ионосферы. Турбулентное перемешивание особенно эффективно в этом отношении при наличии в ионосфере плазменных образований метеорного происхождения.

9.2. Декаметровые радиоволны в ионосфере

В этом параграфе в сжатой форме будет рассмотрено распространение в ионосфере декаметровых радиоволн ($\lambda_0 = 15—100$ м), которые часто называют короткими волнами (КВ). Этот диапазон более 50 лет используется для радиосвязи. В последние годы увеличение интереса к этому диапазону обусловлено доказательством возможности волноводного распространения на очень большие расстояния, иногда достигающие кругосветных. Существенную роль играет использование КВ для связи со спутниками [2, 3] и для искусственного воздействия мощным наземным радиоизлучением на ионосферу с конечной целью направленного изменения свойств среды (гл. 10).

Сначала остановимся на ряде известных положений, вытекающих из простых моделей для электронной концентрации при наклонном падении волн. Считаем, что отражение КВ происходит от области F, которая вносит основной вклад в преломление. Области E и D не играют обычно определяющей роли при анализе траекторий КВ, но могут приводить к сильному поглощению.

Пусть ионосфера является плоскослоистой. Не будем учитывать сначала влияние магнитного поля Земли $\mathbf{H}_0$. Это пренебрежение не столь обосновано, как в метровом диапазоне. Однако и для КВ $f > f_H$. Существенное превышение f по сравнению с f_H имеет место при $\lambda_0 \lesssim 30$ м. При $H_0 = 0$ отражение волн на часто-

те $\omega = 2\pi f$ при падении на ионосферу под углом ϑ_0 происходит на уровне $z = z_n$, который согласно (9.1.3) определяется из равенства

$$4\pi e^2 N(z)/m\omega^2 = e^2 N(z)/\pi m f^2 = \cos^2 \vartheta. \tag{9.2.1}$$

При нормальном падении $\cos \vartheta_0 = 1$. Поэтому получается простая связь между частотами волн, отражающимися от данного уровня $N(z_n)$ при нормальном и наклонном падении, а именно,

$$f_{\text{накл}} = f_{\text{норм}}/\cos \vartheta_0. \tag{9.2.2}$$

Как указывалось, частоты $f = f_{\text{к}}$, отражающиеся от максимума слоя ($N = N_{\max}$), называются критическими. Поскольку здесь уровень, где $N = N_{\max}$, при любых углах падения, естественно, один и тот же, можно безоговорочно использовать (2), так что

$$f_{k,\text{ накл}} = f_{k,\text{ норм}}/\cos \vartheta_0. \tag{9.2.3}$$

Соотношения (2), (3) означают, что на фиксированной высоте при наклонном падении происходит отражение более высоких частот, чем при вертикальном падении.

Длины волн КВ диапазона λ_0 по-прежнему остаются заметно меньше характерных регулярных ионосферных масштабов, что позволяет использовать приближение геометрической оптики. Лучевая трактовка строго неприменима вблизи уровней отражения $z = z_n$. Однако размеры зон при $z \approx z_n$, где нужно использовать строгие решения, невелики по сравнению со всем путем распространения. Если интересоваться направлением лучей по выходе из этих зон, то можно воспользоваться приближением геометрической оптики, дополнив его элементарным требованием равенства углов падения и отражения.

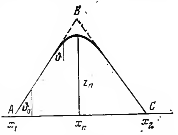

Рис. 9.2. Групповой путь при наклонном распространении радиоволн в ионосфере.

Рассмотрим траекторию распространения между наземными пунктами x_1 и x_2 при наклонном падении (рис. 9.2). Несомненно, что из набора «виртуальных» траекторий нужно выбрать одну, которой соответствует по отношению к другим близким ионосферным траекториям минимальный набег фазы (принцип Ферма). Это утверждение имеет довольно очевидный характер. Более детальное обоснование можно найти в гл. 6 [6]. Фаза отраженной волны, как это было показано в п. 5.2, достаточно точно для толстых слоев определяется из приближения геометрической оптики.

Близким к только что рассмотренному вопросу является установление связи между групповыми путями при наклонном и нормальном падении на ионосферу. В однородной среде групповой путь $L_{\text{гр}}$ по определению равен

$$L_{\text{гр}} = cL/v_{\text{гр}}. \tag{9.2.4}$$

За время группового запаздывания $\Delta t_{\text{гр}} = L/v_{\text{гр}}$ сигнал пройдет путь L с групповой скоростью $v_{\text{гр}}$, а путь $L_{\text{гр}}$ — со скоростью света в вакууме c. При наклонном падении в приближении геометрической оптики имеем из (4)

$$L_{\text{гр,накл}} = 2 \int\limits_{AB} \frac{dl}{n(\omega, z)}, \qquad (9.2.5)$$

где использованы замены L на $\int dl$ (интегрирование проводится вдоль траектории AB) и $v_{\text{гр}} = cn$ из (3.2.17) при $\eta = 1$.

Из рис. 9.2 видно, что $dl = dx/\sin\vartheta$. Используя закон Снеллиуса $n \sin\vartheta = \sin\vartheta_0$ для $L_{\text{гр, накл}}$ [5], получаем

$$L_{\text{гр,накл}} = \int\limits_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sin\vartheta_0} = \frac{x_2 - x_1}{\sin\vartheta_0} = \frac{2z_{\text{д,накл}}}{\cos\vartheta_0}. \qquad (9.2.6)$$

Таким образом, групповой путь равен сумме сторон AB и BC треугольника ABC, который описан около истинной траектории AC. Для того чтобы найти время группового запаздывания, нужно поделить путь $2AB$ на скорость света в вакууме c. Результат (6) называют иногда теоремой Брайта и Тюва.

Высоту $z_{\text{д, накл}}$ (6) называют действующей высотой при наклонном падении под углом ϑ_0. Установим связь между групповыми путями при наклонном $L_{\text{гр, накл}}$ (6) и нормальном $L_{\text{гр, норм}}$ падении. Сначала заметим, что

$$n^2(f\cos\vartheta_0,\ z)\cos^2\vartheta_0 = n^2(f,\ z)\cos^2\vartheta, \qquad (9.2.7)$$

при учете закона Снеллиуса $\sin^2\vartheta_0 = n^2 \sin^2\vartheta$

$$n^2(f\cos\vartheta_0,\ z)\cos^2\vartheta_0 = \left(1 - \frac{e^2 N(z)}{\pi m f^2 \cos^2\vartheta_0}\right)\cos^2\vartheta_0 =$$

$$= n^2(f, z) - \sin^2\vartheta_0 = n^2(f, z)\cos^2\vartheta.$$

Для $z_{\text{д, накл}}$ можно в соответствии с рис. 9.2 написать

$$z_{\text{д,накл}}(f, \vartheta_0) = \frac{\cos\vartheta_0}{2}\int \frac{dl}{n(f, z)} = \int\limits_0^{z_{n,\text{накл}}} \frac{\cos\vartheta_0\, dz}{\cos\vartheta\, n(f, z)}.$$

Используя (7) и имея в виду, что при замене f на $f\cos\vartheta_0$ предел интегрирования $z_{n,\text{ накл}}$ нужно заменить на $z_{n,\text{ норм}}$, получаем

$$z_{\text{д, накл}}(f,\ \vartheta_0) = z_{\text{д, норм}}(f\cos\vartheta_0). \qquad (9.2.8)$$

Далее из (6), (8) $L_{\text{гр, накл}}\cos\vartheta_0 = 2z_{\text{д,накл}} = 2z_{\text{д, норм}}(f\cos\vartheta_0)$. Отсюда окончательно имеем

$$L_{\text{гр, накл}}(f,\ \vartheta_0)\cos\vartheta_0 = L_{\text{гр, норм}}(f\cos\vartheta_0). \qquad (9.2.9)$$

Соотношение (7) позволяет прогнозировать групповые пути и рас-

стояния $x_2 - x_1 = L_{\text{гр, накл}} \cos\vartheta_0$ по данным вертикального зондирования ионосферы (гл. 11).

Мы уже отмечали актуальность исследований законов распространения КВ на сверхдальних и кругосветных трассах. Факты установления радиосвязи на глобальных расстояниях отмечались начиная с 30-х годов, но только в последнее десятилетие это направление четко выделилось и стало одним из основных в области распространения радиоволн. При многоскачковом распространении (с отражениями от поверхности Земли и области F ионосферы) амплитуда сигнала существенно ослабляется при прохождении через нижнюю ионосферу. Особенно сильным будет поглощение КВ в области D в дневное время. Поэтому при объяснении явлений сверхдальней радиосвязи естественным является предположение о возникновении в ионосфере межслоевого канала.

Вопросам канализированного распространения КВ посвящено огромное число работ. Имеется несколько связанных с этой проблемой монографий, среди которых отметим наиболее современную [5]. В последней книге много внимания уделено влиянию неоднородности ионосферы по горизонтали. Здесь мы, опираясь на проведенный в [5] анализ, поставим перед собой лишь одну цель: проиллюстрировать принципиальную возможность формирования в ионосфере каналов для сверхдальней радиосвязи.

Аппроксимируем ионосферу сферически симметричным слоем плазмы и используем сферическую систему координат (r, θ, Φ). Такая аппроксимация связана с необходимостью рассматривать волноводное распространение на расстояния, соизмеримые с радиусом Земли. В межслоевые каналы могут захватываться только КВ с относительно высокими частотами, превышающими $f_{k,\text{ норм}}$. Поэтому в первом приближении неучет влияния $\mathbf{H}_0$ возможен.

Волновое уравнение (5.2.22) в отсутствие поглощения может быть при учете соотношения $\operatorname{div}\mathbf{H} = 0$ записано в виде

$$\operatorname{rot}\left(\frac{1}{\varepsilon}\operatorname{rot}\mathbf{H}\right) - \frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{H} = 0. \tag{9.2.10}$$

Уравнение (10) описывает поле $\mathbf{H}$ вне области с источником. Хотя в явном виде этот источник мы учитывать не будем, примем, что поле $\mathbf{H}$ возбуждается только вертикальными токами. Если ввести вектор Герца или векторный потенциал $\mathbf{A}$, то они будут иметь лишь радиальную компоненту [5, 16], так что можно написать $\mathbf{A} = \frac{\mathbf{r}}{r} A$. Имея в виду, что $\mathbf{H} = \operatorname{rot}\mathbf{A}$, мы можем для случая возбуждения волновода вертикальными токами использовать равенство $\mathbf{H} = \operatorname{rot}\left(\frac{\mathbf{r}}{r} A\right)$ и свести (10) к уравнению для скалярной функции $A(r, \theta, \Phi)$. В сферической системе координат оно принимает вид

$$\varepsilon(r)\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{\varepsilon}\frac{\partial A}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial A}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 A}{\partial\Phi^2} + \varepsilon\frac{\omega^2}{c^2}A = 0. \tag{9.2.11}$$

При $\varepsilon = \varepsilon(r)$ переменные разделяются. Ищем решение в виде

$$A = R(r)Y(\theta, \Phi). \tag{9.2.12}$$

Угловая часть (12) может быть представлена в виде $Y(\theta, \Phi) = \exp(is\Phi) \times P_p^s(\cos\theta)$, где s — целое азимутальное число, $P_p^s(\cos\theta)$ — присоединенные функции Лежандра, удовлетворяющие уравнению

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}\left(\sin\theta\frac{dP_p^s}{d\theta}\right) - \frac{s^2}{\sin^2\theta}P_p^s + p(p+1)P_p^s = 0.$$

Взятый с обратным знаком множитель в последнем слагаемом — $p(p+1)$, где p — целые числа, играет роль постоянной разделения. Прежде чем написать уравнение для радиальной части в (12), сделаем замену $R(r) = \sqrt{\varepsilon r}\,\psi$. Тогда из (11), (12) имеем

$$r^2 \frac{d^2\psi}{dr^2} + \left\{ \frac{\omega^2}{c^2} \varepsilon r^2 - r^2 \sqrt{\varepsilon r} \frac{d}{dr^2} \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon r}} \right) - p(p+1) \right\} \psi = 0. \quad (9.2.13)$$

Так как вертикальные размеры волновода много меньше радиуса Земли r_0, полагаем $z = r - r_0$ и $z \ll r_0$. Тогда уравнение (13) упрощается, так что

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \left\{ \frac{p(p+1)c^2}{\omega^2 r_0^2} - \varepsilon(z) \left(1 + \frac{2z}{r_0} \right) + \frac{3c^2}{4\varepsilon^2\omega^2} \left(\frac{d\varepsilon}{dz} \right)^2 + \frac{c^2}{2\varepsilon\omega^2} \frac{d^2\varepsilon}{dz^2} \right\} \psi = 0. \quad (9.2.14)$$

В (14) возможны дополнительные упрощения, так как грубо можно принять, что $\varepsilon = 1 - v_e$ близко к единице ($v_e \ll 1$) и что длины волн λ_0 значительно меньше характерных ионосферных масштабов. Тогда из (14) приближенно получаем уравнение

$$\frac{d^2\psi}{dz^2} + \frac{\omega^2}{c^2} \left\{ -\frac{p(p+1)c^2}{r_0^2\omega^2} + 1 - \frac{4\pi e^2 N(z)}{m\omega^2} + \frac{2z}{r_0} \right\} \psi = 0, \quad (9.2.15)$$

которое можно записать в обозначениях, характерных для уравнения Шредингера, описывающего движение частицы с энергией $\mathscr{E}$ в поле с потенциалом $U(z)$, а именно,

$$d^2\psi/dz^2 + k_0^2 [\mathscr{E} - U(z)]\,\psi = 0, \quad (9.2.15а)$$

где $k_0 = \omega/c$, $\mathscr{E} = -p(p+1)c^2/r_0^2\omega^2$,

$$U(z) = -1 + \frac{4\pi e^2 N(z)}{m\omega^2} - \frac{2z}{r_0}.$$

На языке движения частицы при наличии минимумов $U(z)$ могут возникать потенциальные ямы, где будут захватываться частицы. В терминах распространения волн возникновению потенциальных ям отвечает захват электромагнитной волны в канале. Существенно также то, что одним из «потенциальных барьеров» является поверхность Земли. Могут образоваться каналы между Землей и ионосферной областью E и Землей и областью F. Для появления таких каналов нужно, чтобы падение волн происходило под такими углами ϑ_0, чтобы радиоволны смогли отразиться от соответствующих слоев.

Важным и принципиальным для дальней связи является вывод о возникновении межслоевого канала (между областями E и F). При $N(z) = 0$ функция $U(z)$ в (15а) меняется с высотой z монотонно. В то же время, чтобы образовался межслоевой канал, необходимо наличие минимума $U(z)$. Естественно, что появление экстремума связано с наличием зависимости N от z. Из условия $dU/dz = 0$ находим, что межслоевой канал должен сформироваться вблизи уровня $z = z_{мс}$, когда

$$v_e(z) N^{-1} (dN/dz) = 2/r_0. \quad (9.2.16)$$

Непосредственно над областью E имеется так называемая впадина, в которой сначала $dN/dz < 0$, и согласно (16) канал сформироваться не может. Далее, однако, при $z \gtrsim 150$ км производная $dN/dz > 0$ до высот максимума области F. Как показывают многочисленные численные расчеты $U(z)$ [5], условие (16) выполняется на определенном $z = z_{мс}$. Вблизи уровня $z = z_{мс}$ и формируется канал. Захват радиоволн обеспечивается «подбором» вели-

чины $\mathscr{E} = -\dfrac{p(p+1)}{r_0^2}\dfrac{c^2}{\omega^2}$. Как показано в [5], для излучателя, находящегося на поверхности Земли, всегда $0 \leqslant \mathscr{E} \leqslant 1$.

Причины появления межслоевого канала ясны: волны способны отражаться при достаточно пологом распространении как от области F, так и от области E. В то же время нужно понимать, что осуществление такой схемы распространения сопряжено с ограничениями и возможно при одновременном «подборе» параметров, характеризующих структуру ионосферы, угол входа в канал и частоту волны.

9.3. Низкочастотные электромагнитные волны в ионосферной и магнитосферной плазме

В отсутствие магнитного поля $\mathbf{H}_0$ на низких частотах плотная плазма непрозрачна. Действительно, $\tilde{n}^2 = 1 - v_e < 0$, если $v_e = \omega_{e0}^2/\omega^2 > 1$. При $v_e \gg 1$ электромагнитные волны через достаточно толстые плазменные слои пройти не могут. Положение меняется, как это неоднократно отмечалось в гл. 3, 4, для магнитоактивной плазмы. При $v_e \gg 1$ для высокочастотных волн ($u_e < 1$) непрозрачность сохраняется, но при $u_e > 1$ возможно распространение в условиях применимости квазипродольного приближения волн обыкновенного типа (свистовые волны). Если перейти в область еще более низких частот ω, меньших не только гирочастоты электронов ω_H, но и ионов Ω_H, то можно говорить о распространении двух типов волн, которые при $\omega \ll \Omega_H$ можно назвать магнитогидродинамическими (гл. 3).

В этом параграфе основное место мы уделим свистовым волнам с частотами $f = 1$—15 кГц и, в частности, самим свистящим атмосферикам (свистам) [2, 3, 7, 8]. По диапазону свистовые волны оказываются в той же области частот, что и длинные и сверхдлинные радиоволны. Хотя между ними и есть связь, но можно говорить о разных условиях распространения и различных назначениях этих волн. Под длинными волнами (при частотах f в несколько килогерц — сверхдлинными) понимают низкочастотные радиоволны, распространяющиеся в волноводе Земля — ионосфера. Эти волны получили огромное практическое применение при обеспечении дальней и устойчивой радиосвязи, в радионавигации и др. Верхняя «стенка» волновода располагается у нижней кромки ионосферы и представляет собой слабоионизированную плазму. Необходимо иметь в виду, что волны необыкновенного типа в плазму проникать не могут. Экспериментальные данные и результаты расчетов свидетельствуют о том, что трансформация волн в волноводе в свистовые волны происходит с коэффициентом, малым по сравнению с единицей.

Мы здесь законы волноводного распространения длинных (сверхдлинных) радиоволн рассматривать не будем.

Во-первых, задача о распространении этих волн очень сложна и громоздка в математическом отношении (особенно, если учитывать влияние сферичности Земли и ионосферы). Конкретные выводы достигаются, как правило, применением вычислительной техники. Далее, что самое главное, плазменный аспект задачи имеет не очень большой удельный вес. Основные трудности связаны здесь с решением сложной краевой задачи электродинамики, а не с учетом особенностей поведения плазмы. Трудно рекомендовать источник, в котором в компактной форме были бы разобраны вопросы теории и практики распространения длинных (сверхдлинных) волн. Можно выделить монографию [9], а также гл. 8 [2].

Свистящие атмосферики. Говоря о просачивании низкочастотного радиоизлучения в ионосферу и магнитосферу, нужно обратиться в первую очередь к сигналам естественного происхождения — свистящим атмосферикам (свистам). Причиной появления свистов являются атмосферные электрические разряды. После прохождения через приземную плазму из-за дисперсии среды эти сигналы воспринимаются в громкоговорителе приемника

как свистящие звуки, тогда как при приеме обычных атмосфериков (сфериков), распространяющихся в канале Земля — ионосфера, они воспринимаются в громкоговорителе как треск *).

Обычно частота низкочастотного излучения меняется со временем t, но не очень быстро. Поэтому вполне возможно определить частоту f, соответствующую данному моменту времени — мгновенную частоту. С помощью специальным образом сконструированных анализаторов по максимальному отклику разонаторов с острой настройкой можно непосредственно получить зависимость наблюдаемой частоты f от времени t. В частотном интервале от 1 до 8 кГц была установлена следующая зависимость:

$$t = D(\sqrt{f})^{-1}, \tag{9.3.1}$$

где D — коэффициент, называемый дисперсией.

Если появлению свиста предшествует сферик, то свисты именуются длинными, если же такой предвестник отсутствует — короткими [7, 8, 10]. Дисперсия D длинных свистов обычно в два раза превышает дисперсию для коротких свистов. Эта закономерность и ряд других фактов могут быть объяснены, опираясь на механизм распространения свистов.

Согласно этому механизму нужно принять, что движение низкочастотных электромагнитных сигналов проходит по траекториям, связанным с силовыми линиями геомагнитного поля. Если опираться на это утверждение, то объяснение поведения длинных и коротких свистов будет вполне естественным. И те и другие вызываются электрическими разрядами в атмосфере, которые практически происходят на земной поверхности. Допустим, что разряд произошел в северном полушарии. Тогда приемник фиксирует сферик и несколько позже сигнал, который прошел по траектории до симметричной относительно геомагнитного экватора точки в южном полушарии и затем

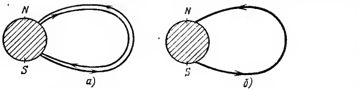

Рис. 9.3. Траектория свистящего атмосферика: *а*) длинный свист; *б*) короткий свист.

примерно по той же траектории вернулся к приемнику. Такой сигнал совершает двойной путь по подковообразной траектории (рис. 9.3, *а*).

Естественно, что приемная аппаратура может регистрировать и сигналы, возникающие при разрядах в южном полушарии. Эти сигналы проходят по подковообразному пути один раз, их дисперсия вдвое меньше дисперсии длинных свистов (рис. 9.3, *б*). Существует обширный наблюдательный материал, свидетельствующий о многократном прохождении сигналов по путям, изображенным на рис. 9.3 (свистовые эхо) [7, 8, 10].

Анализ зависимостей мгновенной частоты от времени t, называемых спектрограммами, очень часто подтверждает закономерность (1). Это иллюстрируется на рис. 9.4, *а*. Однако при приеме свистов на относительно высоких широтах вид спектрограммы в ее высокочастотной части изменяется. Такого типа спектрограмма изображена на рис. 9.4, *б*. Частота $f = f_N$, которой соответствует минимальное время прихода, называется носовой [7, 8]. Спектрограммы этого типа являются более общими по сравнению с представленными на рис. 9,4, *а*. Отсутствие «носов» у многих динамических спектров связано не с принципиальными, а с аппаратурными причинами.

*) Это в большей степени справедливо, когда молниевый разряд происходит не очень далеко от приемника.

Сейчас выявилось, что распространение свистовых волн через ионосферу и магнитосферу по траекториям Земля — Земля (рис. 9.3) возможно только при наличии в околоземной плазме сильно вытянутых вдоль геомагнитного поля неоднородностей электронной концентрации с поперечными масштабами в десятки километров, которые обеспечивают канализацию свистов. Присутствие таких геомагнитных каналов по крайней мере в приэкваториальной магнитосфере необходимо для наземного приема свистов, тогда как регистрация этих сигналов на ИСЗ возможна и в отсутствие каналов. При определении траектории свистов очень существенны ограничения на ориентацию скорости $\mathbf{v}_{гр}$, которые вытекают из (3.4.14). Но сами по себе эти ограничения недостаточны для того, чтобы излучение распространялось по путям, изображенным на рис. 9.3.

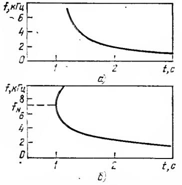

Рис. 9.4. Спектрограммы свистящих атмосфериков: *а*) без носовой частоты; *б*) с носовой частотой.

ОНЧ-излучения. Существует естественное излучение магнитосферы в том же диапазоне частот, что и свисты. По некоторым рекомендациям иногда термин «очень низкочастотное» (ОНЧ) относят к интервалу 15—5 кГц, а для интервала 5—1 кГц используется наименование «крайне низкочастотное» (КНЧ) излучение. Мы здесь этого разделения проводить не будем и термином «ОНЧ-излучение» будем характеризовать естественное радиоизлучение во всем свистовом диапазоне. Заметим, что в выборе наименований здесь еще нет жесткой регламентации. В некоторых обзорах и книгах [7, 11] использовался также термин «ультранизкочастотное излучение» (УНЧ-излучение).

В очень сжатой форме дадим классификацию этих излучений и укажем на некоторые основные их характеристики [7, 11, 12].

ОНЧ-излучение заведомо не связано с атмосферными разрядами. Его появление тесным образом связано с состоянием магнитосферной плазмы. Известны три основных типа излучения:

1) непрерывное радиоизлучение в широком спектре частот в виде *шипений*, продолжающееся обычно в течение часа;

2) излучение, именуемое *хорами*, представляющее совокупность коротких всплесков с возрастающими частотами;

3) различные формы дискретного радиоизлучения длительностью порядка 1 с с узкими спектрами, изменяющимися во времени (поднимающиеся, падающие и установившиеся тона, крюки и др.).

Хоры занимают промежуточное положение и имеют свойства как непрерывного, так и дискретного излучения.

Шипения представляют обычно шумы и не имеют тонкой структуры. Спектр перекрывает интервал частот Δf порядка 5 кГц. Интенсивность излучения падает с ростом частоты. Максимальные интенсивности шипений I_f при наземном приеме на средних широтах 10^{-14} Вт·м$^{-2}$·Гц$^{-1}$. При измерениях на ИСЗ $I_f \approx 10^{-11}$ Вт·м$^{-2}$·Гц$^{-1}$. В период сильных геомагнитных возмущений продолжительность шипений возрастает с часа до 10 часов.

Хоры состоят из большого набора хорошо разделенных сигналов. Для каждого из сигналов характерно резкое возрастание амплитуды с постепенным спадом. Длительность сигнала составляет 0,1—0,5 с; их повторяемость изменяется от 1 до 10 с. В каждом сигнале частота нарастает грубо от 1,5 до 3,5 кГц. Интенсивность хоров примерно такая же, как у шипений. Хоры появляются более часто в утренние часы*). На высоких широтах

*) В первоначальных работах использовалось наименование «утренние хоры». Появление таких названий порождено большим сходством при восприятии на слух хоров со щебетанием птиц в ранние утренние часы.

ситуация отличается, и утренний максимум сильно маскируется так называемыми полярными хорами [8, 12].

Дискретное ОНЧ-излучение имеет более редкую появляемость, если исключить случаи сильной геомагнитной возмущенности. Длительность каждого комплекса этого типа излучения, несмотря на разнообразие динамических спектров, обычно около 1 с. Иногда всплески повторяются, а иногда являются изолированными.

Не имея возможности входить здесь в детали, отметим, что некоторые типы ОНЧ-излучения могут индуцироваться в магнитосфере сильными свистами или наземными низкочастотными сигналами от радиостанций. Весь набор данных об ОНЧ-излучении подтверждает, что эти сигналы распространяются по траекториям того же типа, что и свисты. Об этом свидетельствует, например, регистрация эхо-сигналов, которые сопутствуют сильному ОНЧ-излучению.

Естественно, что давно возникла идея о посылке искусственных радиосигналов и установлении с использованием геомагнитных каналов для радиосвязи между магнитосопряженными пунктами. Возможность такой связи была многократно подтверждена. Некоторые сведения об этом можно найти в [7, 8]. Проведенные эксперименты дали ценную информацию о процессах в магнитосферной плазме.

Выше были приведены основные экспериментальные данные, касающиеся свистов и ОНЧ-излучения. Остановимся на интерпретации этих данных. Для свистов основным здесь будет применение приведенных в п. 3.4 результатов по теории распространения электромагнитных волн в холодной плазме (в квазипродольном приближении). Для интервала частот $f = 1$—20 кГц практически на всем пути распространения выполнено условие $v_e \gg 1$ $\left(\omega_{e0}^2 \gg \omega^2\right)$. Действительно, $\omega_{e0}^2 = 3{,}18 \cdot 10^9\, N$ (при N в см$^{-3}$). Даже при очень низких значениях $N = 10^2$, характерных для ионосферной D-области или межпланетного пространства, $\omega_{e0} = 5{,}65 \cdot 10^5$ с$^{-1}$. Для определения другого параметра u_e необходимо найти значение гирочастоты с учетом изменений магнитного поля $\mathbf{H}_0$ как по высоте, так и по широте. При дипольной аппроксимации геомагнитного поля справедливо соотношение [7] *)

$$\omega_H = 2\pi f_1 (r_0/r)^3 \sqrt{1 + 3\sin^2\varphi}, \tag{9.3.2}$$

где r_0 — радиус Земли, r — расстояние от центра Земли до рассматриваемой точки, φ — геомагнитная широта этой точки, $f_1 \approx 0{,}8$ МГц. Широтные изменения поля $\mathbf{H}_0$ или гирочастоты электронов ω_H приводят к изменению этих величин при фиксированных r максимум в два раза. В зависимости от r гирочастота убывает по закону $1/r^3$. Согласно (2) на экваторе ($\varphi = 0$) у поверхности Земли ($r = r_0$) $\omega_H = 5{,}02$ МГц. С ростом r частота ω_H убывает и на экваторе соответственно составляет 1590, 296, 70, 12, 9 кГц на высотах $h = r - r_0$ в 3000, 10 000, 20 000 и 40 000 км. Сравнение частот ω_{e0} и ω_H показывает, что всегда (кроме нижней кромки ионосферы) $\omega_{e0} \gtrsim \omega_H$, а чаще в ионосфере и магнитосфере $\omega_{e0} \gg \omega_H$.

Выполнение условий $v_e \gg 1$ и $u_e \gtrsim 1$ позволяет удовлетворить требованию применимости квазипродольного приближения (3.4.3). При этом волны, для которых с большим запасом справедливо ограничение $\cos^2\alpha \ll 1$, не рассматриваются. В связи с этим существенно отметить, что при наличии геомагнитных каналов о выполнении этого ограничения не может быть и речи, так как в этом случае более вероятно, что $\sin^2\alpha \ll 1$.

Считая при $\omega < \omega_H$, что на всей трассе выполнено ограничение (3.4.5), мы приходим к формуле для n_2^2 (3.4.8). При условии (3.4.9), которое, если $\cos^2\alpha \sim 1$, приобретает вид

$$\omega \ll \omega_H, \tag{9.3.3}$$

справедлива известная формула (3.4.10) $\left(n_2^2 = v_e \big/ \sqrt{u_e}\cos\alpha\right)$. Неравенство

*) Сведения о постоянном магнитном поле Земли можно найти в [3, 8].

(3) обычно выполняется для частот f, меньших 8—10 кГц. Это можно установить, используя соотношение (2).

Как уже указывалось, наземный прием свистов возможен, когда они канализируются и их траектории близки к силовым линиям магнитного поля $\mathbf{H}_0$. Тогда можно считать $\cos^2\alpha \approx 1$. Из (3.4.10), (3.4.13) для величины групповой скорости получаем $v_{\text{гр}} = 2v_{\text{ф}} = 2c\sqrt{\omega_H\omega}/\omega_{e0}$. Время группового запаздывания определяется соотношением

$$\Delta t_{\text{гр}} = \int dl/v_{\text{гр}}, \qquad (9.3.4)$$

где интегрирование проводится вдоль силовой линии, выбор которой определяется зоной входа электромагнитного низкочастотного излучения в ионосферу. Подставляя приведенные значения $v_{\text{гр}}$ в (4), мы приходим к зависимости вида (1) $\Delta t_{\text{гр}} = Df^{-1/2}$, где коэффициент дисперсии

$$D = \frac{1}{\sqrt{8\pi}\, c}\int \frac{\omega_{e0}dl}{\sqrt{\omega_H}}. \qquad (9.3.5)$$

Таким образом, одна из основных закономерностей (1) легко интерпретируется.

На основе соотношения (3.4.8) можно объяснить существование носовых частот f_N (рис. 9.4б). При $\alpha = 0$ из (3.4.8) имеем

$$n^2 = c^2k^2/\omega^2 = \omega_{e0}^2/\omega(\omega_H - \omega). \qquad (9.3.6)$$

Из (6) следует, что при $\omega > \omega_H$ распространение невозможно. Предельной наибольшей частотой $\omega = \omega_{\max}$ будет гирочастота на вершинной части траектории ω_H ($\varphi = 0$), так как иначе нарушилось бы условие $\omega < \omega_H$. Частоты $f_{\max} = \omega_H(\varphi = 0)/2\pi$ согласно (2) в интервале высот h от 3000 до 20 000 км меняются от 40 до 11 кГц. Требование $f < f_H = \omega_H/2\pi$ для свистовых волн экспериментально всегда подтверждается. Более того, при приближении ω к ω_H, когда $|\omega - \omega_H| \ll \omega$, возникает гирорезонансное бесстолкновительное поглощение, рассмотренное в п. 4.2.

Из (6) имеем уравнение $c^2k^2(\omega_H - \omega) = \omega_{e0}^2\omega$, откуда дифференцированием по k легко получить формулу для величины групповой скорости $v_{\text{гр}} = d\omega/dk$, а именно,

$$v_{\text{гр}} = 2c\sqrt{\omega(\omega_H - \omega)^3}\Big/\omega_{e0}\omega_H. \qquad (9.3.7)$$

При условии (3) из (7) приходим к уже использованному нами выше результату: $v_{\text{гр}} = 2v_{\text{ф}}$.

Из требования $dv_{\text{гр}}/df = 0$ найдем $f = f_N$, когда скорость $v_{\text{гр}}$ максимальна, чему соответствуют наименьшие времена группового запаздывания $\Delta t_{\text{гр}}$ (4). Так как на спектрограммах рис. 9.4 фактически изображены зависимости $\Delta t_{\text{гр}}(f)$, то эту частоту можно отождествить с носовой частотой. Для определения носовой частоты, учитывая (7), достаточно использовать простое требование $(d/d\omega)[\omega(\omega_H - \omega)^3] = 0$, откуда получаем

$$\omega = \omega_H/4, \quad f = f_N = f_H/4. \qquad (9.3.8)$$

Так как согласно (2) гирочастота уменьшается с удалением от Земли, то, строго говоря, нужно проводить определение f_N после усреднения по траектории. Однако анализ показывает, что обычно основной вклад в $\Delta t_{\text{гр}}$ при $f \approx f_N$ вносят вершинные части траекторий, так что в (8) нужно брать значения $\omega_H = \omega_H(\varphi = 0)$. По носовым частотам f_N проводится приближенное определение величины геомагнитного поля $\mathbf{H}_0$ при удалениях от поверхности Земли на несколько ее радиусов.

В п. 3.4 при учете (3) было показано, что

$$\operatorname{tg}\Phi = \sin\alpha\cos\alpha/(1 + \cos^2\alpha). \qquad (9.3.9)$$

Там же установлено, что из (9) следует

$$0 \leqslant \Phi \leqslant 19°29'. \tag{9.3.10}$$

Этот результат был впервые получен Стори [10]. Значимость утверждения (10) несколько уменьшилось в применении к свистящим атмосферикам, когда выяснилось, что в приземной плазме часто возникают неоднородности, которые канализируют свистовое радиоизлучение. Тогда выполнение требования $\sin^2\Phi \ll 1$ обеспечивается наличием этих неоднородностей. В то же время результаты по ориентации $\mathbf{v}_{\text{гр}}$ не потеряли своего значения, так как в последние годы одновременно выявилось, что наряду с канализированными имеются также и неканализированные свисты [13] *). При определении их траекторий использование формул (3.4.12), (3.4.14) и условия (10) имеет существенное значение. Можно также указать на вопросы приема свистов в плазме, генерации свистовых волн (в том числе и с борта ИСЗ), где даже при наличии каналов вопросы о взаимной ориентации $\mathbf{v}_{\text{гр}}$ и $\mathbf{H}_0$ остаются очень актуальными.

Одной из особенностей свистов является их возможность сравнительно легкого проникновения в ионосферу. То же можно сказать и о выходе из ионосферы в сторону земной поверхности свистов и ОНЧ-излучения. Эта возможность, несомненно, связана с линейным взаимодействием нормальных волн, которое возникает в неоднородной магнитоактивной плазме. Эти вопросы для квазипродольного распространения разъяснялись в п. 5.5. В данном случае волна типа 1 при падении на ионосферу в области взаимодействия трансформируется в волну 2. Последняя может распространяться в достаточно плотной плазме. При нормальном падении на ионосферу это взаимодействие на высоких частотах приводит к эффекту утраивания отраженных сигналов [6]. Область взаимодействия располагается между $v_e = 1$ и $v_e = v_{e\infty}$. При ориентировочных оценках для наклонного падения можно считать, что положение этой области останется практически неизменным. При условии (3), которое в нижней ионосфере превосходно выполняется в свистовом диапазоне, можно принять, что грубо высоту уровня взаимодействия можно найти из условия

$$v_e = \omega_{e0}^2/\omega^2 \approx 1. \tag{9.3.11}$$

Для частот f от 1 до 10 кГц приходим из (11) к $N = 0{,}01$—1 см$^{-3}$. Эти значения меньше, чем даже в области D ионосферы. Таким образом, взаимодействие происходит между ионосферой и тропосферой. В области взаимодействия (11) в данном случае должна быть велика роль столкновений, поскольку частота столкновений ν_{en} много больше критической частоты (5.5.4). Одновременно в области просачивания имеет место и значительное поглощение.

О механизмах ОНЧ-излучения. Не проводя детального разбора существующих представлений о происхождении различных типов ОНЧ-излучения, остановимся на некоторых существенных особенностях, с которыми нужно считаться при развитии теории. Появление ОНЧ-сигналов обусловлено излучением электронов в магнитосферной плазме. Основное значение имеют черенковский и магнитотормозной (гл. 7) механизмы излучения. Известно, что резонансное условие, определяющее частоты излучения для нерелятивистского электрона, движущегося во внешнем поле $\mathbf{H}_0$ со скоростью $\mathbf{v}$, имеет вид [6, 12] (гл. 7)

$$\omega = s\omega_H + kv_z\cos\alpha, \qquad s = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots, \tag{9.3.12}$$

где поле $\mathbf{H}_0$ считается направленным по оси z. При $s = 0$ из (12) получаем условие черенковского излучения, а при $s = \pm 1$ — магнитотормозного на первой гармонике.

*) В отсутствие геомагнитных каналов свисты наземными методами не могут быть зарегистрированы. Поэтому неканализированные свисты были открыты и изучались с помощью приемной аппаратуры, установленной на борту ИСЗ.

Используя для показателя преломления формулу (3.4.8) и условие (12), имеем

$$\beta_z = \frac{v_z}{c} = \frac{\omega_H}{\omega_{e0}\cos\alpha}\left(\cos\alpha\,\frac{\omega_H}{\omega} - 1\right)^{1/2}\left(\frac{\omega}{\omega_H} - s\right). \qquad (9.3.13)$$

Находя корни уравнения (13), для черенковского излучения ($s = 0$) имеем

$$\omega = \frac{\omega_H\cos\alpha}{2}\left\{1 \pm \left\{1 - \left(\frac{2v_z}{c}\frac{\omega_{e0}}{\omega_H}\right)^2\right\}^{1/2}\right\}. \qquad (9.3.14)$$

Излучение возможно при $2v_z\omega_{e0}/c\omega_H < 1$. В условиях магнитосферной плазмы очень грубо $\omega_{e0} \sim \omega_H$. Возбуждающие ОНЧ-излучение частицы являются явно нерелятивистскими ($v_z \ll c$). В результате мы здесь можем использовать неравенство

$$2\frac{\omega_{e0}}{\omega_H}\frac{v_z}{c} \ll 1. \qquad (9.3.14а)$$

Тогда из (14) приближенно имеем

$$\omega = \omega_H\cos\alpha, \qquad (9.3.15)$$

$$\omega = \frac{v_z^2}{c^2}\frac{\omega_{e0}^2}{\omega_H}\cos\alpha. \qquad (9.3.16)$$

Для магнитотормозного излучения ($s = \pm 1$) из (13) в случае (3) (точнее, при $\omega \ll \omega_H\cos\alpha$) получаем простой результат

$$\omega = \frac{c^2}{v^2}\frac{\omega_H^3}{\omega_{e0}^2\cos\alpha}. \qquad (9.3.17)$$

В условиях магнитосферы интересующие нас сейчас частоты $f = 1{,}5$—20 кГц могут возбуждаться достаточно энергичными электронами. Допустим для простоты, что $\cos\alpha \approx 1$. Частоты ω близки к предельным для свистового диапазона, и возбуждения волн только при условии (15) явно недостаточно для интерпретации всей картины ОНЧ-излучения. Обратимся теперь к равенству (16) и используем его в диапазоне частот (3), где $n^2 \approx \omega_{e0}^2/\omega_H\omega$. Тогда из (16) получаем простое требование $\beta_z n \approx 1$. В свистовом диапазоне при указанных частотах значения показателя преломления $n \approx 10$—100. При этом величины $n = 100$ не могут практически быть превышены. Таким образом, $\beta_z \gtrsim 10^{-1}$—10^{-2}. Мы приходим к выводу, что скорости электронов, хотя они и являются нерелятивистскими, в то же время должны быть достаточно большими ($v_z \sim 10^8$—10^9 см/с). Тот же вывод получается из (17), откуда при $\cos\alpha \approx 1$ получаем равенство $\beta_z n \approx \sqrt{u_e} = \omega_H/\omega$. При $\omega_H \gg \omega$ необходимо, чтобы $\beta_z \gg n^{-1}$, и требуются частицы с еще более высокими скоростями, чем при черенковском механизме излучения. Таким образом, появление ОНЧ-излучения логично связывать не с какими-то отклонениями от равновесного состояния электронов «основной», более холодной плазмы, а с наличием компоненты электронов с надтепловыми энергиями. Такие электроны имеются, например, во внешней радиационной зоне магнитосферы [12]. Есть все основания связывать их наличие с некоторыми типами ОНЧ-излучения. Энергичные электроны и протоны имеются и в плазме солнечного ветра, из которой они могут проникать в магнитосферу.

При интерпретации дискретного ОНЧ-излучения использовались механизмы, при которых возбуждение определяется сгустками энергичных электронов, движущихся в геомагнитной ловушке между точками отражения, расположенными на ионосферных высотах. Магнитное поле Земли имеет такую конфигурацию, что в состоянии длительно удерживать захваченные

частицы. Высыпание регламентируется не только столкновениями, роль которых в нижней ионосфере возрастает, но и взаимодействием быстрых электронов с ОНЧ-волнами. Этот процесс может в определенных условиях иметь основное значение и стал широко привлекаться для анализа динамики захваченных частиц во внешней радиационной зоне Земли [12].

Для объяснения наблюдаемых интенсивностей хоров и шипений необходимо предположить, что излучение имеет когерентный характер. Поэтому проверка выполнимости условий вида (15)—(17) должна дополняться выбором и обоснованием эффективного механизма неустойчивости. Для хоров рассматривалась как пучковая неустойчивость, возникающая при инжекции в магнитосферу энергичных частиц, так и двухпотоковая неустойчивость (см. п. 6.4) на фронтах бесстолкновительных уединенных магнитогидродинамических или ударных волн. Окончательный выбор для механизма возбуждения хоров еще не произведен.

В объяснении шипений наиболее удовлетворительным представляется механизм кинетической гирорезонансной (циклотронной) неустойчивости распределения электронов во внешней радиационной зоне Земли [12]. Линейная теория гирорезонансной неустойчивости изложена в п. 6.3. В соответствии с уже сказанным выше инкременты $|\gamma|$ будут определяться «горячей» компонентой (энергичными электронами), тогда как фазовая скорость зависит от холодного плазменного фона. Расчет неустойчивости можно провести с использованием двухтемпературного распределения (6.3.1). Необходимо, однако, использовать это бимаксвелловское распределение по скоростям только для энергичных электронов [12]. Поэтому нельзя полностью переносить полученные в п. 6.3 результаты в теорию ОНЧ-излучения. Приводить детали расчетов для «составной» плазмы из горячих и холодных электронов мы не будем, поскольку обобщение имеет довольно очевидный характер [12]. Некоторые выводы вообще сохраняются. В частности, можно использовать критерий нестабильности (6.3.7) при $T_\perp > T_\parallel$. Из требования $\gamma = 0$ или из (6.3.7) определяем предельную наиболее высокую частоту в спектре ОНЧ-излучения

$$\omega_{\max} = \omega_H(\varphi = 0)\,(1 - T_\perp/T_\parallel). \tag{9.3.18}$$

Анализ величины инкремента при фиксированном положении области генерации по отношению к силовой линии показывает, что гирорезонансная неустойчивость более эффективна около экваториальной плоскости. По этой причине в (18) взято значение гирочастоты при $\varphi = 0$.

В спокойные дни $T_\perp/T_\parallel \approx 1{,}5$, а в возмущенные периоды это отношение увеличивается до 2—2,5.

Интенсивность ОНЧ-шумов может быть определена при квазилинейном анализе. Выявилось существенное влияние ОНЧ-шипений на динамику внешней радиационной зоны. В этой зоне действуют интенсивные источники энергичных электронов. Но в то же время установлено, что при увеличении мощности источников (в периоды магнитных бурь) не происходит сильного накопления таких электронов, а имеет место их высыпание в плотные слои атмосферы. При $T_\perp > T_\parallel$ возникает неустойчивость, приводящая к возбуждению свистовых волн. Пока частиц в ловушке немного и интенсивность ОНЧ-шумов невелика действие источника будет приводить к росту концентрации электронов. С ростом плотности захваченных электронов интенсивность ОНЧ-излучения будет увеличиваться и возрастает диффузия частиц на ОНЧ-волнах в конус потерь (происходит высыпание частиц).

В стационарном состоянии устанавливается уровень ОНЧ-излучения шумового характера, при котором число частиц, поставляемых источником, равно числу высыпающихся частиц. Изложенные представления детально разработаны теоретически [12] и получили экспериментальные подтверждения.

Замечания о геомагнитных пульсациях. Периодические возмущения естественного происхождения регистрируют не только в свистовом диапазоне, но и на несоизмеримо более низких частотах. В основном используют методы геомагнетизма. Возмущения, занимающие диапазон частот от 0,01 до 5 Гц, обычно регистрируют магнетометрами и они получили название *геомагнит-*

ных пульсаций. Систематические исследования этих возмущений начались с 1956 года и интенсивно продолжаются в настоящее время. Им посвящены отдельные монографии [14, 15]. Все пульсации делятся на устойчивые и нерегулярные. Появление нерегулярных пульсаций связано с возмущенным состоянием магнитосферы. Они проявляются в периоды магнитных бурь и возбуждаются в локализованных областях магнитосферы.

Лучше изучены устойчивые пульсации. Для них характерна квазисинусоидальная форма. В зависимости от периода они делятся на пять типов: Pc 1 (период 0,2—5 с), Pc 2 (5—10 с), Pc 3 (10—45 с), Pc 4 (45—150 с) и Pc 5 (150—600 с) [13, 14]. Есть основания считать, что устойчивые пульсации являются следствием крупномасштабных изменений структуры магнитосферы.

Вопросы интерпретации отдельных типов геомагнитных пульсаций еще не доведены до совершенства. Имеется немало трудностей при установлении связи между возбуждением пульсаций и процессами в магнитосфере. Ясно лишь то, что объяснение данных наблюдений невозможно без привлечения представлений о магнитогидродинамических волнах в магнитосфере. Необходимо иметь в виду, что приближение геометрической оптики применимо только грубо для частот $f > 10^{-1}$ c^{-1}. При $f \ll 10^{-1}$ c^{-1} длина волны превышает характерные масштабы магнитосферы. Большое значение приобретает задача о собственных резонансных колебаниях магнитосферы. Обычно рассмотрение проводится на основе уравнений магнитной гидродинамики (гл. 2) с проводимостью $\sigma \to \infty$. Задача представляет определенные сложности даже при ряде пренебрежений (тяжестью, вращением Земли и др.) [14]. Резонансные колебания магнитосферы привлекаются для объяснения пульсаций Pc 3 — Pc 5. Пульсации Pc 1 выделены в том отношении, что для их описания можно использовать приближение геометрической оптики, что облегчает теоретический анализ. В частности, здесь привлекался механизм гирорезонансной (циклотронной) неустойчивости (см. п. 6.3). В отличие от ОНЧ-излучения возбуждение альвеновских волн происходит из-за анизотропного характера распределения протонов внешнего радиационного пояса [14].

В целом же можно утверждать, что по ряду причин (невозможность контроля условий эксперимента, изменчивость состояния магнитосферы, недостаточность некоторых сведений о магнитосфере) в вопросах теоретической интерпретации пульсаций еще имеется заметное отставание, если сравнивать с положением в свистовом диапазоне волн.

ГЛАВА 10

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЯВЛЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ РАСПРОСТРАНЕНИИ РАДИОВОЛН В ИОНОСФЕРЕ

10.1. Сущность и классификация нелинейных явлений. Основные уравнения

Обратимся к уравнениям (2.1.23)—(2.1.26), в которых опустим члены, описывающие плотности зарядов и токов внешних источников:

$$\operatorname{rot}\mathbf{H} = (\partial\mathbf{E}/\partial t + 4\pi\mathbf{j})c^{-1}, \quad \operatorname{rot}\mathbf{E} = -c^{-1}\partial\mathbf{H}/\partial t,$$
$$\operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{E} = 4\pi\rho. \tag{10.1.1}$$

Здесь ρ и j — величины, индуцированные в плазме электромагнитными полями. Они определяются выражениями

$$\rho = e(N_i - N_e) = e\int (f_i - f_e)\,d\mathbf{v},$$
$$\mathbf{j} = e(N_i\mathbf{u}_i - N_e\mathbf{u}_e) = e\int \mathbf{v}(f_i - f_e)\,d\mathbf{v} \tag{10.1.2}$$

(п. 2.1) и связаны между собой уравнением непрерывности для плотности зарядов и токов, которое в пренебрежении внешними источниками (и стоками) частиц имеет вид

$$\partial\rho/\partial t + \operatorname{div}\mathbf{j} = 0. \tag{10.1.3}$$

Плотность тока представляет собой некоторый функционал **E** и **H**. Однако, учитывая связь между **E** и **H**, которая определяется (1), можно считать, что

$$\mathbf{j} = \Phi(\mathbf{E}). \tag{10.1.4}$$

Конкретный вид функционала $\Phi(\mathbf{E})$ определяется материальными уравнениями среды, описывающими в том числе и движение заряженных частиц плазмы под действием электромагнитного поля. В квазигидродинамическом описании такими уравнениями являются уравнения непрерывности, движения и теплопроводности:

$$\partial N_\alpha/\partial t + \operatorname{div} N_\alpha\mathbf{u}_\alpha = q_\alpha - \alpha'_\alpha, \tag{10.1.5}$$

$$N_\alpha m_\alpha\left\{\frac{\partial\mathbf{u}_\alpha}{\partial t} + (\mathbf{u}_\alpha\nabla)\,\mathbf{u}_\alpha + \sum_\beta \nu_{\alpha\beta}(\mathbf{u}_\alpha - \mathbf{u}_\beta)\right\} =$$
$$= -\nabla p_\alpha + e_\alpha N_\alpha\left\{\mathbf{E} + \frac{1}{c}[\mathbf{u}_\alpha\mathbf{H}]\right\}, \tag{10.1.6}$$

$$\frac{\partial T_\alpha}{\partial t} + \frac{2}{3} T_\alpha \operatorname{div} \mathbf{u}_\alpha =$$
$$= \frac{1}{N_\alpha} \nabla \left(\hat{\chi}'_\alpha \nabla T_\alpha\right) + \frac{2}{3N_\alpha} Q_E + \frac{2}{3N_\alpha} Q_\alpha - \sum_\beta \delta_{\alpha\beta} \nu_{\alpha\beta} (T_\alpha - T_\beta). \quad (10.1.7)$$

В (5)—(7) q_α и α'_α — соответственно коэффициенты ионизации и рекомбинации, $p_\alpha = N_\alpha T_\alpha$ — давление (здесь и ниже постоянная Больцмана в формулах опускается, т. е. температура вычисляется в энергетических единицах), $\nu_{\alpha\beta}$ и $\delta_{\alpha\beta}$ — частота столкновений и относительные потери энергии частиц при соударениях частиц сорта α с частицами сорта β (1.1), $\hat{\chi}'_\alpha$ — тензор теплопроводности (гл. 2), Q_α и Q_E — источники нагрева частиц, причем последний обусловлен наличием в плазме электрического поля, в том числе поля электромагнитной волны.

Рассмотрим прохождение через изотропную плазму ($H_0 = 0$) высокочастотной ($\omega \gg \omega_{e0}$) электромагнитной волны. Если напряженность электрического поля $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp i\omega t - i\mathbf{kr}$ такова, что индуцированные осцилляции скорости и положения частиц достаточно малы, то согласно (5) и (6)

$$\mathbf{u}_{\alpha,\omega} = \frac{e_\alpha \mathbf{E}}{m_\alpha (i\omega + \nu_\alpha)}, \quad N_{\alpha,\omega} = N_\alpha \frac{\mathbf{k}\mathbf{u}_{\alpha,\omega}}{\omega},$$
$$|\mathbf{k}\mathbf{u}_\alpha| \ll \omega, \quad \nu_\alpha = \sum_\beta \nu_{\alpha\beta}, \quad (10.1.8)$$

где N_α и $\mathbf{u}_\alpha$ — невозмущенные значения концентрации и скорости частиц в плазме. Поскольку масса ионов M много больше массы электронов m, то осцилляторным движением ионов в поле слабой волны можно пренебречь. Учитывая также, что направленные скорости частиц плазмы $\mathbf{u}_\alpha$ много меньше фазовой скорости волны $v_\phi \approx \omega/k$, имеем

$$\mathbf{j}_e(\omega) = -eN_e \mathbf{u}_{e,\omega} = \frac{e^2 N \mathbf{E}}{(i\omega + \nu_e) m},$$

т. е. $\mathbf{j}_e$ является линейным функционалом поля $\mathbf{E}$.

В однородной плазме (гл. 3) появление такого тока приводит к появлению отличной от единицы величины диэлектрической проницаемости среды, следствием чего является изменение фазовой скорости и амплитуды электромагнитной волны (гл. 2). В неоднородной плазме (гл. 5 и п. 8.1), когда, например, есть только флуктуации концентрации частиц и $N = \langle N \rangle + \tilde{N}(\mathbf{r}, t)$ ($\langle N \rangle$ — среднее по ансамблю реализаций значение концентрации), ток будет содержать флуктуирующую составляющую, фурье-компонента которой согласно теореме о свертке равна [1]

$$\tilde{\mathbf{j}}_e(\omega', \mathbf{k}') = -e \int \tilde{N}(\omega'' - \omega', \mathbf{k}'' - \mathbf{k}')\, \mathbf{u}_e(\omega'', \mathbf{k}'')\, d\omega''\, d\mathbf{k}'' =$$
$$= [e^2 \mathbf{E}(\omega)/(i\omega + \nu_e) m]\, \tilde{N}(\Omega = \omega' - \omega,\ \varkappa = \mathbf{k}' - \mathbf{k}). \quad (10.1.9)$$

Появление компонент тока с частотами ω' и волновыми векторами $\mathbf{k}'$, отличными от ω и $\mathbf{k}$, свидетельствует об образовании в плазме как рассеянных волн того же типа, что и падающая $(\omega'/k' = \omega/k)$, так и волн другого типа $(\omega'/k' \neq \omega/k)$. В последнем случае говорят о трансформации волн [2].

Если флуктуации концентрации $\tilde{N}$ (или других параметров плазмы, вызывающих $\mathbf{j}_e$) не связаны с прохождением электромагнитной волны через плазму, то $\mathbf{j}_e \sim \mathbf{E}$ и эффекты ослабления, рефракции, рассеяния и трансформации не зависят от напряженности поля $\mathbf{E}$. Однако в том случае, когда электромагнитная волна вызывает изменение свойств плазмы (например, изменяет величины ν_e, $\tilde{N}$ и $\mathbf{u}_e$), индуцированный в ней ток пропорционален более высоким степеням $\mathbf{E}$. При этом возникают явления, многие из которых подобны упомянутым выше, но отличаются тем, что они вызваны самой электромагнитной волной. Более того, плазма в поле электромагнитной волны может стать неустойчивой относительно различного типа возмущений.

Нелинейные явления в плазме классифицируют в соответствии со значениями электромагнитных полей, характерных временных и пространственных масштабов, определяющих процессы взаимодействия. Слабыми нелинейностями называют нелинейности, которые можно описать с помощью первых членов разложения по амплитудам электромагнитного поля. Критерий слабой нелинейности далеко не всегда можно точно определить, хотя бы по той причине, что при наличии даже сравнительно слабых внешних полей из-за неустойчивостей в плазме могут возникнуть сильные внутренние поля и возмущения, изменяющие дисперсионные свойства волн в плазме. Поэтому часто за условие слабой нелинейности принимают условие неизменности дисперсионных свойств плазмы. Необходимые условия слабой нелинейности плазмы в поле высокочастотной электромагнитной волны получают из сравнения амплитуды колебаний $r_\omega \sim u_\omega/\omega$ частицы (электрона) под действием поля с характерным масштабом процесса, а амплитуды u_ω (8) — с характерной скоростью, например тепловой скоростью электрона. В случае слабой нелинейности в уравнениях движения, теплопроводности и непрерывности учитывают линейные и квадратичные зависимости параметров плазмы от $\mathbf{E}$, пренебрегая членами, содержащими $\mathbf{E}$ в более высокой степени. Соответственно в $\mathbf{j}_e$ (4) при этом входит амплитуда поля E_0 в квадратичной (квадратичная нелинейность) и кубичной (кубичная нелинейность) степени.

Как видно из (8) и (9), квадратичная нелинейность может быть обусловлена нелинейным характером зависимости индукционного тока от параметров плазмы. Действительно, представим $N_e(\omega, \mathbf{k})$ и $u_e(\omega, \mathbf{k})$ в виде

$$N_e(\omega, \mathbf{k}) = N^{(0)} + N_\omega^{(1)} + N_\omega^{(2)},$$

$$\mathbf{u}_e(\omega, \mathbf{k}) = \mathbf{u}^{(0)} + \mathbf{u}_\omega^{(1)} + \mathbf{u}_\omega^{(2)},$$

где верхние индексы при N и $\mathbf{u}$ означают степень зависимости этих величин от напряженности поля $\mathbf{E}$. Тогда

$$\mathbf{j}_e(\omega, \mathbf{k}) = \mathbf{j}_e^{(1)}(\omega, \mathbf{k}) + \mathbf{j}_e^{(2)}(\omega, \mathbf{k}) + \mathbf{j}_e^{(3)}(\omega, \mathbf{k}) + \ldots \quad (10.1.10)$$

и

$$\mathbf{j}_e^{(2)}(\omega, \mathbf{k}) \sim e \int \left(N_{\omega-\omega'}^{(0)} \mathbf{u}_{\omega'}^{(2)} + N_{\omega-\omega'}^{(1)} \mathbf{u}_{\omega'}^{(1)} + N_{\omega-\omega'}^{(2)} \mathbf{u}_{\omega'}^{(0)} \right) d\omega' d\mathbf{k}', \quad (10.1.11)$$

т. е. содержит компоненту, равную свертке от спектральных плотностей концентрации и скорости частиц, которые линейно зависят от $\mathbf{E}$ *).

Появление квадратичных (и более высоких) степенных зависимостей параметров плазмы от поля $\mathbf{E}$ обусловлено прежде всего наличием нелинейных членов в уравнениях движения и теплопроводности. Как видно из (6) и (7), нелинейность может быть, в частности, связана с изменением температуры электронов из-за их нагрева в поле высокочастотной волны (член Q_E, который пропорционален модулю квадрата амплитуды поля). Такой тип нелинейности носит название нагревной или тепловой [3, 4]. Увеличение температуры электронов в поле мощной радиоволны приводит к изменению частоты их столкновений с другими частицами, в результате чего возникает ряд эффектов (самовоздействие мощной радиоволны, кроссмодуляционное взаимодействие волн, изменение ионосферных токовых систем и др.), которые описываются нелинейным членом $\nu_{e\beta}(|E|^2)(\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_\beta)$ в (6) и соответственно компонентой тока, пропорциональной $u_{\omega-\omega'}^{(2)}$ в (10). Нагрев электронов приводит также к изменению их давления $p_e = T_e N_e$ в области взаимодействия мощной радиоволны с плазмой. Поэтому на электроны действует сила ∇P_e. Покидая нагретую область, электроны увлекают за собой ионы (за счет возникающего поляризационного поля), что приводит к изменению концентрации плазмы. В результате этого процесса образуются индуцированные полем мощной волны неоднородности плазмы, влияющие на характер распространения радиоволн. Такие неоднородности ответственны за эффекты нелинейной рефракции и самофокусировки мощной волны, а также за ряд эффектов, обусловленных нелинейными рассеянием и трансформацией электромагнитных волн (в частности, в электростатическую плазменную волну). Указанные явления описываются членом $\nabla p_e = N \nabla T_e + T_e \nabla N$ в (6), который вносит вклад как в $u_{\omega-\omega'}^{(2)}$, так и в $N_{\omega-\omega'}^{(2)}$ (5). Проявление нагревной нелинейности может сказаться в изменении баланса ионизации в плазме, поскольку коэффициенты ионизации и рекомбинации являются функциями температуры электронов.

Нагревная нелинейность обусловлена диссипативными процессами. Она имеет место в том случае, когда характерное вре-

*) Нетрудно убедиться, что

$$\mathbf{j}_e^{(3)}(\omega, \mathbf{k}) \sim \int \left(N_{\omega-\omega'}^{(0)} \mathbf{u}_{\omega'}^{(3)} + N_{\omega-\omega'}^{(2)} \mathbf{u}_{\omega'}^{(1)} + N_{\omega-\omega'}^{(1)} \mathbf{u}_{\omega'}^{(2)} + N_{\omega-\omega'}^{(3)} \mathbf{u}_{\omega'}^{(0)} \right) d\omega' d\mathbf{k}'.$$

мя $t_{\text{нл}}$ нелинейного процесса взаимодействия волны с плазмой много больше ν_e^{-1}, а характерные пространственные масштабы взаимодействия L существенно превышают длину свободного пробега электронов $l_{\text{св}}$*).

Другой тип нелинейности — бездиссипативный — не связан с соударениями и проявляется прежде всего в бесстолкновительной плазме. Такая нелинейность носит название стрикционной [2—6]. Она проявляется уже в первые несколько миллисекунд воздействия мощным наземным радиоизлучением на ионосферу (п. 10.3) и ответственна за ряд эффектов, связанных с возбуждением плазменных волн в ионосфере за счет нелинейной трансформации мощной электромагнитной волны обыкновенной поляризации на уровне ее отражения (уровень, где $\varepsilon = 0$). Эти волны имеют волновые векторы, направленные вдоль $\mathbf{h}$, и взаимодействуют с потоками фотоэлектронов (п. 1.1), ускоряя последние до энергий, которые достаточны для ионизации газа. Поэтому «стрикционные» плазменные волны могут быть косвенно ответственны за дополнительную ионизацию в ионосфере [7, 8]. Стрикционная нелинейность описывается нелинейными членами, пропорциональными $(\mathbf{u}_{e\omega}\nabla)\mathbf{u}_{e\omega}$ и $[\mathbf{u}_{e\omega}\mathbf{H}_\omega]$ в (6), где $\mathbf{H}_\omega$ — напряженность магнитного поля в высокочастотной волне. Появление стрикционных нелинейных сил обусловлено осцилляторной компонентой в траектории заряженной частицы ($\mathbf{r}_\omega = e\mathbf{E}_\omega/m\omega^2$, $u_{e\omega}/c \ll 1$). Такие смещения $\mathbf{r}_\omega$ при движении частицы в неоднородном поле приводят к квадратичным по $\mathbf{r}_\omega$ поправкам в усредненной (за время $t \gg \omega^{-1}$) траектории электрона. Если $r_\omega \ll L_E$ (L_E — характерный размер неоднородности поля), а время пролета электрона через область с размерами L_E много больше $\omega^{-1}(u_{e\omega}L_E^{-1}/\omega \ll 1)$, то в нелинейные члены (6) в качестве скорости можно подставить значения $u_{e\omega}$ и провести частотную фильтрацию, т. е. усреднение за время $\omega^{-1} \ll t \ll t_{\text{п}}$ ($t_{\text{п}}$ — время процесса). Для спектральной компоненты нелинейной стрикционной силы $F_{c\omega}$ имеем

$$\mathbf{F}_{c\omega} = \mathbf{F}_{1\omega} + \mathbf{F}_{2\omega} =$$
$$= -mN \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left\{ \overline{[\mathbf{u}_e(\omega-\omega')\nabla]\,\mathbf{u}_e(\omega')} + \frac{e}{mc}\,\overline{[\mathbf{u}_e(\omega-\omega')\,\mathbf{H}(\omega')]} \right\} d\omega'.$$

Используя (1), из которого следует, что $\mathbf{H}(\omega') = (ic/\omega')\,\mathrm{rot}\,\mathbf{E}$, преобразуем второй член $F_{2\omega}$ к виду

$$\mathbf{F}_{2\omega} = \frac{e^2}{m} N \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\{(1/2)\,\nabla\,\overline{(\mathbf{E}(\omega-\omega')\,\mathbf{E}(\omega'))} - \overline{(\mathbf{E}(\omega-\omega')\,\nabla)\,\mathbf{E}(\omega')}\}}{(\omega-\omega')\,\omega'}\, d\omega'.$$

В эти формулы подставлено выражение для $\mathbf{u}_e(\omega) = ie\mathbf{E}/m\omega$ (см. (8) при $\nu_e \ll \omega$). Таким образом, компонента $\mathbf{F}_{1\omega}$ компенсируется

*) В случае анизотропной плазмы больше $l_{\text{св}}$ должны быть масштабы L' вдоль h.

вторым членом $\mathbf{F}_{2\omega}$ и

$$\mathbf{F}_{c\omega}=\frac{e^2N}{2m}\nabla\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\overline{\mathbf{E}(\omega-\omega')\,\mathbf{E}(\omega')}}{(\omega-\omega')\,\omega'}\,d\omega'\right\}.$$

Отсюда для монохроматической волны $E(t)=E_0\sin(\omega_1 t)$ можно получить, что $\mathbf{F}_{c\omega}=-\left(e^2N/4m\omega_1^2\right)\nabla E_0^2\delta(\omega)$, т. е.*)

$$\mathbf{F}_c=-\left(e^2N/4m\omega_1^2\right)\nabla E_0^2=-\left(\omega_{c0}^2/16\pi\omega_1^2\right)\nabla\,|\,E\,|^2. \qquad (10.1.12)$$

В неоднородной магнитоактивной плазме [9]

$$\mathbf{F}_c=(16\pi)^{-1}\left\{\nabla\left(\mathbf{E}_i^*\mathbf{E}_j\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial N}N\right)-\mathbf{E}_i^*\mathbf{E}_j\nabla\varepsilon_{ij}\right\}. \qquad (10.1.12\text{а})$$

Как видно из (12а), сила $\mathbf{F}_c$ для определенной нормальной волны зависит от дисперсионных свойств этой волны. В частности, для необыкновенной волны при ее квазипродольном распространении $\mathbf{F}_c$ имеет разные знаки при $\omega>\omega_H$ и $\omega<\omega_H$. Следует иметь в виду также, что стрикционная сила может быть образована за счет интерференции волн различного типа при условии, что выполнены соответствующие поляризационные $(\cos(\widehat{\mathbf{e}_\alpha\mathbf{e}_\beta})=0)$ и фазовые соотношения. Примерно при тех же предположениях относительно малости величин r_ω и $u_{e\omega}$ и временного масштаба $t_\omega\sim\omega^{-1}$, который в данном случае должен быть много меньше не только времени пробега электрона через неоднородность поля, но и много меньше времени $(\delta\nu_e)^{-1}$ передачи энергии электрона другим частицам, можно получить выражение для низкочастотной (апериодической) тепловой силы $\mathbf{F}_T$, аналогичной силе $\mathbf{F}_c$. Очевидно, что в этом случае источник нагрева электромагнитным полем

$$Q_E=\widetilde{(\mathbf{jE})}=\frac{e^2\nu_e N}{2m\left(\omega^2+\nu_e^2\right)}E_0^2. \qquad (10.1.13)$$

Опустим в (7) члены с $(P_e\operatorname{div}\mathbf{u}_e)/N$ и Q_e, а также заменим $\sum\limits_\beta\delta_{e\beta}\nu_{e\beta}(T_e-T_\beta)$ на $\delta\nu_e(T_e-T)$, понимая под этой величиной некоторое эффективное значение. Тогда, считая для простоты, что $\widehat{\chi}_e$ слабо зависит от координат, представим (7) в виде

$$\frac{\partial\widetilde{T}_e}{\partial t}=\widehat{\chi}_e\Delta\widetilde{T}_e+\frac{1}{3N}\sigma_\omega E_0^2-\delta\nu_e\left(\widetilde{T}_e-T\right) \qquad (10.1.14)$$

*) Выражение (12) для случая монохроматической волны просто получить, подставляя $E=E_0\sin(\omega_1 t)$ непосредственно в (6) и вычисляя $\widetilde{(\mathbf{u}\nabla)\,u}$ и $\widetilde{[\mathbf{uH}]}$. Тогда

$$\mathbf{F}_c=-\frac{e^2N}{4m\omega_1^2}\left[1-\widetilde{\cos(2\omega_1 t)}\right]\nabla E_0^2=-\frac{\omega_{e0}^2}{16\pi\omega_1^2}\nabla E_0^2.$$

$\left(\chi_e = \frac{\partial \chi'_e}{\partial N}\right)$. В квазистационарном ($\partial \widetilde{T}_e/\partial t = 0$) состоянии возмущение температуры, вызванное полем, можно представить в виде

$$\widetilde{T}_e - T = \overline{L}_T^{-1} \sigma_\omega E_0^2/3N, \tag{10.1.15}$$

где $\overline{L}_T^{-1}$ — оператор, обратный оператору $\overline{L} = \delta\nu_e - \widehat{\chi}_e \Delta$. Тогда из (12) и (15) при $\omega \gg \nu_e$ имеем

$$F_T = -N\nabla \widetilde{T}_e = (4\nu_e/3)\,\overline{L}_T^{-1} F_c. \tag{10.1.16}$$

Из (16) видно, что в тех случаях, когда можно пренебречь остыванием электронов за счет теплопроводности по сравнению с передачей тепла при их столкновениях с другими частицами ($\chi_e L_T^{-2} \ll \ll \delta\nu_e$, где L_T — характерный размер нагретой области), сила F_T примерно в δ^{-1} раз больше стрикционной. Учитывая, что при $\nu_e \gg \gg \omega_H$ теплопроводность изотропна, а коэффициент $\chi_e \approx T/m\nu_e \sim \sim \nu_e l_{\text{св}}^2$, получаем, что пренебрежение теплопроводностью возможно при $l_{\text{св}} \ll L_T$. Вместе с тем при $\omega_H \gg \nu_e$ скорость распространения тепла вдоль и поперек силовых линий магнитного поля существенно различна (соответствующие коэффициенты теплопроводности равны $\chi_\parallel = l_{\text{св}}^2 \nu_e$ и $\chi_\perp \approx T\nu_e/m\omega_H^2 \sim \rho_e^2 \nu_e$, где ρ_e — гирорадиус электронов). Поэтому при $L_\parallel \gg l_{\text{св}}$ ($L_\parallel$ — характерное значение L_T вдоль $\mathbf{h}$) тепловая сила существенно больше стрикционной при $(\delta + \rho_e^2/L_\perp^2)^{-1} \gg 1$, т. е. при $L_\perp \ll l_{\text{св}}$ ($\rho_e \ll l_{\text{св}}$, $L_\perp$ — масштаб L_T, ортогональный $\mathbf{h}$).

Из (14) следует, что при $\chi_e L_T^{-2} \ll \delta\nu_e$ нагрев электронов электромагнитным полем начинает преобладать над остыванием при

$$E_0 > E_p = \sqrt{3mT\delta(\omega^2 + \nu_e^2)/e^2}. \tag{10.1.17}$$

Характерное поле E_p называют иногда плазменным полем. Поскольку в этом поле средняя температура электронов изменяется на величину, сравнимую с невозмущенной первоначальной, то при нагревных нелинейностях сравнением амплитуды поля с E_p разделяют сильные и слабые поля (нелинейности). Поле, удовлетворяющее условию (17), называется сильным, а слабым — при выполнении неравенства $E_0 \ll E_p$.

В сильных полях свойства плазмы уже существенно изменяются, в частности, за счет зависимости частоты столкновений электронов от температуры. Однако в первом приближении зависимость $\widetilde{T}_e$ от величины поля будет по-прежнему определяться (15) с той лишь разницей, что в нем необходимо учесть зависимость параметров плазмы от температуры, т. е. при $\chi_e L^{-2} \ll \delta\nu_e$

$$\frac{\widetilde{T}_e}{T} = 1 + \frac{e^2 E_0^2 T_e^{-1}}{3m\delta(T_e^2)\left(\omega^2 + \nu_e^2(T_e)\right)} = 1 + \left(\frac{E_0^2}{E_p^2}\right)\frac{\delta_0}{\delta(T_e)}\,\frac{\omega^2 + \nu_{e0}^2}{\omega^2 + \nu_e^2(T_e)},$$

где через δ_0 и ν_{e0} обозначены значения этих параметров в отсут-

ствие поля. Подставляя (6) в (5), можно получить уравнение диффузии, описывающее изменение концентрации электронов с учетом воздействия на плазму высокочастотным полем. В простейшем случае, пренебрегая в (6) нелинейными членами (по не $\widetilde{(\mathbf{u}_{e\omega}\nabla)\mathbf{u}_{e\omega}}$) и инерционным членом $\partial u_e/\partial t$, а также диффузией плазмы в плоскости, ортогональной $\mathbf{h}$, имеем

$$\frac{1}{\nu_{in}}\frac{\partial^2 N}{\partial t^2}+\frac{\partial N}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{M\nu_{in}}\frac{\partial}{\partial z}\left(N\left(T_e+T_i\right)\right)+\frac{\partial}{\partial z}\frac{F_c}{M\nu_{in}}=q_\alpha-\alpha'_\alpha. \tag{10.1.18}$$

Здесь влияние волны проявляется не только в $\partial F_c/\partial z$, но и в членах $q_\alpha(T_e)$, $\alpha'_\alpha(T_e)$ и диффузионном члене.

10.2. Нижняя ионосфера

В условиях нижней ионосферы (высоты $z \leqslant 80-100$ км) частоты столкновений электронов с другими частицами превышают 10^4 с$^{-1}$, длины свободного пробега электронов в связи с этим достаточно малы ($l_{\text{св}} \leqslant 2$ м), поэтому здесь тепловая нелинейность является преобладающей. Более того, поскольку перераспределение плазмы за счет термодиффузии при нагреве электронов полем волны происходит достаточно медленно, изменение концентрации плазмы происходит преимущественно за счет зависимости коэффициентов рекомбинации, отлипания (прилипания) и ионизации от температуры электронов. Однако при не очень больших значениях амплитуды поля E_0 основной вклад в нелинейный ток, а следовательно, и в диэлектрическую проницаемость плазмы вносит сила трения электронов, и обусловлен этот вклад зависимостью ν_e от температуры электронов.

Рассмотрим прохождение через ионосферу квазимонохроматической радиоволны частоты $\omega_1 \gg \delta\nu_e$. Будем считать среду изотропной плоскослоистой и стационарной (свойства плазмы изменяются лишь в одном направлении z), а волну — плоской, распространяющейся вдоль z и имеющей для простоты одну нормальную компоненту поляризации. В этих приближениях уравнение для спектральной компоненты поля E_ω имеет вид

$$\frac{\partial^2 \mathbf{E}_\omega}{\partial z^2}+\frac{\omega^2}{c^2}\mathbf{E}_\omega-i\frac{4\pi\omega}{c^2}\mathbf{j}_\omega=0. \tag{10.2.1}$$

Учтем, что при тепловой нелинейности возмущения концентрации плазмы, являющиеся следствием изменения температуры электронов в поле волны, зависят только от степеней E_0^2. Тогда из (10.1.10) и (10.1.11), ограничиваясь выписыванием значений, соответствующих квадратичной и кубичной нелинейностям, имеем

$$\mathbf{j}_\omega=\mathbf{j}_\omega^{(1)}-e\left[N\mathbf{u}_\omega^{(2)}+N_\omega^{(2)}\left(\mathbf{u}_e-\mathbf{u}_i\right)\right]-$$
$$-e\left[N\mathbf{u}_\omega^{(3)}+\int N_{\omega-\omega'}^{(2)}\mathbf{u}_{\omega'}^{(1)}d\omega'\right]. \tag{10.2.2}$$

При этом, так как в случае $\omega_0 \gg \delta\nu_e$ изменения температуры происходят на временных масштабах t_T, много больших периода волны, квадратичные по полю величины в (2) являются усредненными за $t > \omega^{-1}$. Второй и третий члены в (2) описывают явления, возникающие в ионосферной плазме при наличии в ней стороннего (по отношению к волне) тока, и связаны с квадратичной нелинейностью, два последних слагаемых описывают эффекты, обусловленные кубичной нелинейностью.

Рассмотрим эти эффекты подробнее.

Самовоздействие электромагнитной волны. Обратимся к уравнению (10.1.6) и запишем его в виде

$$i\omega \mathbf{u}_e(\omega) + \int \nu_e(\omega - \omega') \mathbf{u}_e(\omega')\, d\omega' + \nu_e(\omega)(\mathbf{u}_e - \mathbf{u}_i) = -\frac{e}{m}\mathbf{E}_\omega. \quad (10.2.3)$$

Пусть ток в плазме отсутствует ($\mathbf{u}_e = \mathbf{u}_i$), а волна является монохроматической. Тогда с учетом неравенства $t_T \gg \omega_1^{-1}$ можно считать функцию $\nu_e(\omega - \omega')$ достаточно острой и пренебречь отличием частоты в $u_e(\omega')$ от ω_1. В этом квазистационарном случае

$$u_e(\omega_1) = -\frac{eE(\omega_1)}{m(\nu_e + i\omega_1)}, \quad j(\omega_1) = \frac{e^2 N(\nu_e - i\omega_1)}{m(\nu_e^2 + \omega_1^2)} E(\omega_1), \quad (10.2.4)$$

где $\nu_e = \nu_e(|E|^2)$ и является медленно меняющейся функцией времени. Проводя в (4) разложение ν_e по степеням $|E|^2$, мы можем получить линейный по полю первый и два последних члена (2), соответствующих кубичной нелинейности. Однако (4) имеет более широкие (хотя и не совсем точно определимые) пределы применимости. Последнее связано с тем, что при вычислении $\bar{T}$ была учтена зависимость ν_e от температуры, т. е. от $|E|^2$.

Рассмотрим область плазмы, расположенную вдали от уровня отражения волны. Представляя $\mathbf{E}(\omega, z) = \mathbf{E}'(\omega, z)\exp(-ik_0 z)$ и считая, что комплексная амплитуда поля $\mathbf{E}'(z)$ изменяется достаточно медленно на масштабе длины волны, получим уравнение для $\mathbf{E}'(z)$:

$$\frac{\partial \mathbf{E}'(z)}{\partial z} + \frac{ik_0}{2}(\varepsilon - 1)\mathbf{E}'(z) = 0, \qquad \mathbf{E}'(z) = \mathbf{E}'(\omega, z),$$
$$\varepsilon = 1 - \frac{\omega_{e0}^2\left(1 + i\nu_e(|E|^2)/\omega\right)}{\omega_1^2 + \nu_e^2(|E|^2)}. \quad (10.2.5)$$

Уравнение для величины $\mathbf{E}'^*(z)$, комплексно-сопряженной $\mathbf{E}'(z)$, будет отличаться от (5) знаком при втором члене уравнения и тем, что в него вместо ε будет входить ε^*. Умножая (5) на $\mathbf{E}'^*(z)$, а уравнение для $\mathbf{E}'^*(z)$ — на $\mathbf{E}'(z)$ и складывая полученные уравнения, получим

$$\partial I(z)/\partial z + \mu(z) I(z) = 0, \qquad I(z) = \mathbf{E}'\mathbf{E}'^* = E_0^2/2, \quad (10.2.6)$$

где (μ_0, ν_{e0}, N_0 — значения μ, ν_e и N при $E_0 = 0$)

$$\mu(z) = \frac{\omega_1}{c}\frac{4\pi e^2 N \nu_e}{m\omega_1(\omega_1^2 + \nu_e^2)} \approx \mu_0 \frac{\nu_e(T_e)}{\nu_{e0}}\left(\frac{\omega_1^2}{\nu_{e0}^2} + 1\right)\frac{N(T_e)}{N_0}\left\{\frac{\omega_1^2}{\nu_{e0}^2} + \frac{\nu_e^2(T_e)}{\nu_{e0}^2}\right\}^{-1} \quad (10.2.7)$$

— коэффициент поглощения волны при учете нелинейности (но в приближении малого отличия $|\varepsilon|$ от единицы). Учтем, что в нижней ионосфере частота ν_{en} столкновений электронов с молекулами существенно больше ча-

стоты ν_{ei} их столкновений с ионами. Тогда ν_e увеличивается с ростом температуры. Ограничимся рассмотрением случая упругих соударений, когда $\nu_e(T_e)/\nu_0 = \sqrt{T_e/T_{e0}}$ и пренебрежем теплопроводностью среды.

Следуя [3, 4], проанализируем (6). Введем новую переменную $\zeta_T = \sqrt{T_e(E_0)/T}$. Зависимость стационарной температуры электронов от амплитуды поля (10.1.15) в новых переменных принимает вид

$$\zeta_T^2 - 1 = \frac{E_0^2}{E_p^2} \frac{\omega_1^2 + \nu_{e0}^2}{\omega_1^2 + \nu_{e0}^2 \zeta_T^2}, \qquad (10.2.8)$$

откуда

$$E_0^2 = E_p^2 \, \frac{1 + a^2\zeta_T^2}{1 + a^2} \left(\zeta_T^2 - 1\right), \qquad a = \frac{\nu_{e0}}{\omega_1}.$$

Подставляя (7) и (8) в (6) и считая изменение ν_{e0} и E_p с высотой z достаточно медленным по сравнению с $\zeta_T(z)$, получаем

$$2\frac{d\zeta_T}{dz}\left(\frac{1}{\zeta_T^2 - 1} + \frac{2a^2}{1 + a^2}\right) + \mu_0 \frac{N\left(\zeta_T^2\right)}{N_0} = 0. \qquad (10.2.9)$$

Интегрирование (9) в приближении $N(\zeta_T)/N_0 \approx 1$ приводит к уравнению

$$\left\{\ln\frac{\zeta_T(z) - 1}{\zeta_T(z) + 1} - \ln\frac{\zeta_T(0) - 1}{\zeta_T(0) + 1}\right\} + \frac{4a^2}{1 + a^2}\left(\zeta_T(z) - \zeta_T(0)\right) + \int_0^z \mu_0 dz = 0$$

или

$$\frac{\zeta_T(z) - 1}{\zeta_T(z) + 1} \exp\left\{\frac{4a^2}{1 + a^2}\zeta_T(z)\right\} = ce^{-2\tau_0(z)}, \qquad (10.2.10)$$

где

$$2\tau_0 = \tau(\nu_{e0}) = \int_0^z \mu_0(z)\, dz, \qquad c = \frac{\zeta_T(0) - 1}{\zeta_T(0) + 1} \exp\left\{\frac{4a^2}{1 + a^2}\zeta_T(0)\right\}. \qquad (10.2.10a)$$

Из (10) видно, что с ростом z (точнее, с увеличением интегрального коэффициента поглощения τ_0) величина $\zeta_T(z)$ монотонно убывает и при $\tau_0 \gg 1$ стремится к единице, т. е. волна становится слабой. Зная $\zeta_T(z)$, из (8) легко найти $I(z)$. Запишем

$$I(z) = I(0) \exp(-2\tau_0)B^2. \qquad (10.2.11)$$

Множитель B характеризует эффект самовоздействия волны при ее распространении. В общем случае

$$B = B\left(I(0)/E_p^2,\ a,\ \tau_0\right).$$

При $\tau_0 \gg 1$, когда $(\zeta_T - 1) \ll 1$, из (10) имеем

$$\zeta_T = 1 + 2\exp\left[-4a^2/(1 + a^2)\right] c \exp(-2\tau_0). \qquad (10.2.12)$$

С другой стороны, согласно (8) при $\zeta_T \to 1$

$$2I(z) = E_0^2 = 2E_p^2(\zeta_T - 1) = 4E_p^2 c \exp\left[-4a^2/(1 + a^2) - 2\tau_0\right].$$

Следовательно, при $\tau_0 \gg 1$

$$B = \frac{2E_p}{E_0(0)} \sqrt{\frac{\zeta_T(0) - 1}{\zeta_T(0) + 1}} \exp\left\{\frac{2\nu_{e0}^2 [\zeta_T(0) - 1]}{\omega_1^2 + \nu_{e0}^2}\right\}. \qquad (10.2.13)$$

Из (13) видно, что в предельном случае $\omega_1^2 \gg \nu_{e0}^2 \zeta_T(0)$ и $\zeta_T(0) \gg 1$ множитель B обратно пропорционален амплитуде поля при $z = 0$. В этом случае интенсивность волны в глубине слоя стремится к величине, которая не зависит от начальной амплитуды поля:

$$E_0^2(z) = 4E_p^2 \exp(-2\tau_0). \qquad (10.2.14)$$

Эффект насыщения обусловлен резким увеличением поглощения волны с ростом ее амплитуды. При выполнении обратного неравенства $\omega_1^2 \ll \nu_{e0}^2 \zeta_T(0)$ множитель B увеличивается с ростом $I(0)$. Последнее связано с уменьшением коэффициента поглощения радиоволны низкой частоты с ростом T_e. Таким образом, зависимость B от E_0^2/E_p^2 при $\omega_1^2 \gg \nu_{e0}^2$ имеет минимум, который согласно (13) достигается при

$$\left\{\frac{E_0(0)}{E_p}\right\}_{\min} = \frac{\omega_1 \sqrt{\omega_1^4 - \nu_{e0}^4}}{\nu_{e0}^3}. \qquad (10.2.15)$$

Заметим, что при $\omega_1^2 \gg 2\nu_{e0}^2 \zeta_T(0)$ из (10) следует, что

$$B = \frac{2E_p}{E_0(0)} \left\{\frac{\zeta_T(0) - 1}{\zeta_T(0) + 1}\right\}^{1/2} \left\{1 - \frac{\zeta_T(0) - 1}{\zeta_T(0) + 1} e^{-2\tau_0}\right\}^{-1},$$

$$\zeta_T(0) = \left\{1 + \frac{E_0^2(0)}{E_p^2}\right\}^{1/2}$$

и на высоких частотах B резко убывает с ростом τ_0. Заметим также, что в достаточно сильном поле необходимо учитывать зависимость δ от T_e и вызванное нагревом изменение концентрации плазмы, которым выше пренебрегалось.

Как показано в [4], с учетом зависимости $N(T_e)$ эффекты самовоздействия сохраняются, но численно значения B могут изменяться. В результате, хотя для сильной волны высокой частоты эффект «насыщения» поля в плазме сохраняется, для сильной волны низкой частоты при $N(T_e)/N_0 = \sqrt{T_e/T}$ $B = 1$. Последнее вызвано компенсацией эффекта уменьшения τ из-за температурной зависимости ν_e ростом τ вследствие роста N. Достаточно сильное электромагнитное поле может вызвать дополнительную ионизацию плазмы. Рассмотрение этих эффектов выходит за рамки книги (см. [4]).

Проведенный анализ позволяет понять и искажение формы импульсного сигнала (длительность импульса $\Delta t_{\text{и}} > (\delta_0 \nu_{e0})^{-1}$) при его прохождении через нижнюю ионосферу. Очевидно, что передняя часть импульса (временной масштаб $\Delta t_{\text{и}} \ll (\delta_0 \nu_{e0})^{-1}$) останется неискаженной, так как время, необходимое для разогрева электронов, равно $\delta_0 \nu_{e0}$ ($\delta_0 = \delta(T_e = T)$). На масштабах $(\delta_0 \nu_{e0})^{-1} < \Delta t_{\text{и}}$ устанавливается стационарное значение амплитуды, соответствующее амплитуде сильной монохроматической волны.

Рассмотрим эффект изменения коэффициента амплитудной модуляции сильной волны. Пусть на ионосферу падает волна с

$$E(z = 0) = E_0(0)[1 + \mathcal{M}_0 \cos(\Omega t)]. \qquad (10.2.16)$$

Как и прежде, ограничимся рассмотрением квазистационарного случая (частота модуляции $\Omega \ll \delta \nu_{e0}$). Очевидно, что при этом интенсивность волны может быть записана в виде (11). Определим, подобно [4], коэффициент

модуляции на уровне z как

$$\widetilde{M}(z) = [E_{\max}(z) - E_{\min}(z)]/[E_{\max}(z) + E_{\min}(z)], \qquad (10.2.17)$$

где $E_{\max} = E\left(E_0(0)\left(1+\widetilde{M}_0\right), z\right)$, а $E_{\min} = E\left(E_0(0)\left(1-\widetilde{M}_0\right), z\right)$. Тогда при $\widetilde{M}_0 \ll 1$ (см. [4])

$$\widetilde{M}(z) = \widetilde{M}_0 \frac{\zeta_T(z)}{\zeta_T(0)} \frac{\omega_1^2 + \nu_{e0}^2 \zeta_T^2(0)}{\omega_1^2 + \nu_{e0}^2 \zeta_T^2(z)}. \qquad (10.2.18)$$

Отсюда видно, что при $\omega_1^2 \gg \nu_{e0}^2 \zeta_T^2$ (ввиду того, что ζ_T монотонно убывает с ростом z) глубина модуляции волны по мере ее проникновения в ионосферу уменьшается вследствие самовоздействия. При этом на тех уровнях, где $\tau_0 \gg 1$ и $\zeta_T \to 1$ (12),

$$\widetilde{M}(z) = -\widetilde{M}_0/\zeta_T(0), \qquad \widetilde{M}_0 \ll 1, \qquad (10.2.19)$$

т. е. демодуляция сильной волны может быть значительной. Если $\omega_1^2 \ll \nu_{e0}^2$, то коэффициент модуляции $\widetilde{M}$ возрастает и при $\tau_0 \gg 1$

$$\widetilde{M}(z) \simeq \widetilde{M}_0 \zeta_T(0). \qquad (10.2.20)$$

Анализ [4] показывает, что при $\widetilde{M}_0 \leqslant 0{,}5$ и $\widetilde{M} \leqslant 0{,}5$ зависимость $\widetilde{M}$ от $\widetilde{M}_0$ близка к линейной и демодуляцию можно описывать (18). При $\widetilde{M}_0$, близких к единице, связанное с нелинейностью изменение $\widetilde{M}$ незначительно. Напротив, искажения модуляции в сильных полях незначительны при малых $\widetilde{M}_0$ и очень велики при $\widetilde{M}_0 \to 1$. При учете этих искажений, однако, недостаточно знания эффективной глубины модуляции, а необходимо определить амплитуды гармоник модуляции $\widetilde{M}_\Omega$, $\widetilde{M}_{2\Omega}$, $\widetilde{M}_{3\Omega}$ и т. д. [3, 4].

Кроссмодуляция радиосигналов (Люксембург — Горьковский эффект). Очевидно, что возмущения плазмы, вызванные прохождением мощной радиоволны, должны сказаться, например, на поглощении других волн, распространяющихся через возмущенную область. Если при этом мощная волна промодулирована по амплитуде низкой частотой Ω, то промодулированными окажутся и другие волны. (Впервые это явление наблюдалось Лбовым в Горьком.)

Пусть мощная волна (будем снабжать ее индексом 1) будет слабой, т. е. $E_{01}^2 \ll E_p^2$. Следуя [3], представим *)

$$E_1(z) = E_0(z, t)\cos(\omega_1 t - \varphi_1),$$
$$E_{01}(z, t) = \left\{\frac{\varepsilon_1(0)}{\varepsilon_1(z)}\right\}^{1/4} E_{01}(0)\left[1 + \widetilde{M}_0 \cos(\Omega t)\right] e^{-\tau_{01}(z)}. \qquad (10.2.21)$$

Подставляя (21) в (10.1.14), после интегрирования получаем для изменения $T_{e\Omega} = \widetilde{T}_{e\Omega} - T$

$$\frac{T_{e\Omega}}{T_e} = \frac{2\widetilde{M}_0 E_{01}^2}{E_p^2} \sqrt{\frac{\varepsilon_1(0)}{\varepsilon_1(z)}}\, e^{-2\tau_{01}(z)} \times$$
$$\times \left\{\frac{\delta\nu_{e0}\cos(\Omega t - \varphi_\Omega)}{\left[(\delta\nu_{e0})^2 + \Omega^2\right]^{1/2}} + \frac{\widetilde{M}_0 \delta\nu_{e0}\cos(2\Omega t - \varphi_{2\Omega})}{4\left[(\delta\nu_{e0})^2 + 4\Omega^2\right]^{1/2}}\right\}, \qquad (10.2.22)$$

*) Вообще говоря, в более общем, чем (6, 10а), случае

$$\tau = \int \mu(l)\, dl,$$

т. е. интегрирование ведется по траектории луча. Естественно, что это выражение может описывать и поглощение радиоволны при наклонном (зенитный угол ϑ) падении, если представить $dl = dz/\cos\vartheta(z)$.

$$\varphi_\Omega = \operatorname{arctg}\frac{\Omega}{\delta\nu_{e0}}, \quad \varphi_{2\Omega} = \operatorname{arctg}\frac{2\Omega}{\delta\nu_{e0}}, \quad \delta(T_e) = \mathrm{const}.$$

Для слабой волны, с учетом неравенства $E_{01}/E_p \ll 1$,

$$\mu_2 = \mu_{20} + (\partial\mu_2/\partial\nu_e)_{\nu_e=\nu_{e0}}\,\nu_{e\Omega}, \qquad \nu_{e\Omega} = \nu_0 T_{e\Omega}/2T$$

(здесь использована зависимость $\nu_e = \nu_{e0}\sqrt{T_e/T}$), имеем

$$E_{02}(z) = \left\{\frac{\varepsilon_2(0)}{\varepsilon_2(z)}\right\}^{1/4} E_{02}(0)\, e^{-\tau_{02}(z)} =$$

$$= E_{020}(0)\left\{1 - \frac{1}{4}\int\limits_0^z \left(\frac{\partial\mu_2}{\partial\nu_e}\right)_{\nu_e=\nu_{e0}} T_{e\Omega}\frac{\nu_{e0}}{T}\, dl\right\}\exp(-\tau_{02}(z)), \qquad (10.2.23)$$

где E_{020} — амплитуда волны в пренебрежении нелинейными эффектами. Из (22) и (23) видно, что слабая волна промодулирована частотами Ω и 2Ω, т. е.

$$E_{02}(z) \sim \{1 - \widetilde{M}_\Omega \cos(\Omega t - \varphi_\Omega) - \widetilde{M}_{2\Omega}\cos(2\Omega t - \varphi_{20})\}.$$

Однако, как следует из (22),

$$\widetilde{M}_{2\Omega} = \frac{\widetilde{M}_0}{4}\left\{\frac{(\delta\nu_{e0})^2 + \Omega^2}{(\delta\nu_{e0})^2 + 4\Omega^2}\right\}^{1/2}\widetilde{M}_\Omega$$

и модуляция на второй гармонике всегда существенно меньше, чем на первой. Для получения окончательных выражений для $\widetilde{M}_\Omega$, $\widetilde{M}_{2\Omega}$ необходимо провести в (23) интегрирование, при этом можно учесть и случай наклонного падения волн (под зенитными углами ϑ_1 и ϑ_2). Если считать при этом, что уровень отражения волны 2 выше уровня отражения волны 1 и учесть прохождение через нижнюю ионосферу отраженных волн при $\omega_1 \gg \gg \nu_{e0}$, то можно получить [4]

$$\widetilde{M}_\Omega = \widetilde{M}_0\,\frac{e^2E_{01}^2(0)}{3Tm}\,\frac{\omega_2^2\cos^2\vartheta_{02} - \nu_{e0}^2}{\left(\omega_2^2\cos^2\vartheta_{02} + \nu_{e0}^2\right)^2}\cos\vartheta_{01}\cos\vartheta_{02}\times$$

$$\times\frac{\nu_{e0}}{\left(\delta\nu_{e0}^2 + \Omega^2\right)^{1/2}}\left(1 - e^{-2\tau_{01}}\right). \qquad (10.2.24)$$

В случае сильной возмущающей волны $E_{01}^2(0)/E_p^2 \geqslant 1$ при расчете эффекта кроссмодуляции необходимо учитывать самовоздействие сильной волны, приводящее к изменению амплитуды волны, глубины и фазы ее модуляции. Очевидно, что вычисления возмущений, вносимых в плазму сильной волной, аналогичны проведенным при рассмотрении эффекта самовоздействия мощной модулированной волны. Если коэффициент модуляции мощной волны $\widetilde{M}_0 \ll 1$, а точка ее отражения, так же как и уровень отражения волны 2, расположена существенно выше области взаимодействия, то при нормальном падении волн на ионосферу

$$E_{02}(z) = E_{02}(0)\exp(-\tau_2) = B_{12}E_{02}(0)\exp(-\tau_{02}),$$

где B_{12} — множитель перекрестной модуляции, для которого справедливо уравнение

$$\partial B_{12}/\partial z + (\mu_2 - \mu_{20})B_{12} = 0.$$

Соответственно, при $\widetilde{M}_0 \ll 1$

$$\widetilde{M}(z) = \widetilde{M}_0\left\{\frac{E_{01}(0)}{B_{12}(z)}\,\frac{\partial B_{12}(z)}{\partial E_{01}(0)}\right\} = \widetilde{M}_0\left\{\mu_{02} - \frac{\mu_2(z)}{\mu_1(0)}\right\}$$

или, с учетом того факта, что $\mu_{02} = \mu_{01} \frac{\omega_2}{\omega_1} \frac{\omega_2^2 + \nu_{e0}^2}{\omega_2^2 + \nu_{e0}^2}$, из (8) имеем [4]

$$\widetilde{M}_\Omega = \widetilde{M}_0 \frac{\omega_1^2 + \nu_{e0}^2 \zeta_T^2(0)}{\zeta_T(0)} \left\{ \frac{\zeta_T(0)}{\omega_2^2 + \nu_{e0}^2 \zeta_T^2(0)} - \frac{\zeta_T(z)}{\omega_2^2 + \nu_{e0}^2 \zeta_T^2(z)} \right\} \quad (10.2.25)$$

и при $\omega_1^2 \gg \nu_{e0}^2 \zeta_T^2(0)$, $\omega_2^2 \gg \nu_{e0}^2 \zeta_T^2(0)$

$$\widetilde{M}_\Omega = \widetilde{M}_0 \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} \frac{\zeta_T(0) - \zeta_T(z)}{\zeta_T(0)} \leqslant \widetilde{M}_0 \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2}. \quad (10.2.26)$$

(При повторном прохождении волны через область взаимодействия после ее отражения величины $\widetilde{M}_\Omega$ в (25), (26) удваиваются.)

Излучение ионосферы при модуляции ионосферных токовых систем (эффект Гетманцева). В отличие от рассмотренных в данном параграфе нелинейных явлений в нижней ионосфере эффект излучения ионосферы при воздействии на нее мощным модулированным излучением, обнаруженный в 1973 г. Гетманцевым и др. [10], может быть связан с квадратичной нелинейностью. В этом случае он описывается вторым и третьим членами (3). Сущность эффекта состоит в том, что при периодическом нагреве ионосферы за счет зависимости $\nu(T_{e\Omega})$ (а при больших мощностях нагрева за счет изменения концентрации электронов) периодически изменяется проводимость, а следовательно, и протекающий на высотах 70—100 км (гл. 1) ток. Вместе с тем периодическое изменение с частотой Ω тока приводит к излучению на данной частоте. Как уже указывалось в гл. 1, ток в ионосфере на данных высотах протекает в направлении, ортогональном направлению $\mathbf{h}$ силовых линий геомагнитного поля. В высоких широтах ток вызван электрическим полем $\mathbf{E}_\text{в}$, а на средних и низких широтах — различным увлечением ионов и электронов атмосферными ветрами. При $\nu_{en} \gg \nu_{ei}$, $\mathbf{E} \perp \mathbf{h}$, $\mathbf{u}_n \perp \mathbf{h}$:

$$\mathbf{j} = eN(\mathbf{u}_{i\perp} - \mathbf{u}_{e\perp}) =$$
$$= eN\left\{\left(\frac{1}{1+b_i^2} - \frac{1}{1+b_e^2}\right)\mathbf{u}_n + \left(\frac{b_i}{1+b_i^2} + \frac{b_e}{1+b_e^2}\right)[\mathbf{u}_n\mathbf{h}]\right\} +$$
$$+ e^2N\left\{\left(\frac{1}{M\nu_{in}(1+b_i^2)} + \frac{1}{m\nu_{en}(1+b_e^2)}\right)\mathbf{E} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{b_i}{M\nu_{in}(1+b_i^2)} - \frac{b_e}{m\nu_{en}(1+b_e^2)}\right)[\mathbf{E}\mathbf{h}]\right\}. \quad (10.2.27)$$

Здесь $b_i = \Omega_H/\nu_{in}$, $b_e = \omega_H/\nu_e$, $\mathbf{u}_n$ — скорость нейтрального газа, $\mathbf{E} = \mathbf{E}_\text{в} + \mathbf{E}_\text{п}$, где $\mathbf{E}_\text{п}$ — поляризационное поле, которое может возникнуть из-за неоднородности среды, в том числе и вызванной нагревом ионосферы мощным радиоизлучением. В (27) $\nu_e = \nu_e(E_0^2)$ и при воздействии на ионосферу модулированной волной (16)

переменная компонента $\nu_{e\Omega}$ равна

$$\nu_{e\Omega} = (\nu_{e0}/2T)T_{e\Omega}, \qquad T_{e0} = T, \tag{10.2.28}$$

где $T_{e\Omega}$ определяется (22). Пренебрежем сначала влиянием поляризационного поля $\mathbf{E}_п$, считая среду однородной, воздействие слабым, а частоту Ω не слишком малой (см. ниже). Тогда из (27) можно видеть, что при этих условиях модуляция ионосферного тока полностью определяется движением электронов. Поскольку с ростом высоты ν_e/ω_H уменьшается, то при отсутствии высотной зависимости других параметров (N, $\mathbf{u}_n$, $\mathbf{E}_в$) переменная компонента тока была бы максимальна при $\nu_e^2/\omega_H^2 \sim 1$ и с ростом высоты убывала бы пропорционально ν_e^2 для педерсеновского (ток вдоль $\mathbf{u}_n$ и $\mathbf{E}$) и пропорционально ν_e — для холловского тока (ток вдоль $[\mathbf{u}_n\mathbf{h}]$ и $[\mathbf{Eh}]$. Реальная зависимость $j_\Omega(z)$ отличается от указанной как ввиду роста концентрации с высотой, так и ввиду (что более важно) уменьшения эффекта нагрева электронов радиоволной с ростом высоты. Эффект модуляции ионосферных токовых систем в значительно большей степени выражен (по сравнению с воздействием на среднеширотный ток) в авроральной ионосфере [11], где имеют место большие электрические поля, а следовательно, и величины $\mathbf{u}_e$.

Значительного эффекта следует ожидать и в районе геомагнитного экватора, где необходимо учитывать неоднородность распределения плазмы по высоте и связанное с ней поляризационное поле. Для вычисления $\mathbf{E}_п$ учтем, что на геомагнитном экваторе силовые линии геомагнитного поля ориентированы горизонтально. Направим $\mathbf{u}_n$ вдоль оси x, $\mathbf{h}$ — вдоль оси y, а ∇N — вдоль вертикальной оси z. Из (27) видно, что в этом случае возникает вертикальный холловский ток, пропорциональный $[\mathbf{u}_n\mathbf{h}]$. Однако из-за неоднородности плазмы по z появление такого тока приводит к возникновению вертикально направленного поляризационного поля $\mathbf{E}_п$, которое «запирает» возникающий ток. Величину $E_п$ можно оценить, исходя из условия $j_z = 0$. Обозначим коэффициенты при $\mathbf{u}_n$ и $[\mathbf{u}_n\mathbf{h}]$ в (27) соответственно через σ_{1u} и σ_{2u}, а коэффициенты при $\mathbf{E}$ и $[\mathbf{Eh}]$ — через σ_{1E} и σ_{2E}. Тогда, полагая $j_z = 0$, имеем

$$\mathbf{E}_п = -(\sigma_{2u}/\sigma_{1E})[\mathbf{u}_n\mathbf{h}]. \tag{10.2.29}$$

Подставляя (29) в (27), получаем

$$j_x = (\sigma_{1u} + \sigma_{2E}\sigma_{2u}/\sigma_{1E})u_{nx}.$$

Дальнейшее рассмотрение существенно зависит от соотношения между частотой модуляции Ω и временем $t_п$ установления поляризационного поля ($t_п \sim 1/\sigma_{1E}$). Если $t_п\Omega \gg 1$, то поляризационное поле не «успевает» следить за изменением ν_e, поэтому при вычислении $j_{x\Omega}$ необходимо учитывать только изменения ν_e с частотой модуляции волны в σ_{1u} и σ_{2E}. Если же $\Omega t_п \ll 1$, то при модуляции тока становятся существенными изменения поляризационного поля, и осциллирующая компонента тока может определяться не только электронной, но и ионной компонентами.

Уровень регистрации индуцированных в ионосфере низкочастотных излучений на поверхности Земли зависит от условий возбуждения этими токами волновода Земля — ионосфера. Существенную роль при этом играет толщина скин-слоя для волн частоты Ω. Поэтому уровень принимаемого низкочастотного излучения зависит от соотношений между толщиной скин-слоя и неоднородностью j_Ω по высоте. Подробное обсуждение основных аспектов проблемы генерации и условий приема указанного излучения при его возбуждении на средних и высоких широтах можно найти в [11, 12].

Периодические решетки в ионосфере. Если ионосфера облучается вертикальным пучком мощных радиоволн частоты ω_1, то отраженное от ионосферы излучение образует стоячую волну с пространственным периодом, равным $2k_1$. Такая волна является источником стрикционной F_c и тепловой $F_T \infty \Delta T_e$ сил, под действием которых плазма вытесняется из областей пучности поля. В результате в ионосфере образуется квазипериодическая по высоте стратификация концентрации плазмы, которая может рассеивать радиоволны. Изменение концентрации электронов, вызванное стоячей волной, можно определить с помощью (10.1.18), подставляя в (6) и (18) выражения для Q_E и F_c, пропорциональные $\cos(2kz)$. На больших высотах, где частота столкновений недостаточно высока, для того чтобы обеспечить заметный нагрев электронов, основную роль в образовании решетки играет стрикционная сила, на высотах области E ионосферы основную роль в ее образовании уже играет сила давления [13—15]. На малых высотах ($z < 70$ км) большой вклад вносят процессы отлипания и рекомбинации электронов, которые являются функцией температуры T_e (п. 1.1). Искусственные периодические решетки впервые были обнаружены в [13] и могут быть использованы для диагностики различных параметров ионосферы.

10.3. Верхняя ионосфера

Верхняя ионосфера ($z \geqslant 130$ км) характеризуется существенно меньшими (чем в слоях D и E) частотами столкновений заряженных частиц с нейтральными и существенно большими длинами свободного пробега электронов и ионов. Поэтому здесь даже при незначительном изменении T_e за счет процессов термодиффузии и разлета возникают заметные изменения концентрации плазмы [16], нелинейные эффекты возникают при амплитуде полей, много меньших плазменного поля (10.1.17). Особенность этих эффектов состоит в том, что они могут вызвать неустойчивость плазмы относительно низкочастотных возмущений (стрикционная, тепловая параметрическая и самофокусировочные неустойчивости). При малом E_0 указанные явления развиваются преимущественно вблизи уровней отражения мощной радиоволны, где она может взаимодействовать с медленными волнами (плазменной волной или

медленной необыкновенной волной в магнитоактивной плазме) и где существует «эффект усиления» поля (см. п. 5.2).

Параметрические неустойчивости ионосферной плазмы в сильном высокочастотном электрическом поле. Пусть на плазму, состоящую из электронов и однозарядных ионов одного сорта, действует высокочастотное электрическое поле $E(t) = E_0 \sin(\omega_1 t)$, частота которого ω_1 существенно больше частоты столкновений электронов с тяжелыми частицами (например, ионами) и гирочастоты электронов. Будем считать, как и ранее, что поле действует только на электроны, а его влиянием на ионы из-за их большой массы будем пренебрегать. Равновесная функция распределения в переменном электрическом поле (п. 2.1) примет вид $f_{e0}(\mathbf{v} - \mathbf{u}_\omega)$, где согласно (10.1.8)

$$\mathbf{u}_\omega = (e\mathbf{E}_0/m\omega_1)\cos(\omega_1 t). \tag{10.3.1}$$

Анализ устойчивости плазмы проведем на примере колебаний плазмы вблизи ее резонансных частот. Линеаризуем кинетическое уравнение непрерывности для электронов и ионов (2.1.3). Тогда для отклонений функций распределений электронов и ионов f_1 имеем ($\nu_i \ll \nu_e \ll \omega$)

$$\begin{gathered}\frac{\partial f_{e1}}{\partial t} - i\mathbf{k}\mathbf{v} f_{e1} - \frac{e}{m}\mathbf{E}_0 \sin\omega_1 t\,\frac{\partial f_{e1}}{\partial \mathbf{v}} + \frac{e\nabla\Phi}{m}\frac{\partial f_{e0}}{\partial \mathbf{v}} - \omega_H[\mathbf{v}\mathbf{h}]\frac{\partial f_{e1}}{\partial \mathbf{v}} = 0,\\ \frac{\partial f_{i1}}{\partial t} - i\mathbf{k}\mathbf{v} f_{i1} - \frac{e\nabla\Phi}{M}\frac{\partial f_{i0}}{\partial \mathbf{v}} + \Omega_H[\mathbf{v}\mathbf{h}]\frac{\partial f_{i1}}{\partial \mathbf{v}} = 0.\end{gathered} \tag{10.3.2}$$

При получении (2) считалось, что f_{e1} и f_{i1} являются пропорциональными $\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r})$. Воспользуемся уравнением Пуассона, считая возникающие в плазме колебания потенциальными:

$$\Delta\Phi = -k^2\Phi = 4\pi e \int (f_{e1} - f_{i1})\,d\mathbf{v}.$$

Тогда в (2) можно члены, содержащие поляризационное поле $\mathbf{E}_п = -\nabla\Phi$, выразить через возмущенные функции распределения f_{e1} и f_{i1} и привести их к виду

$$i\mathbf{k}\,\frac{\partial f_{e0}}{\partial \mathbf{v}}\frac{\omega_{e0}^2}{Nk^2}\int (f_{e1} - f_{i1})\,d\mathbf{v}, \quad -i\mathbf{k}\,\frac{\partial f_{i0}}{\partial \mathbf{v}}\frac{\omega_{i0}^2}{Nk^2}\int (f_{e1} - f_{i1})\,d\mathbf{v},$$

соответственно, в уравнениях для электронов и ионов. Следуя [17, 18], введем новую функцию

$$\psi_e(\mathbf{v}, t) = \exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_E \sin\omega_1 t)\, f_{e1}\left(\mathbf{v} + \frac{e\mathbf{E}_0}{m\omega_1}\cos\omega_1 t\right),$$

$\mathbf{r}_E = e\mathbf{E}_0/m\omega_1^2$. Тогда с учетом того факта, что в новых переменных $\mathbf{v} = \mathbf{v} - \mathbf{u}_\omega$

$$-i\mathbf{k}\mathbf{v} f_{e1} \to -i\mathbf{k}\mathbf{v} f_{e1} + i\mathbf{k}\mathbf{r}_E\omega_1\cos\omega_1 t,$$

$$\frac{\partial \psi_e}{\partial t} = \left(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_E\omega_1\cos(\omega_1 t)\, f_{e1} + \frac{\partial f_{e1}}{\partial t} + \frac{\partial f_{e1}}{\partial \mathbf{v}}\frac{\partial \mathbf{u}_\omega}{\partial t}\right)\exp(-i\mathbf{k}\mathbf{r}_E \sin\omega_1 t),$$

систему (2) сводим к следующей:

$$\frac{\partial\psi_e}{\partial t} - i\mathbf{kv}\psi_e + \\ + i\mathbf{k}\frac{\partial f_{e0}}{\partial \mathbf{v}}\frac{\omega_{e0}^2}{Nk^2}\left\{\int \psi_e d\mathbf{v} - \exp(-i\mathbf{kr}_E \sin\omega_1 t)\int f_{i1} d\mathbf{v}\right\} = 0,$$

$$\frac{\partial f_{i1}}{\partial t} - i\mathbf{kv} f_{i1} - \\ - i\mathbf{k}\frac{\partial f_{i0}}{\partial \mathbf{v}}\frac{\omega_{i0}^2}{Nk^2}\left\{\exp(i\mathbf{kr}_E \sin\omega_1 t)\int \psi_e d\mathbf{v} - \int f_i d\mathbf{v}\right\} = 0, \quad (10.3.3)$$

$$\Omega_H \ll \omega_H \ll \omega.$$

Для получения решения системы (3) обычно используют известное разложение

$$\exp(\pm i\mathbf{kr}_E \sin\omega_1 t) = \sum_{p=-\infty}^{\infty} \exp(\pm ip\omega_1 t) J_p(\mathbf{kr}_E). \quad (10.3.4)$$

Тогда решение системы (3) удобно искать в виде

$$\{\psi_e, f_{i1}\} = e^{i\omega t}\sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp(in\omega_1 t)\{\psi_{en}, f_{in}\}. \quad (10.3.5)$$

Подставляя (4) и (5) в (3), получаем систему интегральных уравнений:

$$\psi_{en} + \frac{\omega_{e0}^2}{Nk^2}\frac{\mathbf{k}\dfrac{\partial f_{e0}}{\partial \mathbf{v}}}{\omega + n\omega_1 - \mathbf{kv}}\left\{\int \psi_{en} d\mathbf{v} - \sum_p J_{p-n}(\mathbf{kr}_E)\int f_{ip} d\mathbf{v}\right\} = 0,$$

$$f_{in} - \frac{\omega_{i0}^2}{Nk^2}\frac{\mathbf{k}\dfrac{\partial f_{i0}}{\partial \mathbf{v}}}{\omega + n\omega_1 - \mathbf{kv}}\left\{\sum_p J_{n-p}(\mathbf{kr}_E)\int \psi_{ep} d\mathbf{v} - \int f_{in} d\mathbf{v}\right\} = 0. \quad (10.3.6)$$

Умножим (6) на $d\mathbf{v}$ и проинтегрируем по $d\mathbf{v}$ в бесконечных пределах. Обозначая

$$N_{en} = \int \psi_{en} d\mathbf{v} \quad \text{и} \quad N_{in} = -\int f_{in} d\mathbf{v},$$

получаем бесконечную систему однородных алгебраических уравнений

$$N_{en}[1 + \delta\varepsilon_e(n\omega_1 + \omega, \mathbf{k})] + \\ + \delta\varepsilon_e(n\omega_1 + \omega, \mathbf{k})\sum_p J_{p-n}(\mathbf{kr}_E) N_{ip} = 0,$$

$$N_{in}[1 + \delta\varepsilon_i(n\omega_1 + \omega, \mathbf{k})] + \\ + \delta\varepsilon_i(n\omega_1 + \omega, \mathbf{k})\sum_p J_{n-p}(\mathbf{kr}_E) N_{ep} = 0, \quad (10.3.7)$$

где

$$\delta\varepsilon_\alpha = \frac{\omega_{\alpha 0}^2}{Nk^2} \int \frac{\mathbf{k}}{\omega - \mathbf{kv}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} d\mathbf{v}, \qquad (10.3.8)$$

($\alpha = e,\ i$) — парциальные вклады электронов и ионов в продольную диэлектрическую проницаемость плазмы.

Для максвелловской функции распределения частиц по скоростям (2.1.16)

$$\delta\varepsilon_\alpha(\omega, k) = \frac{\omega_{\alpha 0}^2}{k^2 v_{T_\alpha}^2} \left\{ 1 - J_+ \left(\frac{\omega}{k v_{T_\alpha}} \right) \right\}, \qquad (10.3.9)$$

где v_{T_α} — тепловая скорость частиц, а

$$J_+(x) = x \exp(-x^2/2) \int\limits_{-i\infty}^{x} \exp(\zeta^2/2)\, d\zeta$$

с асимптотическими представлениями (см., например, [18, 17])

$$J_+(x) = 1 + 1/x^2 + 3/x^4 + \ldots + i\sqrt{\pi/2}\, x \exp(-x^2/2) \qquad (10.3.10)$$

при $|x| \gg 1$, $|\mathrm{Re}\, x| \gg |\mathrm{Im}\, x|$,

$$J_+(x) \simeq i\sqrt{\pi/2}\, x \qquad (10.3.10а)$$

при $|x| \ll 1$ и

$$J_+(x) \approx i\sqrt{2\pi}\, x \exp(-x^2/2) \qquad (10.3.10б)$$

при $|x| \gg 1$, $|\mathrm{Im}\, x| \gg |\mathrm{Re}\, x|$, $\mathrm{Im}\, x > 0$.

Условие разрешимости бесконечной системы алгебраических уравнений (7) представляет собой искомое дисперсионное уравнение для малых продольных потенциальных колебаний плазмы. Будем считать, что частота возмущающей плазму электромагнитной волны близка к электронной плазменной частоте ω_{e0}. Так как $\omega_1 \approx \omega_{e0} \gg \omega_{i0}$, то в системе (7) величины $\delta\varepsilon_i(n\omega_1 + \omega)$ являются малыми для всех $n \neq 0$. Это позволяет учитывать лишь величину N_{i0} и условие разрешимости системы записать в виде

$$1 = \frac{\delta\varepsilon_i(\omega, \mathbf{k})}{1 + \delta\varepsilon_i(\omega, \mathbf{k})} \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n^2(\mathbf{kr}_E) \frac{\delta\varepsilon_e(\omega + n\omega_{e0}, \mathbf{k})}{1 + \delta\varepsilon_e(\omega + n\omega_{e0}, \mathbf{k})}. \qquad (10.3.11)$$

Рассмотрим частный случай, когда воздействие поля на плазму не очень значительно, т. е. случай, когда $\mathbf{kr}_E \ll 1$. Тогда в (7) в суммах по функциям Бесселя достаточно ограничиться первыми тремя слагаемыми с $n = 0, \pm 1$. В результате (11) с учетом того факта, что при $\omega_1 \simeq \omega_{e0}$, $\varepsilon(\omega \pm \omega_1) \approx 1 + \delta\varepsilon(\omega \pm \omega_1) \ll 1$, сводится к виду

$$\frac{1 + \delta\varepsilon_i(\omega, \mathbf{k}) + \delta\varepsilon_e(\omega, \mathbf{k})}{\delta\varepsilon_i(\omega, \mathbf{k})\,[1 + \delta\varepsilon_e(\omega, \mathbf{k})]} + \frac{(\mathbf{kr}_E)^2}{4} \left\{ \frac{1}{\varepsilon(\omega + \omega_1, \mathbf{k})} - \frac{1}{\varepsilon(\omega - \omega_1, \mathbf{k})} \right\} = 0. \qquad (10.3.12)$$

В области достаточно низких частот $\omega \ll kv_{T_i}$, считая длину волны значительно больше дебаевского радиуса электрона, т. е. отношение $(\omega_{e0}/kv_{T_e}) \sim (kr_{eD})^{-1} \gg 1$, и используя асимптотику функции $J_+(x)$ (10) при $x \ll 1$, имеем $\delta\varepsilon_i \approx \left(1 - i\sqrt{\pi/2}\,\omega/kv_{T_i}\right) \times k^2r_{iD}^2$, а $\delta\varepsilon_e \approx \left(1 - i\sqrt{\pi/2}\,\omega/kv_{T_e}\right) k^2r_{eD}^2$, $|\delta\varepsilon_i| \ll 1$, $|\delta\varepsilon_e| \gg 1$,

$$\frac{k^2v_{T_i}^2}{\omega_{i0}^2}\left(1 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega}{kv_{T_i}}\right) + \frac{k^2v_{T_e}^2}{\omega_{e0}^2}\left(1 + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega}{kv_{T_e}}\right) + \frac{(\mathbf{kr}_E)^2}{2}\left\{\frac{\omega_1^2\left(\omega_1^2 - \omega_{e0}^2\right)}{\left(\omega_1^2 - \omega_{e0}^2\right) - 4\omega_{e0}^2\omega_1^2}\right\} = 0. \quad (10.3.13)$$

Учитывая малость мнимого слагаемого ω/kv_{T_e}, (13) легко свести к виду

$$\omega_1^2\delta_\omega^2 - 4\omega^2 - \eta_E\omega_1^2\delta_\omega\left\{1 - i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega}{kv_{T_i}}\frac{T_i}{T_e + T_i}\right\} = 0, \quad (10.3.14)$$

где $\eta_E = w_t/N(T_e + T_i) = E_0^2\cos^2\psi_{ek}/8\pi N(T_e + T_i)$ (ψ_{ek} — угол между $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{k}$) характеризует отношение плотностей энергий высокочастотного электрического поля к энергии плазмы, а $\delta_\omega = (\omega_{e0}^2 - \omega_1^2)/\omega_1^2$. В области малых частот $(\omega \ll kv_{T_i},\ \omega^2/\omega_1^2 \ll |\delta_\omega^2 - \eta_E\delta_\omega|)$

$$\omega \simeq -i\frac{\eta_E - \delta_\omega}{\eta_E}kv_{T_i}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{T_e + T_i}{T_i}. \quad (10.3.15)$$

Поскольку $\omega \ll kv_{T_i}$, рассматриваемые колебания выражены только при $\delta_\omega > 0$, когда плазма непрозрачна к высокочастотному полю. При этом колебания апериодически неустойчивы, если $\eta_E > \delta_\omega$. Из условия применимости бесстолкновительного приближения (условия пренебрежения столкновениями в выражениях (2), (9)) следует, что δ_ω должно быть больше $\nu_e/\omega(\mathrm{Im}\,\omega > \nu_e)$. Следовательно, апериодическая неустойчивость может развиться при $\eta_E > \nu_e/\omega_1$ или более точно

$$w_{t,\text{п}}/N(T_e + T_i) > 4\nu_e/\omega_1, \quad \nu_e/\omega_1 \ll 1.$$

При этом скорость осцилляций электронов в поле волны является малой по отношению к их тепловой скорости $u_{e\omega}^2/v_{T_e}^2 \sim w_t/N(T_e + T_i) \ll 1$.

Если в плазме $T_e \gg T_i$, то в ней возможно существование развитых ионно-звуковых колебаний. Воздействие на такую плазму высокочастотным электрическим полем приводит к возбуждению плазменных и ионно-звуковых волн. В области частот $kv_{T_i} \ll \omega \ll kv_{T_e}$ и $k^2v_{T_e}^2 \ll \omega_{e0}^2$ в выражениях для $\delta\varepsilon_i(\omega, k)$ можно

воспользоваться (10а). Тогда вместо (14) имеем

$$-\frac{\omega^2}{\omega_{i0}^2}+\frac{k^2v_{T_e}^2}{\omega_{e0}^2}\left(1+i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{\omega}{kv_{T_e}}\right)-\frac{(\mathbf{kr}_E)^2}{2}\frac{\delta_\omega}{\delta_\omega^2-4\dfrac{\omega^2}{\omega_1^2}}=0. \quad (10.3.16)$$

Таким образом, ионно-звуковые колебания могут возбуждаться в области прозрачности плазмы по отношению к высокочастотному полю, т. е. при $\omega_1>\omega_{e0}$. Действительно, при резонансном условии

$$\omega=kc_s=\omega_1-\omega_{e0}, \quad (10.3.17)$$

когда частота ω_1 равна сумме электронной ленгмюровской частоты и частоты ионно-звуковых колебаний, из (16) находим инкремент параметрической (в данном случае распадной, так как процесс, описываемый (17), можно трактовать как распад образованной нелинейной волны на плазменную и ионно-звуковую волны) неустойчивости

$$\gamma=\operatorname{Im}\omega\approx\frac{\omega_{e0}^2-\omega_1^2}{16\omega^2}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{(\mathbf{kr}_E)^2}{(kr_{eD})^2}kv_{T_e} \quad (10.3.18)$$

с порогом неустойчивости, определяемым, как и ранее, из условия пренебрежения столкновениями в ε

$$\eta_E>\sqrt{8\pi m/M}\,\nu_e/\omega_1. \quad (10.3.18а)$$

В ионосферной плазме в основном $T_e/T_i\sim1$, поэтому возможно развитие только неустойчивости с $\eta_E>\nu_e/\omega_1$. Она наблюдалась и исследовалась в [19—22] *). Физическая сущность такой неустойчивости состоит в том, что электромагнитная волна трансформируется в плазменную на уровне $\varepsilon=0$ за счет тепловых флуктуаций плазмы. Процесс трансформации волн легко понять на основе следующих соображений. Предположим, что в плазме имеются флуктуации N_e, одна из спектральных (по волновым числам $\varkappa$) компонент которых вместе с положением векторов $\mathbf{E}_0$ и $\mathbf{k}$ показаны на рис. 10.1. Под действием поля электроны, смещаясь в неоднородном профиле $\tilde N_\varkappa$, вызовут поляризационные поля $\mathbf{E}_п$, которые будут изменять знак на пространственном масштабе $l=2\pi/\varkappa$ $(k_1\ll k)$, а во времени будут изменяться с частотой ω_1 падающей волны. Если ω_1 и k удовлетворяют дисперсионному соотношению для плазменной волны, то такие волны будут усиливаться. Действительно, используя для плотности

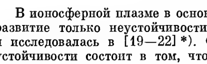

Рис. 10.1. Механизм возникновения поляризационных полей при трансформации электромагнитной волны в плазменную.

*) Теоретические исследования стрикционной параметрической неустойчивости в плазме были начаты в [23].

тока $\mathbf{j}_e(\omega_1) = -ie^2\mathbf{E}_0N/m\omega_1$ и уравнение непрерывности (10.1.3), легко видеть, что спектральная амплитуда продольных волн E_l примерно равна $E_l \simeq (\widetilde{N}_\varkappa/N)E_0/\varepsilon_l$.

Параметрическая неустойчивость связана с расслоением плазмы под действием стрикционной силы F_c, которая возникает при интерференции полей электромагнитной и продольной волн. Неоднородности с волновым числом $\varkappa = |k_l - k_1|$ образуются под действием компоненты $F_c \infty \nabla|\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_l|^2$, пропорциональной $2|E_0E_l|$. Поэтому

$$F_c \simeq \frac{i\omega_{e0}^2\varkappa}{8\pi\omega_1^2} E_0E_l^* \approx \frac{i\omega_{e0}^2\varkappa\widetilde{N}_\varkappa}{8\pi\omega_1^2N}\frac{E_0^2}{\varepsilon_l}. \qquad (10.3.19)$$

Из (10.1.18) при $\omega > \nu_{in}$ и $q_\alpha = \alpha_\alpha' = 0$ получаем следующее дисперсионное уравнение для низкочастотных возмущений плазмы ($\omega = i\gamma$):

$$\gamma^2 + \varkappa^2[(T_e + T_i)/M]\left[1 + E_0^2/8\pi\varepsilon_lN(T_e + T_i)\right] = 0, \quad (10.3.20)$$

где $\varepsilon_l(\omega - \omega_1) \approx 1 - \omega_{e0}^2/\omega_1^2 \approx -\delta_\omega$ *). Отсюда ясно, что возмущения плазмы возрастают при $\delta_\omega > 0$, так как при $\delta_\omega > 0$ стрикционная сила приводит к вытеснению плазмы из области с меньшей концентрацией плазмы в области с большим ее значением. Если $\delta_\omega < 0$, то сила F_c изменяет знак и вытесняет плазму из областей с $\widetilde{N}_\varkappa > 0$. Поэтому апериодические возмущения плазмы при $\delta_\omega < 0$ затухают, однако необходимая для роста возмущений фазировка может быть обеспечена и в этом случае, если низкочастотные волны имеют конечную фазовую скорость, равную, например, скорости распространения ионно-звуковой волны $\omega = kc_s$, когда в системе координат, движущейся вместе с максимумом $\widetilde{N}_\varkappa$, частота ω_1 поля E_0 равна $\omega - kc_s$. Очевидно, что при этом взаимодействие будет наиболее эффективным, если выполняется известное условие распада $\omega = \omega_l - \omega_e$. Апериодическая неустойчивость будет развиваться, если затуханием плазменных волн за время γ^{-1} можно пренебречь. Отсюда следует условие ее возникновения и выражение для порогового значения (см. (20)).

Реальная картина параметрической неустойчивости в ионосфере сложнее изложенной. Во-первых, ионосфера является средой неоднородной, поэтому необходимо учесть «вынос» плазменных волн из области их взаимодействия с полем E_0. Во-вторых, в приведенном выше рассмотрении пренебрегалось такими нелинейными эффектами, как индуцированное рассеяние плазменных волн [1, 24], которое приводит к перекачке энергии плазменных волн в другие волновые числа. В случае сильных полей, когда $|\widetilde{N}|/N \approx k^2r_{eD}^2$, необходимо учитывать также изменение дисперсионных характеристик для плазменной моды, т. е. такие

*) Из закона сохранения энергии $\hbar\omega_1 = \hbar(\omega_e \pm \omega)$, и плазменная волна имеет частоту, сдвинутую относительно ω_1 на величину ω. Согласно (20) $\gamma < 0$ и действительно при $\eta_E > 2\nu_e/\omega_1$ ($\delta_\omega \approx \omega/\omega_1$, $\omega \gtrsim \nu_e/2$).

эффекты, как отражение плазменных волн от образованных неоднородностей и др.

Тепловая параметрическая неустойчивость в ионосфере. Стрикционная параметрическая неустойчивость возникает в ионосфере вблизи уровня $z = z_0$ отражения мощной радиоволны, где в силу квазипоперечного характера распространения (гл. 5) поле $\mathbf{E}_0$ обыкновенной волны направлено вдоль $\mathbf{h}$. Поэтому волновые векторы возникающих плазменных волн и низкочастотных возмущений ориентированы вдоль этого направления. При $z < z_0$ в области, где распространение волны имеет квазипродольный характер (в случае облучения среднеширотной ионосферы вертикальным пучком радиоволн), поле $\mathbf{E}_0$ примерно ортогонально $\mathbf{h}$. Согласно рис. 10.1 поляризационное поле $\mathbf{E}_п$ теперь может иметь компоненту, ортогональную $\mathbf{h}$. В этом случае за счет эффекта трансформации могут возбуждаться волны в области верхнего гибридного резонанса (п. 5.3), точнее, в области значений $(1-u) \leqslant \leqslant v < 1$. Так как для таких волн $\mathbf{E}_l \perp \mathbf{h}$, то нелинейная сила, пропорциональная $|\mathbf{E}_0 + \mathbf{E}_l|^2$, носит тепловой характер (п.10.1). Основную роль при образовании низкочастотных возмущений плазмы играет источник нагрева $Q_E \sim \sigma|E_0 + E_l|^2$, изменяющий температуру электронов, и, следовательно, градиент давления $\nabla(NT_e)$.

Положим для простоты угол α между $\mathbf{k}_1$ и $\mathbf{h}$ равным нулю и запишем уравнение (10.1.14) для фурье-компоненты $T_{\varkappa_\perp}$ [25—28]:

$$\frac{\partial^2 T_{\varkappa_\perp}}{\partial z^2} - L_T^{-2} T_{\varkappa_\perp} = -\frac{2}{3D_T N} Q_{E,\varkappa_\perp}, \quad L_T^2 = \frac{D_T}{i\omega + (\delta + \delta_1)\nu_e}, \quad (10.3.20a)$$

где $D_T = T_e/m\nu_e$, δ — доля передаваемой энергии другим частицам при столкновениях, а $\delta_1 = \varkappa_\perp^2 v_{T_e}^2/\omega_H^2 = \varkappa_\perp^2 r_{eH}^2$. Будем интересоваться волновыми числами $\varkappa_\perp > \omega_1/c$. Тогда источник нагрева в (20а) отличен от нуля только в области существования плазменных волн, т. е. в малом высотном интервале (для линейного слоя $\varepsilon = 1 - z/z_1$, $\Delta z = (\omega_H^2/\omega^2)\, z_1$), который много меньше длины теплопроводности L_T. Для указанных $\varkappa_\perp$

$$Q_{E,\varkappa_1} = Q_1 + Q_2 \propto 2\,\widetilde{|\mathbf{E}_0 \mathbf{E}_l| + |\mathbf{E}_l|^2}, \quad \sigma_{\omega_1} = \frac{e^2 N\nu_e}{m\omega_1^2}. \quad (10.3.21)$$

Так как $\mathbf{E}_l \approx \delta N_{\varkappa_\perp} \mathbf{E}_0/\varepsilon_l \left(\delta N_\varkappa = N_\varkappa/N\right)$, то на самой начальной стадии воздействия мощным радиоизлучением, когда флуктуации плазмы $\tilde{N}_\varkappa/N$ достаточно малы, первый член (21) гораздо больше второго. В этом случае (линейная стадия тепловой параметрической неустойчивости — ТПН) $Q_E \approx -\delta N_{\varkappa_\perp} \sigma_{\omega_1} E_0^2 \omega_1/\nu_e$ $(\varepsilon_l \approx -\nu_e/\omega_1)$. Тогда из (21) в пренебрежении членом $\partial^2 T_{\varkappa_\perp}/\partial z^2$ $(\varkappa = \varkappa_\perp)$ получаем

$$[i\omega + (\delta + \delta_1)\nu_e]\, T_{\tilde{\varkappa}_\perp} = -\frac{2}{3}\frac{e^2}{m\omega_1} \delta N_{\varkappa_\perp} E_0^2.$$

Но из условия $\nabla(p_e + p_i) = 0$ имеем $T_{\varkappa_\perp} \approx -\widetilde{N}_{\varkappa_\perp}(T_e + T_i)/N \approx$ $\approx -2\left(\widetilde{N}_{\varkappa_\perp}/N\right) T_e$. Поэтому

$$\operatorname{Im}\omega = \gamma \approx (\delta + \delta_1)\, \nu_e - \left(e^2 E_0^2/3m\omega_1 T_e\right).$$

Отсюда, полагая $\omega_1 \approx \omega_{e0}$, получаем следующее необходимое условие возбуждения ТПН:

$$\frac{w_{t,\text{п}}}{N(T_e + T_i)} = \frac{E_0^2}{16\pi N T_e} > \frac{3}{4}(\delta + \delta_1)\frac{\nu_e}{\omega_1}. \qquad (10.3.22)$$

Для более строгого вывода дисперсионного уравнения ТПН необходимо решать уравнения (20а) совместно с уравнением непрерывности (10.1.18), которое в нашем случае можно представить в виде

$$\frac{\partial^2 N_{\varkappa_\perp}}{\partial z^2} - L_N^{-2} N_{\varkappa_\perp} \approx -\frac{N}{T_e}\left(\frac{\partial^2 T_{\varkappa_\perp}}{\partial z^2} - L_{N0}^{-2} T_{\varkappa_\perp}\right),$$

где $L_N^2 = D_N/(i\omega + 2\delta_1\nu_e)$, $D_N = 2T_e/M\nu_{in}$ $(T_e = T_i)$, а $L_{N0} =$ $= L(\omega = 0)$. К ним следует добавить и уравнения переноса для полей E_l и E_0. Однако, представляя, как и ранее, $E_l = -E_0 \delta N_{\varkappa_\perp} \times$ $\times \cos\chi/\delta_\omega$ (здесь χ — угол между E_0 и E_l, а $\delta_\omega \approx \nu_e/\omega_1$), из уравнений непрерывности и теплопроводности в случае однородной среды и $\varkappa = \varkappa_\perp$ получаем систему из двух алгебраических уравнений, решение которой

$$-\omega^2 + i\omega(3\delta_1 + \delta)\nu_e + 2\delta_1\nu_e\left\{(\delta + \delta_1)\nu_e - e^2E_0^2\cos^2\chi/3m\omega_1 T_e\right\} = 0$$

определяет пороговое значение поля и инкремент γ ТПН *).

В неоднородной среде порог ТПН повышается прежде всего по двум причинам:

а) тепло выделяется только на длине синхронизма L_c $\left(L_c^{-1} \sim \right.$ $\left.\sim \pi\sqrt{|\partial(k_1 - k_l - \varkappa_z)/\partial z|}\right)$ плазменной и электромагнитной волн, а распределяется по-прежнему на длине $L_T \sim \delta_{\text{эф}}^{-1} l_{\text{св}}$, поэтому эффективность нагрева будет меньше, чем в однородной плазме;

б) плазменные волны выносятся из-за неоднородности ионосферы по z из области взаимодействия за время $\tau \sim L_c/v_{\text{гр},z} < \tau_{\text{ж}}$ ($\tau_{\text{ж}}$ — время жизни волн, $\tau_{\text{ж}} \sim \nu_e^{-1}$). В результате в неоднородной среде

$$w_{t,\text{п}}^{\text{н}} \sim \frac{L_{\text{т}}}{L_{\text{c}}}\frac{\tau_{\text{ж}}}{\tau} w_{t,\text{п}} \sim \frac{2l_{\text{св}}}{L_N}\sqrt{\delta_{\text{э}}},$$

где $L_N = N/|\partial N/\partial z|$, а $w_{t,\text{п}}$ определяется (22) [25].

*) Инкремент ТПН [25]

$$\gamma \approx 4\omega(w - w_{t,\text{п}})/9(1 + \delta/3\delta_1) N T_e.$$

По мере роста $\delta N_{\varkappa_\perp} Q_1 \propto \delta N_{\varkappa_\perp} E_0^2/\varepsilon^l$ может стать меньше $|Q_2| \sim E_l^2 \sim \delta N_{\varkappa_\perp}^2 E_0^2/\varepsilon_l^2$. Это будет иметь место при

$$\delta N_{\varkappa_\perp} > \varepsilon_l \sim \nu_e/\omega, \quad \langle \widetilde{N}_\varkappa^2 \rangle = \Phi_N(\varkappa).$$

В этом случае вместо (22) получаем следующее условие неустойчивости для однородной среды:

$$\frac{w_{t,\text{п}}}{N(T_e + T_i)} > \frac{3}{4} \frac{\nu_e^2(\delta + \delta_1)}{\omega \delta N_{\varkappa_\perp}},$$

т. е. значение порогового поля уменьшается с ростом $\delta N_{\varkappa_\perp}$. Поэтому если в ионосфере имеются «затравочные» неоднородности в области волновых чисел $\varkappa \sim k_l$, то линейная стадия ТПН может отсутствовать. Зависимость источника нагрева от $\delta N_{\varkappa_\perp}$ и конечное время жизни неоднородностей приводят к гистерезисному характеру зависимости «установившегося» значения $\delta N_{\varkappa_\perp,0}^2$ от E_0^2. Неустойчивость с $Q_E = Q_2$ называют резонансной [26]. В приближении однородной плазмы наряду с членами с $\delta N_{\varkappa_\perp}^2$ в источнике нагрева Q_2 необходимо учитывать и рассеяние плазменных волн на неоднородностях, а также квазилинейный характер взаимодействия. Последний состоит в том, что электромагнитная волна, трансформируясь в плазменную, ослабевает. В результате $\mathbf{E}_l$ достигает насыщения, что является одной из причин ограничения роста $\delta N_{\varkappa_\perp}$. Коэффициент ослабления плотности энергии электромагнитной волны за счет ее трансформации в слое плазмы с линейным профилем $\varepsilon = 1 - z/z_1$ равен [25]

$$w_t = w_t(0)\, e^{-\tau}, \quad \tau \approx \pi z_1 \omega_1 \delta N^2 u^{1/4}/c, \quad \delta N^2 = N^{-1} \int \Phi_N(\varkappa)\, d\varkappa. \tag{10.3.23}$$

Здесь учтено, что групповая скорость волны $v_{\text{гр}} = cu^{-1/4}$. Так как стрикционная нелинейность имеет существенно большие инкременты, чем ТПН, и возникает на большей высоте ($v = 1$), то после развития ТПН из-за сильного ослабления волны накачки за счет ее трансформации в области $v = 1 - u$ стрикционное расслоение плазмы в поле мощной радиоволны, как правило, прекращается.

Тепловая самофокусировочная неустойчивость радиоволн в верхней ионосфере. Подобно обычной линзе в фокусирующей плазменной линзе, показатель преломления n должен убывать от ее центра к краям, чтобы обеспечить необходимое для фокусировки радиоволны направление волнового фронта. Однако для плазмы при $\omega \gg \omega_H$ областям с бо́льшим значением n соответствуют области, обедненные концентрацией электронов. Нагрев плазмы мощной радиоволной пропорционален квадрату амплитуды поля (п. 10.1). Поэтому если основным механизмом изменения концентрации плазмы под действием поля волны является вытекание плазмы за счет силы давления $\nabla(NT_e)$ из более нагретых областей плазмы, то в областях с повышенным значением амплитуды поля концентрация электронов должна уменьшаться. Представим теперь, что в каком-либо месте пространства произошло увеличение амплитуды E_0. Тогда здесь вследствие уменьшения N_e

показатель преломления увеличивается по сравнению с окружающими областями, и волна фокусируется. Последнее приводит к еще большему увеличению E_0, нагрев станет более интенсивным, а выталкивание плазмы и фокусировка еще более значительными, т. е. радиоволна и плазма становятся неустойчивыми относительно малых возмущений $\tilde{N}$ и $\tilde{E}$. В результате первоначально плоская волна или ограниченный пучок волн разбивается на узкие сфокусированные нити, а в плазме образуются неоднородности. Очевидно, что характерный поперечный (по отношению к вектору $\mathbf{k}_1$) размер неоднородностей не может быть в этом случае меньше длины волны λ в среде ($kl > 1$), как это имело место в случае рассмотренных параметрических неустойчивостей.

Особенность самофокусировочной неустойчивости (СФН) в F-слое ионосферы состоит в том, что плазма здесь существенно анизотропна, а нагрев ее полем волны из-за большой теплопроводности, особенно в направлении $\mathbf{h}$ силовых линий геомагнитного поля, не является локальным. Кроме того, важную роль играет регулярная неоднородность ионосферы по высоте, которая приводит к тому, что СФН наиболее интенсивно развивается в области отражения радиоволн, где поле волны вследствие каустического эффекта резко увеличивается и где возникает интерференция падающей и отраженной волн.

Теория СФН применительно к верхней ионосфере была подробно разработана в [26, 29—32]. Выражение для порогового поля по порядку величины можно оценить на основе тех же соображений, которые использовались при оценке $w_{t,\text{п}}$ для ТПН. Необходимо, чтобы нагрев превышал остывание электронов из-за теплопроводности и столкновений (а «сгонка» плазмы в неоднородности не была бы нарушена из-за ее диффузии). Не вдаваясь в громоздкие вычисления, приведем основные характеристики СФН в ионосфере: оптимальный поперечный $\mathbf{h}$ масштаб неоднородностей $200 \leqslant l_\perp \leqslant 600$ м, пороговое поле на один — два порядка меньше плазменного поля E_p [26].

Экспериментальные исследования искусственной ионосферной турбулентности (ИИТ). В настоящее время существует несколько установок (Платтвиль, Аресибо — США, Тромсе — Норвегия, Москва, Горький — СССР), на которых активно исследуют ИИТ. Обычно это передатчики непрерывного (или импульсного) излучения со средней мощностью $P_0 \approx 10^2—10^3$ КВт и антенной с коэффициентом усиления $G \approx 100—400$ (эквивалентная мощность $P_э = P_0 G_0 = 10 — 4 \cdot 10^2$ МГВт).

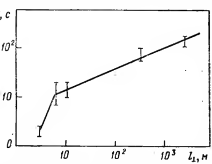

Рис. 10.2. Зависимость времени релаксации искусственной ионосферной турбулентности от масштаба $l_\perp$.

Стрикционная параметрическая неустойчивость развивается через 2—3 мс после включения передатчика. Она регистрируется по уменьшению уровня отраженного от ионосферы сигнала при превышении $P_э$ порогового значения (который примерно составляет 10 МГВт), а также по увеличению уровня плазменных волн [19—22], регистрируемых методом некогерентного рассеяния радиоволн (п. 11.7), которые ускоряют фотоэлектроны (п. 1.1) до энергии ионизации плазмы [33]. В течение первой секунды воз-

действия на ионосферу наблюдаются также колебания уровня отраженного сигнала («пичковый» характер возбуждения). Затем через 1—20 с (в зависимости от $P_э$) развивается ТПН, которая быстро переходит в нелинейный режим. Пороговые значения ТПН составляют 1—10 МВт. В результате развиваются неоднородности с масштабами $l_\perp$, меньшими $\lambda_1 = c/f_1$ и большими 0,5—1 м. Эти неоднородности сосредоточены в высотном интервале от 10 до 30 км около уровня отражения мощной радиоволны обыкновенной поляризации, причем Δz увеличивается с ростом $l_\perp$. Через 3—20 с развивается крупномасштабная структура с $0{,}1 \leqslant l_\perp \leqslant 1$—5 км, которая уже занимает высотный интервал до 100—300 км и, по-видимому, связана с СФН. После выключения мощного радиопередатчика ИИТ релаксирует. Зависимость времени релаксации ИИТ от $l_\perp$ приведена на рис. 10.2. Для $l_\perp < l_\perp^*$ ($l_\perp^* \approx 3$—10 м) согласно экспериментальным данным релаксация определяется коэффициентами поперечной электронной диффузии $\left(t_p \sim 2D_{e\perp}/\varkappa_\perp^2,\right.$ $\left.D_{e\perp} = T_e\nu_e/m\omega_H^2\right)$, а при $l_\perp > l_\perp^*$ — продольной ионной диффузией $\left(t_p \sim l_\parallel^2/8D_{i\parallel},\ D_{i\parallel} = T_i/M\nu_{in}\right)$. Мелкомасштабная турбулентность с $l_\perp \leqslant 30$ м регистрируется также методом ракурсного рассеяния (п. 11.6) и оказывает существенное влияние на характер ионосферного распространения радиоволн. Турбулентность с $l_\perp \geqslant 100$ м регистрируется методом радиомерцаний с помощью ИСЗ (п. 11.5). Более подробно с экспериментальными исследованиями ИИТ можно познакомиться в [34, 35].

В последнее время интенсивно исследуется стимулированное излучение ионосферы, обусловленное прямой и обратной трансформацией волн. Излучение сосредоточено в интервале частот $|f_и - f_1| \simeq 10$—70 кГц (как правило, $f_и < f_1$). Исследование динамических характеристик этого спектра излучения позволяет получать сведения о ИИТ разных масштабов.

ГЛАВА 11

МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ ИОНОСФЕРНОЙ И КОСМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЫ

Радиофизические методы изучения ионосферной и космической плазмы в значительной мере основаны на тех эффектах излучения и распространения радиоволн в плазме, которые обсуждались в предыдущих главах. Например, изучение радиоизлучения спокойного Солнца позволило в свое время получить данные о распределении концентрации и температуры электронов в солнечной короне, исследование медленно меняющейся компоненты радиоизлучения стало одним из методов изучения магнитных полей в верхней хромосфере, а в последнее время привлекается и для анализа атмосфер ряда звезд, динамические спектры радиовсплесков III типа явились источником сведений не только о распределении концентрации тепловой плазмы в солнечной и околосолнечной плазме, но и о потоках электронов, инжектируемых из активных областей атмосферы Солнца. Космическое излучение позволило получить сведения о распределении релятивистских электронов в Галактике и о плазме ряда других внегалактических объектов. Радиоизлучение пульсаров широко используется для изучения атмосфер нейтронных звезд и параметров галактической плазмы, через которую это радиоизлучение проходит, прежде чем быть принятым на поверхности Земли. Основные методы исследования космической плазмы начали развиваться при изучении солнечной хромосферы и короны, а также ионосферы Земли. При изучении ионосферы были подробно разработаны методы радиозондирования или радиолокации ионосферной плазмы, ее радиопросвечивания источниками космического радиоизлучения и сигналами искусственных спутников Земли (ИСЗ). Впоследствии часть этих методов с успехом использовалась в применении к межпланетной и межзвездной среде, а также при диагностике параметров лабораторной плазмы. В настоящей главе мы остановимся только на методах, основанных на радиозондировании и радиопросвечивании среды, которые в меньшей мере обсуждались в том или ином виде при изложении материала гл. 8—10. Кроме того, мы не будем касаться методов изучения ионосферной и межпланетной плазмы, а также планет Солнечной системы, которые основаны на измерении параметров среды с помощью зондовых приборов, установленных на космических аппаратах.

11.1. Импульсное зондирование ионосферы

Под импульсным зондированием ионосферы понимают зондирование ионосферы радиосигналами, частота которых меньше максимальной частоты отражения. При вертикальном зондировании — это критическая частота ионосферы $f_к$, т. е. плазменная частота f_{e0}, соответствующая максимальному значению концентрации электронов в ионосфере, а при наклонном — $f_{накл} = f_к/\cos\vartheta_0$ (ϑ_0 — угол падения радиоволны на ионосферу). Максимальная величина $f_{накл}$, которая имеет место при излучении под «нулевым» углом к горизонту (п. 9.1), носит название максимально применимой частоты (МПЧ).

Наибольшее распространение получило вертикальное зондирование ионосферы [1, 2]. Станция ионосферного зондирования представляет собой радиолокатор, работающий в диапазоне частот 1—20 МГц. Обычно весь этот диапазон частот станция излучает и принимает за единицы — десятки секунд. Радиосигналы, отраженные от ионосферы, усиливаются синхронно перестраиваемым приемником и записываются, как правило, в виде светящихся следов (яркостная запись) на экране осциллографа в координатной системе частота — высота (дальность) отражения сигнала.

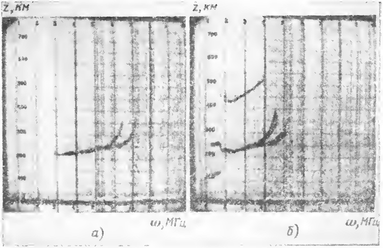

Рис. 11.1. Примеры ионограмм при вертикальном зондировании ионосферы импульсными радиосигналами.

Такие записи носят название ионограмм, пример одной из них приведен на рис. 11.1. Минимальная ширина следа отраженного от ионосферы сигнала соответствует длительности посылаемого импульса τ и примерно равна $v_{гр}\tau/2$ (обычно в станциях ионосферного зондирования используются импульсы с $\tau \leqslant 100$ мкс). Расстояние следа от оси абсцисс характеризуется действующей

высотой отражения волны данной частоты от ионосферы. Эта высота превышает истинную высоту отражения ($z_д = ct_з/2$, $t_з$ — время задержки отраженного сигнала относительно момента его излучения), так как при распространении радиосигнала в ионосферной плазме $v_{гр} < c$. При этом

$$z_д(\omega) = c \int_0^{z_и} dz/v_{гр}, \qquad (11.1.1)$$

где $z_и$ — высота уровня отражения радиосигнала от ионосферы для заданной частоты.

Как правило, при зондировании ионосферы излучается волна линейной поляризации, которая, как известно, может быть представлена как суперпозиция двух нормальных волн обыкновенной и необыкновенной поляризации. Факт различия в распространении нормальных волн отражается при этом на ионограмме в виде двух следов. Верхний след соответствует волне обыкновенной поляризации. Решая интегральное уравнение (1), можно найти истинную высоту отражения сигнала данной частоты, а из условия отражения $n_{1,2}(\omega) = 0$ — электронную концентрацию N. Для $f \gg f_н$ (в ионосфере $f_н \approx 1{,}4$ МГц) влиянием геомагнитного поля на распространение радиоволн можно пренебречь и положить в (1) $v_{гр} = c\tilde{n}$. Связь между частотой отражения f_0 и N на уровне отражения можно представить в виде

$$N = 1{,}24 \cdot 10^{-8} f_0^2. \qquad (11.1.2)$$

Соотношение (2) справедливо и при учете влияния $\mathbf{H}_0$, но только для обыкновенной волны. Последнее связано с тем, что в области отражения волны имеет место случай квазипоперечного распространения (за исключением геомагнитного экватора), а для обыкновенной волны в этом приближении $\tilde{n}_2 = 1 - v_e$ (п. 3.2). Таким способом получаются кривые $N(z)$ в ионосфере на высотах, меньших высоты максимума F_2 слоя ионосферы. Пример зависимости N на фиксированной высоте от времени суток приводился в гл. 1 (рис. 1.6).

Решение интегрального уравнения (1) при оценке $N(z)$ часто заменяют интегрированием в (1) для модельного высотного профиля концентрации. В п. 1.1 мы указывали, что в F-слое, например, распределение $N(z)$ вблизи высоты z_{max} максимума слоя может быть представлено в параболическом виде. Принимая, что (9.1.1)

$$N(z) = N_{max}\left[1 - (z - z_0)^2/z_m^2\right], \qquad (11.1.3)$$

и подставляя (3) и (2) в (1), после интегрирования имеем

$$z_д = z_{00} + (z_m f/2f_к) \ln (f_к + f)/(f_к - f) \qquad (11.1.4)$$

(z_{00} — высота нижней границы слоя). Это соотношение может быть использовано для примерной оценки параметров N_{max}, z_0 и z_m.

Зондирование ионосферы с борта ИСЗ. После запуска искусственного спутника Земли ионосферные станции стали располагать на борту ИСЗ, орбита которых была расположена на высотах, больших z_0. Это позволило получить сведения о высотном распределении N во внешней ионосфере. Первая такая станция была расположена на борту ИСЗ «Алуэт-1», имеющего орбиту, близкую к круговой, с высотой $z_c \sim 1000$ км [3]. Ионограммы, полученные с борта ИСЗ, в основном аналогичны ионограммам, получаемым на станциях зондирования ионосферы с поверхности Земли (с учетом отличия профиля концентрации во внешней ионосфере). Однако они имеют ряд особенностей, связанных прежде всего с наличием станции зондирования непосредственно в плазме. Одна из таких особенностей связана с возбуждением плазменных волн на частотах, соответствующих резонансным частотам. Интерпретация таких «резонансов» может быть проведена на основе соотношений, полученных в п. 5.4. Предположим, что антенна изотропно излучает плазменные волны, которые распространяются в неоднородной ионосферной плазме и, отражаясь, вновь принимаются антенной ИСЗ. Тогда, учитывая групповую скорость плазменных волн и скорость перемещения ИСЗ, можно оценить время запаздывания этих волн, которое будет зависеть от угла излучения [4]. Это запаздывание может достигать сотых и десятых долей секунды. При поперечном распространении незатухающими являются волны на частотах верхнего гибридного резонанса и гармониках гирочастоты. Подобные данные обычно используются для анализа различного типа волн, существующих непосредственно в ионосфере и не распространяющихся вне слоя ионосферной плазмы [3, 4].

Изучение неоднородностей ионосферы методом вертикального зондирования. Как видно из рис. 11.1, *б*, встречаются ионограммы, след отраженного сигнала на которых имеет диффузный характер. Такого типа ионограммы на средних и низких широтах встречаются в ночные часы, а в высоких широтах — в любое время суток. Диффузный след свидетельствует о наличии вблизи уровня отражения волны неоднородностей электронной концентрации. Существует два механизма, приводящих к диффузности следа. Один из них обусловлен неоднородностью критической частоты $\tilde{f}_к \simeq f_к\tilde{N}/2N$, в результате чего в пределах диаграммы направленности передающего и приемного устройств существуют разные «лучи», частота отражения от ионосферы которых отличается на $\tilde{f}_к$ [5]. Эффективна такая диффузность при условии, что масштабы неоднородностей $\sqrt{\lambda z_и} \ll l \ll \vartheta_д z_и$ ($\vartheta_д$ — угловая ширина диаграммы направленности станции зондирования).

Другой механизм обусловлен статистическим запаздыванием радиоволн, рассеянных неоднородностями, которое прежде всего связано с уменьшением групповой скорости сигнала вблизи уровня отражения [6].

Найдем статистические характеристики волны, отраженной от ионосферы. Представим изменение $\langle\varepsilon\rangle$ вблизи уровня отражения в виде линейной функции z (5.2.29) с характерным масштабом z_1. Тогда, отсчитывая z' от уровня отражения, получаем $\langle\varepsilon\rangle = -z'/z_1$. Найдем флуктуации фазы отраженной волны s в приближении геометрической оптики. Последнее справедливо при условии, что длина волны в среде $\lambda \ll 2\pi l$ и $\lambda z_1/l^2 \ll 1$ (п. 8.1). Роль λ в непосредственной близи к уровню отражения играет расстояние до первого нуля функции Эйри (5.2.32). Поэтому первое из условий применимости

приближения геометрической оптики имеет вид [7]

$$(\lambda z_1/l^2)^{1/2}(\lambda/z_1)^{1/6}(2\pi)^{-2/3} \ll 1. \tag{11.1.5}$$

Это условие обычно применимо для неоднородностей с масштабами в несколько километров. В этом случае, с учетом двойного прохождения волны через слой,

$$s = k_0 \int_0^{z_1} \frac{\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}_\perp, z')\, dz'}{\sqrt{\langle\varepsilon\rangle}}, \tag{11.1.6}$$

где $z' = 0$ — уровень отражения волны. Заметим, что в данном случае важно условие применимости геометрической оптики в самом слое, так как в этом случае отражающий слой может быть представлен в виде хаотического фазового экрана, на который падает сферическая волна с $z_1 = z_2$ (z_1 и z_2 — расстояния от передатчика и приемника волн, п. 8.1). Корреляционная функция флуктуаций фазы находится с помощью (6)

$$\Gamma_s(z_1, \rho_\perp) = 2k_0^2 \int_0^{z_1} d\zeta \int_{\zeta/2}^{z_1-\zeta/2} \frac{d\bar{z}\, \Gamma_\varepsilon(\rho_\perp, \zeta, \bar{z})}{\sqrt{\langle\varepsilon(\bar{z}+\zeta/2)\rangle\langle\varepsilon(\bar{z}-\zeta/2)\rangle}}. \tag{11.1.7}$$

При получении (7) мы перешли к координатам $\bar{z} = (z' + z'')/2$ и $\zeta = z'' - z'$ [7, 8]. Рассмотрим случай линейного слоя. Тогда выражение в знаменателе (7) будет равно $\bar{z}^2 - \zeta^2/4$. Пусть $\Gamma_\varepsilon(\rho_\perp, \zeta, \bar{z}) = \langle\tilde{\varepsilon}^2\rangle\gamma_\varepsilon(\rho_\perp, \zeta)$ и $\langle\tilde{\varepsilon}^2\rangle$ не зависит от $\bar{z}$. После интегрирования по $\bar{z}$ имеем

$$\Gamma_s(z_1, \rho_\perp) = 2\langle\tilde{\varepsilon}^2\rangle z_1 k_0^2 \int_0^{z_1} \gamma_\varepsilon(\rho_\perp, \zeta) \left\{\ln\left(z_1 - \frac{\zeta}{2} + \left(z_1^2 - z_1\zeta\right)^{1/2}\right) - \ln\frac{\zeta}{2}\right\} d\zeta. \tag{11.1.8}$$

Если характерный масштаб изменения $\gamma_\varepsilon(\zeta)$ равен l, то при $l \ll z_1$ член в фигурных скобках (8) можно приравнять $\ln(4z_1/\zeta)$, а верхний предел интегрирования по ζ заменить на ∞, т. е.

$$\Gamma_s(z_1, \rho_\perp) \approx 2\langle\tilde{\varepsilon}^2\rangle z_1 k_0^2 \int_0^{\infty} \gamma_\varepsilon(\rho_\perp, \zeta) \ln(4z_1/\zeta)\, d\zeta. \tag{11.1.9}$$

Для гауссова вида $\gamma_\varepsilon(\rho, \zeta) = \exp\left[-\left(\rho_\perp^2 + \zeta^2\right)/l^2\right]$ интеграл (9) является табличным [9] и

$$\Gamma_s(z_1, \rho_\perp) \approx \langle\tilde{\varepsilon}^2\rangle k_0^2 \sqrt{\pi}\, l z_1 [\ln(8z_1/l) + c/2]\, \gamma_\varepsilon(\rho_\perp) \tag{11.1.10}$$

($c = 0{,}55$ — постоянная Эйлера) *). Аналогичным образом берется интеграл и при $\tilde{\varepsilon}^2$, который определяется (11). В этом случае [7]

$$\Gamma_s(z_1, \rho_\perp) \approx k_0^2 \sqrt{\pi}\, z_1 l \delta N^2 [\ln(8z_1/l) + c/2 - 1{,}5]\, \gamma_\varepsilon(\rho_\perp). \tag{1.1.10а}$$

---

*) Так как $\langle\tilde{\varepsilon}^2\rangle = (1 - \langle\varepsilon\rangle)^2\delta N^2 \sim \langle\tilde{N}^2\rangle$ ($\delta N^2 = \langle\tilde{N}^2\rangle/\langle N\rangle^2$), то отсутствие зависимости $\langle\tilde{\varepsilon}^2\rangle$ от $\bar{z}$ означает, что не зависят от $\bar{z}$ абсолютные флуктуации концентрации $\langle\tilde{N}^2\rangle$. Если $\delta N^2(z) = \mathrm{const}$, то в случае линейного слоя

$$\langle\tilde{\varepsilon}^2\rangle = (1 - z'/z_1)\delta N^2. \tag{11.1.11}$$

Это выражение отличается от $\Gamma_s(z_1, \rho_\perp)$ при $\langle\varepsilon\rangle = 1$ (п. 8.1) множителем $4\ln(8z_1/l)$. При $z_1 \sim 10^2$ км и $l \sim 1$ км $\ln(8z_1/l) \approx 7$, т. е. уровень отражения вносит во флуктуации фазы волны основной вклад. По определению $z_1 = = (\partial\varepsilon/\partial z)^{-1}_{z=z_{\text{и}}}$ ($z_{\text{и}}$ — уровень отражения волны, а $\varepsilon = 1 - \omega^2_{e0}/\omega^2$). Для параболического профиля слоя (2)

$$z_1 \simeq z_m\omega^2/2\omega_{\text{к}}^2\left(1 - \omega^2/\omega_{\text{к}}^2\right)^{1/2} \tag{11.1.12}$$

и при $\omega < \omega_{\text{к}}$ $z \infty \omega^2$. Сравнивая (10) и (10а) и учитывая (12), мы видим, что средний квадрат флуктуаций геометрооптической фазы $s_0^2 = \Gamma_s(\rho_\perp = 0)$ в случае отражения волны от линейного слоя имеет существенно различную зависимость от частоты для разных высотных профилей флуктуаций концентрации: при $\delta N^2(z) = \text{const}$ $s_0^2 \infty \omega^4\left(1 - \omega^2/\omega_{\text{к}}^2\right)^{-1/2}$ в то время, как при $\langle\widetilde{N}^2\rangle(z) = \text{const}$ $s_0^2 \infty \left(1 - \omega^2/\omega_{\text{к}}^2\right)^{-1/2}$. Это позволяет оценивать высотную зависимость $\delta N^2(z)$.

Вычислим частотную корреляцию флуктуаций фазы. Учтем, что если для частоты ω_1 $\varepsilon(\omega_1) = -z/z_1(\omega_1)$, то для частоты $\omega_2 = \omega_1 + \Omega$

$$\varepsilon(\omega_2) = 4\delta - z(1 - 4\delta)/z_1 \approx 4\delta - z/z_1, \qquad \delta = (\omega_2 - \omega_1)/(\omega_1 + \omega_2),$$

т. е. уровень отражения для $\omega = \omega_2$ будет сдвинут относительно такого уровня для $\omega = \omega_1$. Поскольку основной вклад в s вносит уровень отражения, то декорреляция фазы будет прежде всего связана с вкладом неоднородностей на интервале $\Delta z \sim 4z_1\delta$. Если этот интервал будет превышать характерный масштаб неоднородностей l, то фазы волн разной частоты станут некоррелированными. Действительно, выражение для $\Gamma_{s\omega} = \langle s(\omega_1)s(\omega_2)\rangle$ при $\delta \ll 1$ и $l \ll z_1$ можно привести к виду [7]

$$\Gamma_{s\omega} = 2\left(\omega^2 z_1/c^2\right)\left\{\int\limits_0^\infty \Gamma_\varepsilon(\zeta)\ln 4z_1 d\zeta - \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\Gamma(\zeta + 4\delta z_1)\ln|\zeta|\,d\zeta\right\}$$

и при $4\delta z_1/l \ll 1$ для $\Gamma_\varepsilon(\zeta) = \langle\widetilde{\varepsilon}^2\rangle \exp(-\zeta^2/l^2)$

$$\tilde{\Gamma}_{s\omega} = \Gamma_{s\omega} - s_0^2 \simeq \left(4\delta z_1 l^{-1}\right)^2 s_0^2/\ln\left(8z_1 l^{-1}\right), \tag{11.1.13}$$

где s_0^2 определяется (10) и (10а) при $\rho_\perp = 0$. Из (13) следует, что характерный масштаб изменения $\tilde{\Gamma}_{s\omega}$ по частоте есть

$$\Omega \sim l\omega \ln^{1/2}(8z_1 l^{-1})/2z_1 s_0.$$

Такой же по порядку величины характерный масштаб будет иметь и функция частотной корреляции флуктуаций поля (п. 8.4), которая определяет характерную длительность $\tau_{\text{и}}$ импульсного сигнала, расплывающегося из-за влияния неоднородностей. Поэтому $\tau \sim 1/\Omega \infty z_1(\omega)/\omega$ и будет иметь различную частотную зависимость при разном высотном ходе $\delta N^2(z)$. Если явление диффузности на ионограммах рис. 11.1 интерпретировать как статистическое расплывание импульсов из-за рассеяния, то протяженность диффузности по оси z характеризует величину τ и по частотному ходу $\tau(\omega)$ можно судить о высотном распределении неоднородностей [6]. Этот метод изучения неоднородностей, однако, представляется более сложным по сравнению с методом мерцаний (п. 11.5) по ряду причин, главные из которых состоят в трудности получения выражений для произвольного спектра флуктуаций N, в том числе учета влияния эффектов рассеяния на мелких неоднородностях. Вместе с тем можно показать, что в области масштабов, удовлетворяющих условиям геометрической оптики, можно путем измерений временного спектра флуктуаций фазы сделать заключение о форме спектра неоднородностей [10].

Можно оценить и степень выполнимости приближения геометрической оптики в слое при зондировании ионосферы. Выше мы указывали, что s_0^2 при отражении волны в 4 раза больше, чем при просвечивании слоя такой толщины. Это связано с двукратным прохождением (до и после отражения) волн через одни и те же неоднородности, поэтому $s_0^2 = \langle (s_\uparrow + s_\downarrow)^2 \rangle = 4s_0^2$. Предположим, что волна послана на ионосферу не вертикально, а под некоторым малым углом ϑ_0. Тогда отраженная волна «пройдет» не через те неоднородности, через которые «прошла» падающая волна, если $\vartheta_0 z_1 > l$. Вследствие этого $s_0^2 = \langle (s_\uparrow + s_\downarrow)^2 \rangle \approx 2s_0^2$. Очевидно, что тот же эффект должен иметь место, если эффективный угол рассеяния в слое ϑ_s будет таким, что $\vartheta_s z_1 > l$. Но последнее условие есть условие нарушения геометрической оптики. Поэтому, если проводить одновременные измерения эффектов рассеяния при наклонном и вертикальном зондировании ионосферы, причем такой геометрии и на таких частотах, чтобы точки отражения при вертикальном и наклонном зондировании соответствовали друг другу, то по различию эффектов рассеяния можно судить о том, как соотносится величина $\vartheta_s z_1$ с l, т. е. о выполнимости приближения геометрической оптики *).

11.2. Рефракционный метод

В сферически слоистой среде фазовый путь L_Φ радиоволны от источника, находящегося на высоте z_c, до приемника (рис. 11.2), расположенного на поверхности Земли, равен

$$L_{\Phi 1,2} = \int_0^{z_c} \frac{n_{1,2}(z)\,dz}{\cos\vartheta(z)}. \quad (11.2.1)$$

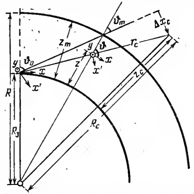

Рис. 11.2. Геометрия к методам исследования ионосферы, изложенным в пп. 11.2—11.4.

Здесь $\vartheta(z)$ — угол между направлением луча и нормалью к слою на высоте z. Пусть $\omega \gg \omega_H$ и $n_{1,2} = \sqrt{1 - \omega_{e0}^2/\omega^2}$. Используя закон Снеллиуса $nR\sin\vartheta = \mathrm{const}$

$$\cos\vartheta(z) = \sqrt{1 - \sin^2\vartheta} = \sqrt{1 - (R/R_3)\sin^2\vartheta_0 - (R/R_3)\omega_{e0}^2/\omega^2}$$

и при условии $\omega_{e0}^2/\omega^2 \ll 1 - (R/R_3)\sin^2\vartheta_0$, в (1) интегрирование по $dl = dz/\cos\vartheta(z)$ можно заменить на интегрирование по прямой, соединяющей передатчик и приемник

$$L_\Phi = \int_0^{z_c} \frac{n(z)\,dz}{\cos\vartheta(z)}. \quad (11.2.2)$$

Очевидно, что это выражение будет справедливо и в случае трехмерно неоднородной ионосферы, когда отклонение n от еди-

*) Эксперименты показывают, что в случае зондирования среднеширотной ионосферы примерно выполняется условие $\vartheta_s z_1 \lesssim l$.

ницы достаточно мало. По определению угол рефракции вдоль направления $\mathbf{r}'$ есть $\theta_{\mathbf{r}'_\perp} = -\partial L_\Phi / \partial \mathbf{r}'_\perp$. Обычно рефракцию подразделяют на вертикальную и горизонтальную (углы рефракции соответственно обозначим $\theta_в$ и $\theta_г$). Под вертикальной понимается рефракция в плоскости падения луча

$$\theta_в = -\partial L_\Phi / \partial x' = -(1/\cos\vartheta_0)\partial L_\Phi / \partial x.$$

Используя (2), имеем [11]

$$\theta_в = -\frac{\partial \widetilde{L}_\Phi}{\partial x} = -\cos^{-1}\vartheta_0 \frac{\partial \widetilde{L}_\Phi}{\partial x_0} =$$

$$= \frac{a_{e0}^2}{2\omega^2 r_c}\left\{R_З R_c \sin\vartheta\cos\vartheta_c \int_{R_З}^{R_c} \frac{N dR}{R^2\cos^3\vartheta} - \int_{R_З}^{R} \frac{\partial N}{\partial x}\frac{r_c - r}{\cos^2\vartheta} dR\right\}, \quad (11.2.3)$$

$$\widetilde{L}_\Phi = L_\Phi - L_\Phi(n=1),$$

где $a_{e0}^2 = 4\pi e^2/m$, а остальные обозначения приведены на рис. 11.2. Угол горизонтальной рефракции

$$\theta_г = -\frac{d\widetilde{L}_\Phi}{dy'} = -\frac{d\widetilde{L}_\Phi}{dy_0} = \frac{a_{e0}^2}{2\omega^2 r_c}\int_{R_З}^{R_c} \frac{\partial N}{\partial y}\frac{r_c - r}{\cos\vartheta} dR. \quad (11.2.4)$$

При $r_c \to \infty$ получаем из (3) и (4) выражения для углов рефракции источника, расположенного на бесконечности. Последнее имеет отношение, например, к наблюдениям углов прихода космических дискретных источников [12]. При достаточно больших углах (малые зенитные углы) в (3), (4) можно пренебречь сферичностью Земли и ионосферы ($R_З \to \infty$).

Способ измерения углов рефракции следует непосредственно из их определения: необходимо измерить разность фаз волн, принятых на разнесенные на расстояния Δx_0 и Δy_0 в пространстве антенны. Напряжение u на выходе квадратичного детектора интерферометра, элементами которого служат эти антенны,

$$u \propto (E_1 + E_2)(E_1^* + E_2^*) = |E_1'|^2 + |E_2'|^2 + (E_1' E_2'^* + E_1'^* E_2')\cos\Delta\varphi$$

(здесь $\Delta\varphi$ — разность фаз между сигналами в антеннах, E_1' и E_2' — комплексные амплитуды поля волны в месте расположения антенн). Если пренебречь влиянием рассеивающих неоднородностей, то можно положить $E_1' = E_1'^* = E_2' = E_2'^*$. В этом случае $u_\sim \propto \cos\Delta\varphi$ и $\partial L_\Phi/\partial x_0 = (\Delta\varphi - \Delta\varphi_0)/k\Delta x_0$, где $\Delta\varphi_0$ — разность фаз в отсутствие рефракции. Отсюда ясно, что для определения рефракции необходимо знать истинное положение источника (разность фаз $\Delta\varphi_0$). Это требование можно, однако, обойти, если измерять рефракцию с помощью одного источника одновременно на двух различных частотах, когда с помощью высокой частоты,

на которой влияние среды мало, возможно определение положения самого источника.

Если на пути распространения волны от источника расположена рассеивающая среда (угол рассеяния $\vartheta_s \ll 1$), то можно измерять среднюю по ансамблю реализаций величину $\langle u \rangle$. Считая без ограничения общности рассмотрения, что $|E_1'|^2 = |E_2'|^2$ и $\langle E_1' E_2'^* \rangle = \langle E_1'^* E_2' \rangle \backsim \Gamma_E(\Delta x_0)$, где $\Gamma_E(\Delta x_0)$ — корреляционная функция комплексно-сопряженных полей (п. 8.1), с помощью (8.1.24) имеем

$$u \backsim 1 + \Gamma_E(\Delta x_0) \cos \Delta\varphi = 1 + \exp[-D_s(\Delta x_0)/2] \cos \Delta\varphi_0.$$

Введя коэффициент модуляции интерференционной картины $M = (u_{\max} - u_{\min})/(u_{\max} + u_{\min})$, получаем, что

$$D_s(\Delta x_0) = -2 \ln M(\Delta x_0).$$

Таким образом, используя интерферометры с разными базами, можно измерять структурную функцию геометрооптической фазы волны, связанную сравнительно простыми соотношениями со спектральной плотностью флуктуаций концентрации $\Phi_N(\varkappa)$. Этим методом в 1965 г. были проведены измерения структурной функции неоднородностей F-слоя полярной ионосферы [13]. Впоследствии он был применен для изучения пространственного спектра флуктуаций плазмы солнечного ветра.

11.3. Методы когерентных частот и группового запаздывания

Пусть бортовой радиопередатчик ИСЗ излучает радиоволны частоты $\omega_1 = m_1\omega_0$ и $\omega_2 = m_2\omega_0$ (ω_0 — частота опорного генератора, m_1 и m_2 — целые числа). Если в приемном устройстве умножить частоту ω_1 на m_2, а ω_2 — на m_1, то на выходе приемника разность фаз сигналов, приведенных к единой частоте $m_1 m_2 \omega_0$, будет равна

$$\Phi = \frac{m_2\omega_1 L_\Phi(\omega_1) - m_1\omega_2 L_\Phi(\omega_2)}{c} = A_m \int\limits_0^{z_c} \frac{N\,dz}{\cos\vartheta} - \Phi_0, \quad (11.3.1)$$

где

$$A_m = a_{e0}^2 (2\omega_0 c)^{-1} (m_2/m_1 - m_1/m_2),$$

а Φ_0 — некоторая начальная разность фаз, которая не может быть учтена в приемной аппаратуре в силу того, что фаза может быть измерена только с точностью до $2\pi m$. Для исключения Φ_0 вместо Φ обычно вычисляют $\dot{\Phi} = d\Phi/dt$. Тогда с помощью (2.1)—

(2.4) имеем

$$\frac{\dot{\Phi}}{A_m} = \dot{z}_c N_c \cos^{-1}\vartheta_c + R_3^2 \sin\vartheta_0 \cos\vartheta_0\, \dot{\vartheta}_0 \int\limits_{R_3}^{R_c} \frac{N dR}{R^2 \cos^3\vartheta} +$$

$$+ \dot{\vartheta}_0 \int\limits_{R_3}^{R_c} \frac{dN}{dx'} \frac{r}{\cos^2\vartheta}\, dR + \dot{\psi}_0 \sin\vartheta_0 \int\limits_{R_3}^{R_c} \frac{dN}{dy'} \frac{r\, dR}{\cos\vartheta}. \quad (11.3.2)$$

Здесь $\dot{z}_c$ — вертикальная составляющая скорости спутника, $\dot{\vartheta}_0$ и $\dot{\psi}_0$ — скорости изменения его зенитного угла, $R_c = R_3 + z_c$, N_c — значение электронной концентрации на высоте z_c, $r = R\cos\vartheta - R_3\cos\vartheta_0$ — расстояние от наблюдателя до элемента dR по лучу зрения. При получении (3) мы пренебрегли нестационарностью ионосферы, положив равным нулю dN/dt. Этого нельзя делать в случае геостационарного спутника Земли, когда

$$\frac{\dot{\Phi}}{A_m} = \int\limits_0^{z_c} \frac{\partial N}{\partial t} \frac{dz}{\cos\vartheta}.$$

Учтем, что $N(R)$ в (2) отлична от нуля лишь в небольших пределах изменения ΔR, определяемых толщиной ионосферного слоя, а множитель $\cos^{-1}\vartheta$ мало изменяется на ΔR. Поэтому вынесем $\cos^{-1}\vartheta$ за знак интеграла, заменив его некоторым средним значением $\cos\vartheta_м \approx \left[1 - \left(R_3^2/R_м^2\right)\sin^2\vartheta_0\right]^{1/2}$. Введем также интегральную концентрацию электронов от точки наблюдения до источника $N_п = \int\limits_{R_3}^{R_c} N\, dz$. Тогда (1) и (2) можно представить в виде

$$\frac{\Phi + \Phi_0}{A_m} = \frac{N_п}{\cos\vartheta_м}, \quad \frac{\dot{\Phi}}{A_m} = N_п \frac{d}{dt}\cos^{-1}\vartheta_m + \frac{dN_п}{dt}\cos^{-1}\vartheta_м, \quad (11.3.3)$$

где $dN_п/dt$ выражается через градиенты интегральной концентрации в направлениях, ортогональных лучу зрения на источник. Перейдем от координат x', y' к координатам x, y, параллельным поверхности Земли. При этом ось x расположим в плоскости орбиты ИСЗ. Тогда

$$\dot{\vartheta}_0 \cos^{-1}\vartheta_m \sin\psi + \dot{\psi}\sin\vartheta_0\cos\psi = \dot{x}_м/r_м,$$

$$\dot{\vartheta}_0 \cos^{-1}\vartheta_m \cos\psi - \dot{\psi}\sin\vartheta_0 \sin\psi = 0,$$

где $\dot{x}_м$ — горизонтальная составляющая перемещения луча на источник на высоте $z_м$ ($\dot{x}_м = (r_м/r_c)u_{cx}$). В этом случае при условии $\mathrm{tg}^2\vartheta\Delta z_м/R_м \ll 1$ ($\Delta z_м \lessdot z_м$), полагая, что в пределах ионосферного

слоя $z \sim z_м$, имеем

$$\dot{N}_п \simeq \dot{z}_с N_с \cos\vartheta_м \cos^{-1}\vartheta_с + \dot{x}_м \int_0^{z_с} \frac{\partial N}{\partial x}\frac{z}{z_м}\,dz \approx a_{z_с} N_с + \dot{x}_м \frac{\partial N_п}{\partial x}. \quad (11.3.4)$$

В общем случае скорость изменения фазы зависит от трех параметров: $N_п$, $\partial N_п/\partial x$ и $N_с$. При этом величины $\partial N_п/\partial x$ особенно велики в моменты восхода и захода Солнца, когда $\partial N_п/\partial x$ достигает 10^5 см$^{-3}$. Если орбита спутника имеет значительный эксцентриситет, т. е. член, содержащий $\dot{z}_с$, может стать превалирующим, то данный метод, в принципе, позволяет определять локальную концентрацию электронов на высоте расположения ИСЗ. Для ИСЗ, имеющих орбиты, близкие к круговой, $\dot{\Phi}$ является функцией $N_п$ и $\partial N_п/\partial x$. Вместе с тем из (3) следует, что в момент времени $t = t_м$, когда $(d/dt)\cos^{-1}\vartheta_м$ достаточно велико, $\dot{\Phi} \propto N_п$. Такой подход часто используется для определения $N_п$. При этом для более корректного исключения горизонтальных градиентов составляется система («цепочка») уравнений для Φ, $\dot{\Phi}$, $\ddot{\Phi}$ и т. д. в окрестности $t = t_м$. Обсуждение методики определения $N_п$ и $\partial N_п/\partial x$ и получаемых при этом погрешностей можно найти в [14]. Заметим, что одновременное использование рефракционного метода и метода когерентных частот также позволяет разделить величины $N_п$ и $\partial N_п/\partial x$. Данный метод может быть использован и для определения неоднородностей $N_п$ [14]. В случае геостационарного спутника в (3), (4) нужно положить $\dot{z}_с = 0$, а $\dot{x}_м$ равной горизонтальной проекции скорости перемещения плазмы в направлении, ортогональном лучу зрения на спутнике.

В последние годы излучение когерентных частот с геостационарного ИСЗ часто используется для определения $N_п$ и неоднородностей $N_п$ в ионосфере.

Близким к методу когерентных частот является метод группового запаздывания, в котором измеряется не разность фазовых путей на двух частотах, а разность групповых путей [15]

$$L_{гр} = \frac{a_{e0}^2\left(\omega_2^2 - \omega_1^2\right)}{2\omega_1^2\omega_2^2}\int_0^{R_с} N\,dz, \qquad \omega_{e0} \ll \omega. \qquad (11.3.5)$$

Наибольшее распространение этот метод получил при изучении космического пространства. После открытия импульсного радиоизлучения пульсаров он стал широко использоваться для определения интегральной и средней по лучу зрения на источник концентрации электронов $\overline{N}$ в межзвездной среде (п. 8.4). В этом случае принимается радиоизлучение пульсаров на двух разнесенных частотах и определяется относительное запаздывание импульса излучения на более низкой частоте. Из (5) видно, что $L_{гр}$ зависит от двух параметров: концентрации электронов и расстояния до источника излучения. Поэтому для перехода от $N_п$ к $\overline{N}$

необходимо знать величину R_c. Для некоторых пульсаров эта величина может быть определена из независимых соображений, например, если установлено, что данный пульсар находится в оболочке сверхновой, расстояние до которой известно (примером может служить пульсар в Крабовидной туманности). Для ряда пульсаров это расстояние оценивается из наблюдений поглощения излучения от этих источников в линии межзвездного нейтрального водорода на частоте $f_в = 1420$ МГц. Поскольку оптическая толщина межзвездной среды в этой линии пропорциональна N_H/T_s (N_H — плотность атомов водорода, T_s — температура возбуждения для переходов между уровнями сверхтонкой структуры атомов водорода, соответствующими частоте 1420 МГц [16]), большая часть поглощения происходит в холодных плотных облаках. Поэтому и указанная линия поглощения наблюдается только для тех пульсаров, излучение которых на пути к Земле пересекает такие облака. Положение линии поглощения на оси частот зависит от скорости перемещения среды, так как частота поглощения сдвинута из-за эффекта Доплера. Основываясь на модели дифференциального вращения Галактики, по величине доплеровского смещения частоты $f - f_в$ можно определить расстояние до поглощающего облака и, следовательно, определить нижний предел расстояния до пульсара, тем самым оценив и $\overline{N}$. Установив таким образом грубую зависимость $\overline{N}$ от галактических широты и долготы, можно, воспользовавшись сведениями о $\overline{N}$, оценивать с помощью (5) расстояние до пульсаров, в излучении которых не обнаруживается линии поглощения на $f = f_в$. Вместе с тем необходимо помнить, что метод позволяет определить непосредственно только величину $N_п$, получаемые с его помощью величины $\overline{N}$ и R_c носят лишь ориентировочный характер в силу возможной неоднородности межзвездной среды.

11.4. Метод, основанный на эффекте Фарадея

Если излучение, имеющее линейную поляризацию, принимать на антенну линейной поляризации (диполь), то напряжение на выходе приемного устройства будет, очевидно, пропорционально $\cos\chi_A$, где χ_A — угол между вектором $\mathbf{E}$ принимаемой волны и направлением $\mathbf{e}_A$, соответствующим максимальному приему (ось диполя). При распространении в магнитоактивной плазме в силу различия фазовых путей для нормальных волн вектор $\mathbf{E}$ будет повернут относительно его направления вблизи источника на угол $\psi_ф$. В приближении квазипродольного распространения (п. 3.3) при $\omega_{e0} \ll \omega$ и $\omega_H \ll \omega$

$$\psi_Ф = \frac{a_{e0}^2}{2\omega^2 c} \int_0^{z_c} \omega_H N \frac{\cos\alpha}{\cos\vartheta}\, dR \qquad (11.4.1)$$

(α — угол между векторами $\mathbf{k}$ и $\mathbf{h}$). Осуществляя преобразования, аналогичные проведенным в п. 11.3, и считая магнитное поле не

завнсящим от R, получаем

$$\psi_\Phi = \frac{a_{e0}^2 \omega_H}{2\omega^2 c} \frac{\cos \alpha_м}{\cos \vartheta_м} N_п,$$

где $\alpha_м$ — некоторое среднее значение угла α. При движении источника излучения изменяются величины $\alpha_м$, $\vartheta_м$ и $N_п$, поэтому ψ_Φ изменяется со временем и уровень принимаемого сигнала испытывает синусоидальные вариации — фарадеевские федннги. Число θ таких фарадеевских федингов, отсчитанное от заданного момента времени $t = t_0$,

$$\theta = \frac{a_{e0}^2 \omega_H \cos \alpha_м}{2\pi \cos \vartheta_м \omega^2 c} \int_0^{z_c} N\, dz - \theta_{\Phi_0} \qquad (11.4.2)$$

$\left(\theta_{\Phi_0} = \theta_\Phi (t = t_0) \propto \cos \alpha_{м_0} / \cos \vartheta_{м_0}\right)$. Для определенной геометрии эксперимента, когда существует такой момент времени, для которого $\cos \alpha_{м_0}$ близко к нулю, θ характеризует интегральную концентрацию электронов $N_п$. В более общем случае определение $N_п$ и $\partial N_п/\partial x$ проводится по схеме, используемой при определении этих величин методом когерентных частот [14, 17]. При этом дополнительные возможности появляются при использовании измерений разности углов поворота плоскости поляризации $\Delta\psi_\Phi$ в пространственно-разнесенных точках, когда сравниваются величины $\Delta\psi_\Phi(\zeta)/D_\zeta$ и $\Delta\psi_\Phi(\eta)/D_\eta$ (ζ и η — расстояния между приемными пунктами в плоскости магнитного меридиана и в ортогональном направлении) [11].

При исследовании ионосферы методом Фарадея в качестве источника излучения может быть выбран не только орбитальный ИСЗ, но и геостационарный спутник Земли или космическое излучение (излучение дискретных источников или частично поляризованное распределенное излучение Галактики) [18—20].

С помощью космических источников, особенно пульсаров, радиоизлучение которых обладает высокой степенью линейной поляризации, методом Фарадея оценивается распределение магнитного поля в Галактике. В слабых магнитных полях межзвездного пространства распространение радиоволн (принимаемых на поверхности Земли) почти для любых углов α является квазипродольным, поэтому величина ψ_Φ описывается (1) с достаточно высокой точностью. Проводя наряду с измерением ψ_Φ измерения группового запаздывания (п. 11.3), можно оценить среднее по лучу зрения значение $\overline{H}$ в межзвездной среде. По измерениям, проведенным с помощью излучения пульсаров, напряженность $\overline{H}$ примерно составляет 1—2 мкГс. Необходимо помнить, однако, что методом Фарадея определяется величина $\int NH\, dz$, а методом группового запаздывания — $N_п = \int N\, dz$. Поэтому с помощью указанных измерений находится только величина

$$\overline{H} = \int NH\, dz \Big/ \int N\, dz,$$

которая, вообще говоря, может отличаться от средней напряженности магнитного поля на луче зрения, если значения N и H не являются независимыми. Данные, полученные с помощью пульсаров, внегалактических источников и по эффекту деполяризации распределенного космического излучения, свидетельствуют о нерегулярном распределении H по величине и направлению в Галактике (подробнее см. [16, 18, 19]).

Наличие неоднородностей плазмы или магнитного поля приводит к хаотическому вращению вектора поляризации излучения, т. е. к деполяризации ее линейной компоненты. Как указывалось в п. 8.3, степень линейной поляризации, усредненная по набору независимых реализаций,

$$\rho_{л} = \rho_{л}(z = 0) \exp\left(-2u \cos^2 \alpha s_0^2\right) \exp\left(-D_s(\Delta r_{\perp н})\right), \quad (11.4.3)$$

где $\Delta r_{\perp н}$ — расхождение лучей обыкновенной и необыкновенной волн, которое обусловлено как наличием градиентов ионизации, так и «непродольным» характером распространения волны относительно $\mathbf{h}$. В последнем случае

$$\Delta r_{\perp н}(z) \simeq \frac{a_{e0}^2 \sqrt{u} \cos \alpha \sin \alpha}{\omega^2 \cos \vartheta} \int\limits_0^z N\, dz \qquad (11.4.4)$$

($z_c \gg z_н$, $z_н$ — высота слоя с неоднородностями). В случае просвечивания ионосферы сигналами бортовых передатчиков ИСЗ по эффекту деполяризации и с помощью (3), (4) можно оценивать появление в ионосфере интенсивных неоднородностей [21].

11.5. Метод радиомерцаний

Метод основан на изучении статистических характеристик амплитуды радиосигналов от точечных источников радиоизлучения, прошедших через среду с хаотическими неоднородностями (см. п. 8.1). При изучении ионосферы такими источниками служат бортовые радиопередатчики орбитальных и геостационарных ИСЗ и космические дискретные источники. В последнем случае источник излучения можно считать расположенным достаточно далеко от ионосферного слоя с неоднородностями, т. е. падающую на ионосферный слой волну можно считать плоской. Временные флуктуации сигнала в точке приема, которые возникают из-за рассеяния радиоволн в ионосфере, могут быть обусловлены как движением неоднородностей, так и перемещением луча зрения на источник либо из-за движения самого источника (случай орбитального ИСЗ), либо вследствие вращения Земли. При этом, очевидно, важна горизонтальная скорость перемещения луча зрения на источник на высоте расположения рассеивающих неоднородностей (рис. 11.2). Например, скорость горизонтального перемещения луча зрения на космический источник, вызванная вращением Земли, на высоте $z \simeq 300$ км от поверхности Земли

примерно составляет 10—15 м/с. Горизонтальная скорость перемещения неоднородностей порядка и больше 50—100 м/с. Поэтому временные флуктуации (ионосферного происхождения) радиоволн от космических источников и тем более геостационарных ИСЗ вызваны перемещением самих неоднородностей. Для орбитальных ИСЗ, движущихся на высотах около 10^3 км, горизонтальная скорость перемещения луча зрения на спутник из точки наблюдения составляет на высоте 300 км примерно 1,5 км/с. Это означает, что временные флуктуации амплитуды сигналов орбитальных ИСЗ, за исключением особых случаев возмущений преимущественно в высоких широтах, когда скорости неоднородностей могут превышать 1—2 км/с (п. 2.1), вызваны движением ИСЗ.

Измерение спектра ионосферной турбулентности с помощью ИСЗ. Предположим, что частота излучаемых источником радиоволн достаточно высока, так что средний квадрат флуктуаций фазы волны s_0^2 на выходе ионосферного слоя (8.1.30) много меньше единицы. Тогда величина флуктуаций интенсивности F_I волны описывается выражением (8.1.48), а ее одномерный спектр (8.1.49). Пусть горизонтальная скорость u_c ИСЗ направлена вдоль оси x. Если скорость луча на ИСЗ на высоте рассеивающего слоя много больше скорости перемещения неоднородностей, то частота временных флуктуаций сигнала

$$F(\Omega) \propto \int_0^{z_c} dz \int_{-\infty}^{\infty} d\varkappa_y \left\{1 - \cos\frac{\varkappa_\perp^2 (z_c - z)\, z}{z_c k_0}\right\} \Phi_N\left(\varkappa_x = \frac{z_c \Omega}{z u_c}, \varkappa_y, 0\right) \tag{11.5.1}$$

$\left(\varkappa_\perp^2 = \varkappa_x^2 + \varkappa_y^2\right)$. Концентрация электронов в ионосфере убывает на высотах, больших высоты z_0 максимума F-слоя, а также на высотах $z < z_0$. Следовательно, $\Phi_N(z)$ имеет существенное значение лишь в некотором интервале высот $z_1 - z_2$, интегрирование по z в (1) можно ограничить этими пределами. Заменяя для простоты рассеивающий слой фазовым экраном с $z = z_н$, имеем в (1) (z отсчитывается от поверхности Земли)

$$F(\Omega) \propto \int_{-\infty}^{\infty} \left\{1 - \cos\frac{\varkappa_\perp^2 (z_c - z_н)\, z_н}{z_c k_0}\right\} \Phi_N\left(\varkappa_x = \frac{z_c \Omega}{z_н u_c}, \varkappa_y, 0\right) d\varkappa_y. \tag{11.5.2}$$

Соотношение (2) часто используется для определения $\Phi_N(\varkappa_x)$. Видно, что в области $\varkappa_x^2 \leqslant \varkappa_ф^2 = z_c k_0/(z_c - z_н)\, z_н$ спектр $F(\Omega)$ в значительной мере определяется френелевским множителем $\cos a^2 \varkappa_\perp^2$. Однако в области высоких частот Ω, для которых $\varkappa_x \gg \varkappa_ф$,

$$F(\Omega) \propto \int \Phi_N(\varkappa_x, \varkappa_y)\, d\varkappa_y. \tag{11.5.2a}$$

Отсюда видно, что для

$$\Phi_N(\varkappa_x, \varkappa_y) \infty (\alpha\varkappa_x^2 + \beta\varkappa_y^2)^{-p/2}, \tag{11.5.3}$$

$$F \infty \varkappa_x^{-p_1}, \quad p_1 = p - 1. \tag{11.5.4}$$

При этом показатель p_1 не зависит от α и β, поскольку при их любых значениях интегрируется степенная функция. Предположим теперь, что спектр отличен от (3). В ионосферной плазме это может быть связано с различием переноса плазмы вдоль силовых линий геомагнитного поля $\mathbf{h}$ и в ортогональной h плоскости. Тогда $\Phi_N(\varkappa_h, \varkappa_{\perp h})$ в инерционном интервале по $\varkappa_\perp$ можно представить в виде (п. 1.1)

$$\Phi_N(\varkappa_h \varkappa_{\perp h}) = \varkappa_{\perp h}^{-p} \exp(-\varkappa_h^2 l_{mh}^2/4). \tag{11.5.5}$$

Очевидно, что спектр (5) приведет к разным зависимостям F от $\varkappa_x$ при различной ориентации луча зрения на ИСЗ относительно вектора $\mathbf{h}$. Например, если ИСЗ движется вдоль $\mathbf{h}$ (ось x параллельна $\mathbf{h}$), а направление на спутник (ось z) ортогонально $\mathbf{h}$, то

$$F \infty \exp(-\varkappa_h^2 l_{mh}^2/4).$$

Если же ось z близка по направлению к $\mathbf{h}$, то, как нетрудно убедиться путем подстановки (5) в (2) и интегрирования по $d\varkappa_y$,

$$F \infty \begin{cases} \varkappa_x^{-p+1}, & \varkappa_x < \varkappa_x^* \\ \varkappa_x^{-p}, & \varkappa_x > \varkappa_x^*, \end{cases} \tag{11.5.6}$$

где $\varkappa_x^* = 2/l_{mh}\alpha$, а α — угол между $\mathbf{h}$ и направлением на ИСЗ. Таким образом, измеряя $F(\Omega)$ при различных ориентациях ИСЗ относительно $\mathbf{h}$, можно сделать заключения о трехмерной форме спектра турбулентности ионосферной плазмы и в случае соответствия экспериментальных спектров спектру (5) определить характерный масштаб l_{mh}. Впервые такой эксперимент был выполнен в [22]. На рис. 11.3 приведены спектры $F(\Omega)$ для трех последовательных моментов времени. Для двух верхних спектров $\alpha \lesssim 3-4°$, и в этом случае $F(\Omega) \infty \Omega^{-p_1}$, $p_1 \approx 1{,}4-1{,}5$. Для третьего спектра ($\alpha > 4°$) показатель степени $p_1 \simeq 2{,}5$. Таким образом, мы видим, что при переходе α через значение $\alpha^* \sim \sim 3-4°$ показатель частотного спектра F изменяется на единицу, как это должно быть при $\Phi(\varkappa_h, \varkappa_{\perp h})$, определяемом (5). При этом характерный масштаб l_{mh}, который можно оценить из значений α^*, оказывается примерно равным 5—15 км. Приведенные экспериментальные данные показывают, что спектр мелкомасштабной ($l_{\perp h} < 1$ км) ионосферной турбулентности является двумерным с показателем спектра $p = p_1(\alpha > \alpha^*) \simeq 2{,}5$.

Определение высотного распределения ионосферных неоднородностей. Как было показано в п. 8.1, для сферической волны разностная координата $\boldsymbol{\rho}_{\perp 1}$ на высоте рассеивающего слоя связана с аналогичными координатами $\boldsymbol{\rho}_{\perp 0}$ (на высоте расположе-

ния источника) и $\rho_\perp$ (в плоскости приема радиоволн) соотношением

$$\rho_{\perp 1} = \rho_{\perp 0} z_н / z_с + \rho_\perp (z_с - z_н)/z_с. \qquad (11.5.7)$$

Пусть $\rho_{x0} = u_с \tau$, а ρ_x — расстояние между приемными антеннами на поверхности Земли, которые разнесены вдоль направления движения ИСЗ (рис. 11.4). Так как корреляционная функция

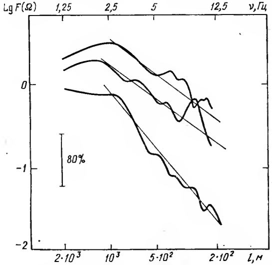

Рис. 11.3. Спектры амплитудных флуктуаций сигналов ИСЗ при различных углах между лучем зрения на спутник и силовыми линиями геомагнитного поля ($\Omega = 2\pi v/l$).

должна быть максимальна при $\rho_{x1} = 0$, из (7) получаем

$$u_с z_н / z_с = -(\rho_x/\tau)(z_с - z_н)/z_с. \qquad (11.5.8)$$

Таким образом, флуктуации, принятые в разнесенных на расстояние ρ_x точках и с временным сдвигом τ, будут иметь максимальное подобие. Измеряя время сдвига τ, можно определить скорость перемещения дифракционной картины $u_{дx} = \rho_x/\tau$, образованной на поверхности Земли при просвечивании слоя с неоднородностями. Поскольку $z_с$ и $u_с$ известны, измерения $u_{дx}$ позволяют определить высоту $z_н$ расположения неоднородностей

$$z_н = z_с |u_{дx}| / (u_с + |u_{дx}|). \qquad (11.5.9)$$

Именно таким методом было исследовано высотное распределение неоднородностей плазмы верхней ионосферы [23]. Степень подобия флуктуаций в разнесенных антеннах определяется толщиной слоя с неоднородностями, так как, очевидно, ρ_1 не может равняться нулю одновременно на разных высотах (рис. 11.4). Нетрудно показать по аналогии с (8.1.41), что на достаточно

большом расстоянии от рассеивающего слоя ($\theta_s z \gg l$) корреляционная функция флуктуаций интенсивности

$$\Gamma_I(\rho_x) = \Gamma_E^2(\rho_x) - \langle E \rangle^4$$

и при $s_0^2 \gg 1$, когда $\langle E \rangle \simeq 0$,

$$\Gamma_I(\rho_x) \simeq \exp\left\{-k_0 \int_{z_1}^{z_2} D_{\varepsilon s}\left(\rho_x \frac{z' - z_н}{z_н}\right) dz'\right\}.$$

Это соотношение позволяет оценить допустимые величины пространственного разноса антенн при определении высотного расположения неоднородностей F-слоя ионосферы. При $\Delta z \sim z_н$ и $s_0^2 \ll 1$ таким методом определяется средняя высота слоя с неоднородностями $\bar{z}_н$. Можно показать, что при $s_0^2 \gg 1$ и $\Delta z \sim z_н$ определяемая высота превышает значение $\bar{z}_н$.

В условиях F-слоя ионосферы неоднородности плазмы с масштабом $l_{\perp h} \leqslant 1$ км довольно часто образуются в ограниченных по высоте ($\Delta z \sim 10$—100 км) участках, поэтому высотное распределение неоднородностей, как правило, получается в результате усреднения многих независимых измерений.

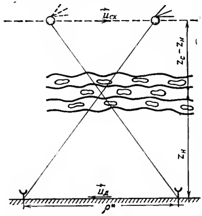

Рис. 11.4. Иллюстрация метода измерения высоты неоднородностей ионосферы с помощью пространственно-разнесенного приема сигналов ИСЗ.

Метод измерения скорости дрейфа неоднородностей. Полагая в (7) $\rho_{\perp 0} = 0$, $\rho_{\perp 1} = u_н\tau$ и $\rho_\perp = \mathbf{u}_д\tau$, можно видеть, что в случае неподвижного источника с помощью измерений скорости $\mathbf{v}_д$ дифракционной картины на поверхности Земли возможно определение горизонтальной скорости движения неоднородностей $u_н$. При этом для $z_c \to \infty$ $\mathbf{u}_д = \mathbf{u}_н$. В случае зондирования ионосферы с Земли источник и приемник радиоволн расположены на одинаковом расстоянии от рассеивающего слоя, поэтому $z_c = 2z_н$ и $\mathbf{u}_н = \mathbf{u}_д/2$. Если при просвечивании ионосферы радиоволнами такой метод позволяет определить только среднюю по высоте скорость $u_н$ (точнее, скорость неоднородностей, вносящих максимальный вклад во флуктуации сигнала), то зондирование ионосферы на разных частотах позволяет изучить высотное распределение $u_н$ на высотах, меньших высоты максимума F_2-слоя. Последнее связано с наибольшим вкладом уровня отражения радиоволны во флуктуации сигнала (п. 11.1). Для измерения $u_д$ используются разнесенные антенны. Как правило, измерения

проводятся с помощью трех антенн, которые располагают в вершинах прямоугольного треугольника. Однако при этом возникают трудности в определении направления $u_н$, так как ввиду анизотропии дифракционной картины на поверхности Земли «кажущаяся» скорость $u'_д$ отличается от истинной. Методические вопросы измерений $u_н$ изложены в [24], результаты многолетних измерений перемещения неоднородностей ионосферной плазмы суммированы в [25]. Заметим, что примерно такие же методы используются и для изучения квазипериодических возмущений ионосферной плазмы, вызванных внутренними гравитационными волнами [26, 27].

Методы, основанные на измерении частотной корреляции радиоволн. В п. 11.1 отмечалось, что измерения средней формы импульсного сигнала, отраженного от ионосферы, содержат информацию о параметрах неоднородностей ионосферы. В данном разделе было показано, однако, что существует множество других более прямых методов изучения ионосферных неоднородностей. Вместе с тем при изучении неоднородностей межзвездной среды измерения функции частотной корреляции Γ_ω и среднестатистической формы импульсного излучения пульсаров (п. 8.1 и 8.4) являются одними из основных. Это обусловлено, например, трудностью измерений пространственной функции корреляции $\Gamma_I(\rho)$ флуктуаций, вызванных межзвездной средой, так как характерный радиус пространственной корреляции $\rho_к$ в этом случае существенно превышает радиус Земли. С другой стороны, радиус частотной корреляции (п. 8.4)

$$\Delta f \sim \pi l_E^2 f^2/zc, \qquad l_E \sim l/s_0$$

при $l_E \sim l \sim 10^{10}$ см, $f \sim 10^9$ Гц и $z \geqslant 10^{21}$ см Δf составляет всего 10 МГц. Кроме того, для ряда пульсаров $\Delta f \leqslant 10^2$ Гц и характерная ширина импульсного сигнала, расплывшегося из-за рассеяния, существенно превышает длительность исходного сигнала. Функция Γ_ω содержит информацию о крупных неоднородностях среды, вызывающих рефракцию волны (п. 8.4). Она может быть средством изучения этих неоднородностей, которые труднообнаружимы другими методами.

Метод измерения угловых размеров источника излучения. Метод основан на эффекте усреднения дифракционной картины, который имеет место в том случае, когда «лучи» от различных частей источника проходят через разные неоднородности. Рассмотрим для простоты хаотический фазовый экран, через который «просвечивается» излучение бесконечно удаленного источника с распределением радиояркости по источнику

$$I_0(\theta) = I_0(0)\exp\left(-\theta^2/\theta_0^2\right), \qquad \theta^2 = \theta_x^2 + \theta_y^2,$$

θ_0 — угловой размер источника. Интенсивность излучения от такого источника в точке приема пропорциональна $\int I_0(\theta)\,d\theta$,

поэтому

$$\langle I^2\rangle = \int \Gamma_I(\rho = z_н(\theta'-\theta''))\, I_0(\theta')\, I_0(\theta'')\, d\theta' d\theta''.$$

Перейдем к переменным $\bar\theta = (\theta' + \theta'')/2$ и $\tilde\theta = \theta' - \theta''$. В этом случае

$$I_0(\theta')\, I_0(\theta'') = \exp\left(-\tilde\theta^2/2\theta_0^2\right)\exp\left(-2\bar\theta^2/\theta_0^2\right).$$

Если $s_0^2 \gg 1$, то согласно (8.1), $\Gamma_I(\rho) \approx \Gamma_E^2(\rho) + 1$ и

$$F_{I\theta} = (\langle I\rangle^2 - \langle I\rangle^2)/\langle I\rangle^2 \simeq \int \Gamma_E^2\left(\rho = \tilde\theta z_н\right)\exp\left(-\tilde\theta^2/2\theta_0^2\right) d\tilde\theta \quad (11.5.10)$$

(Γ_E определяется (8.1.46)). Например, для гауссова вида $\Gamma_\varepsilon(\rho)$ и $s_0^2 \gg 1$ $\Gamma_E(\rho) \approx \exp\left(-\tilde\theta^2/4\theta_H'^2\right)$ и после интегрирования (10) имеем

$$F_I \approx 1/\left(1 + \theta_0^2/\theta_н'^2\right), \quad (11.5.10а)$$

где $\theta_н' = l/2s_0 z_н$. Нетрудно показать также, что при $s_0^2 \ll 1$

$$F_{I\theta}/F_I \approx 1/\left(1 + \theta_0^2/\theta_н^2\right), \quad \theta_н = l/2z_н. \quad (11.5.10б)$$

Таким образом, проводя одновременно измерения F_I для «точечного» источника, можно оценивать значения θ_0 для источников конечных угловых размеров. Для мерцаний, вызванных неоднородностями солнечного ветра, $l \sim 10^2$ км, $z_н \sim 10^8$ км (п. 1.2) и метод позволяет изучать источники с $\theta_0 \sim 10^{-6}$ [28]. Если же мерцания вызваны межзвездной средой, то $l \sim 10^{10}$ см, $z_н \sim \sim 10^{22}$ см и возможно угловое «разрешение» источника θ_0 до 10^{-12} [29]. Для сравнения укажем, что для определения таких величин θ_0 с помощью интерферометра ($\theta_0 \sim \lambda/d$) требуется разнесение приемных антенн на расстояние $d \sim 10^{12}\lambda$, т. е. создание космических интерферометров *). Заметим, что близкие к 10^{-12} величины являются, по-видимому, предельными для источников, расположенных на космологических расстояниях из-за отклонения лучей в хаотических гравитационных полях метагалактического пространства (при определении их координат).

Указанный метод, однако, в случае достаточно протяженной рассеивающей среды не позволяет определять истинные угловые размеры источников, так как часть рассеивающего слоя приводит к увеличению θ_0 за счет рассеяния.

11.6. Использование рассеяния радиоволн для диагностики параметров плазмы

Явление рассеяния радиоволн широко используется не только для изучения неоднородной структуры ионосферной и космической плазмы, но и для изучения ее основных регулярных пара-

*) Если существует независимая оценка линейных размеров источников, то данный метод позволяет оценивать расстояние до них.

метров, таких как температура и концентрация частиц, их частоты соударений. Все эти методы, основанные на рассеянии радиоволн, связаны с измерением статистических характеристик интенсивности сигнала (средние интенсивности рассеяния волн обыкновенной $I_о$ и необыкновенной $I_н$ поляризации, пространственные, временные и частотные корреляционные функции интенсивности, функции взаимной корреляции $\Gamma_{он} = \langle I_о I_н \rangle$ и т. д.). В п. 11.5 были рассмотрены методы изучения неоднородностей среды, основанные на рассеянии радиоволн на крупных ($l \gg \lambda$) неоднородностях. В данном разделе речь пойдет о рассеянии волн на мелкомасштабных структурах, которые ответственны за рассеяние на достаточно большие углы *).

Как правило, рассеяние радиоволн на таких неоднородностях плазмы в условиях ионосферы и ближнего космического пространства является слабым, если частоты радиоволн превышают плазменную частоту ω_{e0}. Поэтому применение метода рассеяния на большие углы, с одной стороны, возможно только на базе радиолокационных установок достаточно большого потенциала, но, с другой стороны, позволяет использовать при анализе результатов измерений приближение однократного рассеяния (п. 8.1).

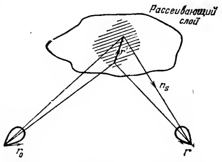

Рис. 11.5. Геометрия рассеяния радиоволн.

Воспользуемся (8.1.15), в котором заменим среднее поле $\langle \mathbf{E} \rangle$ на невозмущенное поле $\mathbf{E}_0$, пренебрегая изменением среднего поля за счет рассеяния. Будем считать, что поле $\mathbf{E}_0$ в точке $\mathbf{r}'$ рассеивающего объема V вызвано источником, расположенным в точке $\mathbf{r}_0$ (рис. 11.5). Тогда

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}') \approx [\mathbf{e}_0 C_\uparrow(\mathbf{r}')/4\pi R_1]\, e^{-ikR_1}, \qquad R_1 = |\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'|$$

и выражение для напряженности поля рассеянного сигнала примет вид

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}) = \int \frac{\tilde{\varepsilon}(\mathbf{r}')\exp\left(-ik_0|\mathbf{r}_0-\mathbf{r}'| + |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|\right)[\mathbf{n}_s[\mathbf{e}\mathbf{n}_s]]\,C_\uparrow C_\downarrow}{4\lambda^2|\mathbf{r}_0-\mathbf{r}'|\,|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dr'. \quad (11.6.1)$$

Функция $C_\uparrow(\mathbf{r}')$ в (1) зависит как от параметров источника излучения, так и от свойств среды. В частности, $C_\uparrow$ должна учитывать возможное поглощение радиоволны на пути ее распространения до рассеивающего объема и изменение ее поляризации при $\langle \varepsilon \rangle$, близком, но не равном единице, так как в экспо-

*) Впервые для изучения ионосферы этот метод был разработан, по-видимому, Букером.

нендиальном множителе (1) мы положили $\langle\varepsilon\rangle = 1$. Она описывает также свойства диаграммы направленности передающего устройства. Функция $C_\downarrow$ описывает эффекты распространения волны, связанные с отличием $\langle\varepsilon\rangle$ от единицы, на пути ее распространения от рассеивающего объема до точки наблюдения. В $C_\downarrow$, как будет видно из дальнейшего, удобно ввести коэффициент направленности приемной антенны. В этом случае $\mathbf{E}_s$ будет характеризовать эффективную напряженность рассеянного поля в точке r. Умножим (1) скалярно на аналогичное выражение для $E_s^*(r)$. Тогда

$$\langle E_s(r) E_s^*(r)\rangle =$$
$$= \iint \frac{\exp(-ik_0(|\mathbf{r}_0-\mathbf{r}'|-|\mathbf{r}_0-\mathbf{r}''|+|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|-|\mathbf{r}-\mathbf{r}''|)}{16\lambda^4|\mathbf{r}_0-\mathbf{r}'||\mathbf{r}_0-\mathbf{r}''||\mathbf{r}-\mathbf{r}'||\mathbf{r}-\mathbf{r}''|}\times$$
$$\times\Gamma_\varepsilon(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')\,[\mathbf{n}_s'[e\mathbf{n}_s']]\,[\mathbf{n}_s''[e\mathbf{n}_s'']]\,M d\mathbf{r}'d\mathbf{r}'', \quad (11.6.2)$$

где $M(\mathbf{r}_0,\mathbf{r},\mathbf{r}',\mathbf{r}'') = C_\uparrow(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}')\,C_\uparrow^*(\mathbf{r}_0,\mathbf{r}'')\,C_\downarrow(\mathbf{r},\mathbf{r}')\,C_\downarrow^*(\mathbf{r},\mathbf{r}'')$, а штрихи у $\mathbf{n}_s'$, $\mathbf{n}_s''$ означают, что эти векторы относятся к точкам $\mathbf{r}'$ и $\mathbf{r}''$ соответственно.

Предположим, что слой рассеивающей радиоволны из точки $\mathbf{r}_0$ в точку $\mathbf{r}$ по каким-либо причинам ограничен. Прежде всего, это может быть связано с зависимостью $\Gamma_\varepsilon(\mathbf{r}',\mathbf{r}'')$ не только от разностной координаты $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}'-\mathbf{r}''$, но и от $\overline{\mathbf{r}} = (\mathbf{r}'+\mathbf{r}'')/2$:

$$\Gamma_\varepsilon(\rho,\overline{\mathbf{r}}) = \langle\widetilde{\varepsilon}^2\rangle(\overline{\mathbf{r}})\gamma(\rho,\overline{\mathbf{r}}).$$

В таком случае ограниченность объема определяется интервалом значений $|\mathbf{r}| \leqslant L_0$, в пределах которого $\langle\widetilde{\varepsilon}^2\rangle$ имеет значимую величину. Ограниченность области, которая рассеивает радиоволны на трассе с заданной геометрией, определяется и характеристиками приемно-передающего устройства. Как видно из рис. 11.5, например, характерные размеры $L_д$ рассеивающего объема могут определяться областью пересечения диаграммы направленности устройств (на рис. 11.5 эта область показана заштрихованным участком). Таким образом, интенсивность принимаемого рассеянного излучения будет определяться неоднородностями, расположенными в объеме размерами $L_s = \min\{L_0, L_д\}$. Перейдем в (2) к переменным $\overline{\mathbf{r}}$ и $\boldsymbol{\rho}$ и учтем, что характерный масштаб l изменения функции $\Gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\rho},\overline{\mathbf{r}})$ по переменной $\boldsymbol{\rho}$ много меньше L_s. Тогда $\rho \ll l \ll L_{\min}$ и содержащиеся под знаком экспоненты члены можно разложить в ряд Тейлора

$$|\mathbf{r}_0-\mathbf{r}'| - |\mathbf{r}_0-\mathbf{r}''| \approx |\mathbf{r}_0-\overline{\mathbf{r}}-\boldsymbol{\rho}/2| - |\mathbf{r}_0-\overline{\mathbf{r}}+\boldsymbol{\rho}/2| \approx -\mathbf{n}_0\boldsymbol{\rho},$$
$$(11.6.3)$$
$$|\mathbf{r}-\mathbf{r}'| - |\mathbf{r}-\mathbf{r}''| \approx \mathbf{n}_s\boldsymbol{\rho}.$$

Очевидно, что члены с ρ^2 и ρ^3 необходимо в (1) учитывать, если дополнительный набег фазы, вызванный этими членами, будет порядка π. Отсюда следует условие их пренебрежением

$$k\rho^2/R_{1,2} \leqslant kl_\varepsilon^2/R_{1,2} \ll \pi, \qquad (11.6.3а)$$

которое эквивалентно условию расположения точек $\mathbf{r}_0$ и $\mathbf{r}$ в зоне Фраунгофера относительно рассеивающего объема. В случае (3а) мы можем также пренебречь различием $\mathbf{n}_s'$ и $\mathbf{n}_s''$ в поляризационном множителе (1) и положить в знаменателе (1) $|\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}'||\mathbf{r}_0' - \mathbf{r}''| \simeq R_1^2$ и $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'||\mathbf{r} - \mathbf{r}''| \approx R_2^2$. В результате

$$\langle I_s(\mathbf{r})\rangle = \langle E_s E_s^*\rangle = \int \frac{d\bar{\mathbf{r}} \cos^2\psi_e M}{16\lambda^4 R_1^2 R_2^2} \int \Gamma_\varepsilon(\boldsymbol{\rho}, \bar{\mathbf{r}})\, e^{-i\mathbf{K}\boldsymbol{\rho}} d\boldsymbol{\rho}, \qquad (11.6.4)$$

где ψ_e — угол между векторами $\mathbf{E}$ и $\mathbf{E}_s$, а

$$\mathbf{K} = k_0(\mathbf{n}_s - \mathbf{n}_0), \quad |\mathbf{K}| = K = 2k_0 \sin\vartheta_s/2. \qquad (11.6.5)$$

Согласно (8.1.5) интеграл по $d\boldsymbol{\rho}$ равен спектральной функции флуктуаций Φ_ε, умноженной на $(2\pi)^3$. Используя это обстоятельство и вынося за знак интеграла по $d\bar{\mathbf{r}}$ $\cos^2\psi_e/R_1^2R_2^2$, что можно сделать при $L_s \ll R_{1,2}$, получаем

$$\langle I_s\rangle = \frac{k_0^4}{32\pi} \frac{\cos^2\psi_e}{R_1^2 R_2^2} \int M(\bar{\mathbf{r}}, \mathbf{r}_0, \mathbf{r})\, \Phi_\varepsilon(\mathbf{K}, \bar{\mathbf{r}})\, d\bar{\mathbf{r}}. \qquad (11.6.6)$$

От выражения (6) можно перейти к известной формуле радиолокации, если ввести радиолокационный поперечник рассеяния σ. Учтем, что интенсивность падающего излучения пропорциональна излучаемой мощности $P_э = P_0 G_0$ (G_0 — коэффициент усиления антенны в направлении на рассеивающий объем), а мощность принимаемого сигнала P_s пропорциональна $\langle I_s\rangle$ и эффективной площади антенны $A_{эф}$. Тогда для P_s получаем следующее выражение:

$$P_s = \frac{P_0 G_0 \sigma A_{эф}}{16\pi^2 R_1^2 R_2^2} e^{-\tau}, \qquad \sigma = \frac{\pi}{2} k_0^4 \cos^2\psi_e \overline{\Phi}_\varepsilon(\mathbf{K}), \qquad (11.6.7)$$

где $\tau = \int \mu\, dz$ — коэффициент поглощения радиоволны на пути распространения (п. 8.3), а $\overline{\Phi}_\varepsilon$ — среднее по объему значение Φ_ε.

Аналогичным образом можно вычислить функцию $\Gamma_{E_s}(\rho) = \langle E_s(\mathbf{r}) E_s^*(\mathbf{r}_1)\rangle$. Оказывается, что при условии (3а) эта функция определяется не масштабом l, а $\lambda/\vartheta_э$, где $\vartheta_э \approx \vartheta_A\vartheta_0/(\vartheta_A + \vartheta_0)$ (ϑ_0 — угловой размер рассеивающей области, а ϑ_A — характерный угловой масштаб диаграммы направленности антенн). Приведенное соотношение легко установить, если учесть, что $\Gamma_{E_s}(\rho)$ связана соотношением (8.1.10) с угловым спектром $I(\vartheta)$ принимаемых волн.

Ракурсное рассеяние радиоволн. Мелкомасштабные неоднородности ионосферы сильно вытянуты вдоль силовых линий геомагнитного поля $\mathbf{H}_0$. Если пренебречь конечной вытянутостью неоднородностей и устремить l_h к бесконечности ($\varkappa_h \to 0$), то из (5) следует, что

$$\mathbf{n}_{sh} = \mathbf{n}_{0h}.$$

Таким образом, в этом случае волновые векторы рассеянных волн сосредоточены на поверхности конуса, содержащего $\mathbf{n}_0$, имеющего вершину в месте расположения рассеивающих неоднородностей и угол раствора α, равный углу между $\mathbf{n}_0$ и $\mathbf{h}$ (рис. 11.6). Распределение интенсивности рассеянных волн по поверхности конуса зависит от характера зависимости Φ_ε от волнового числа неоднородностей в плоскости, ортогональной $\mathbf{h}$ (5), (6). Пересечение ракурсного конуса с поверхностью Земли определяет ракурсный контур, в любой точке которого может быть принят рассеянный сигнал от заданнного источника излучения. В свою очередь, для каждой точки приема существует целая зона возможного размещения излучателей. В результате образуются такие сопряженные системы ракурсных контуров, что радиосигнал, посланный из любой точки контура 1 (рис. 11.6), может быть принят в любой точке сопряженного контура 2. При $\alpha = \pi/2$ ракурсный конус вырождается в диск. В этом случае прием рассеянного сигнала возможен только на ракурсном контуре, на котором расположен и излучатель (самосопряженный контур). Такая ситуация имеет место, например, на геомагнитном экваторе при вертикальном облучении ионосферы высокочастотным радиоизлучением.

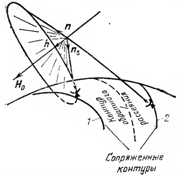

Рис. 11.6. Геометрия ракурсного рассеяния радиоволн.

Если неоднородности достаточно крупные, но имеют конечные размеры вдоль $\mathbf{h}$, то волновые векторы рассеянных волн распределены в некоторой окрестности поверхности ракурсного конуса. В приближении однократного рассеяния радиоволн на флуктуациях плазмы с $\Phi_N(\varkappa_h) \propto \exp\left(-\varkappa_h^2 l_h^2/4\right)$ интенсивность рассеянных волн убывает в $\exp(-1)$ раз при угловом удалении $\mathbf{n}_s$ от поверхности конуса на величину $\vartheta_h \sim \lambda/\pi l_h \sin\alpha$. Протяженность рассеивающего объема (по высоте и вдоль $\mathbf{R}$) приводит к набору сдвинутых и наклоненных друг относительно друга конусов. Вследствие обоих отмеченных эффектов ракурсные контуры имеют конечную ширину $\Delta x \sim R\Delta\vartheta$, $\Delta\vartheta = \max\{\vartheta_h, \vartheta_R\}$, ϑ_R — угловой размер рассеивающей области в плоскости $\mathbf{R}$, $\mathbf{z}$. На сравнительно низких частотах, где существенна рефракция радиоволн, ракурсные конусы искривляются в соответствии с за-

коном Снеллиуса (п. 11.1). Согласно (5) за рассеяние, близкое к обратному, ответственны неоднородности с $\varkappa \approx 2k_0$, т. е. с $l \approx \lambda/2$. Это значит, что обратное рассеяние волн УКВ диапазона ($\lambda < 10$ м) может быть вызвано только неоднородностями с $l < 5$ м. Такие неоднородности наблюдаются в ионосфере вплоть до высот 200—300 км вблизи геомагнитного экватора (ночные часы) и в возмущенные периоды в зоне полярных сияний. На средних широтах в E и F слоях $\Phi_N(\varkappa_\perp)$ в области таких масштабов, как правило, достаточно мала, чтобы вызвать заметное рассеяние УКВ радиоволн. Однако при воздействии мощным радиоизлучением на верхнюю ионосферу в ней развивается мелкомасштабная турбулентность с $l_{h\perp}$ до одного метра (п. 10.3). Метод ракурсного рассеяния является одним из наиболее эффективных методов изучения искусственной ионосферной турбулентности ([30] и п. 10.3). Используя (6), можно показать [30], что для $\vartheta_s \sim \pi$

$$\langle I_s \rangle \infty \begin{cases} \Phi_N(\varkappa_\perp, \varkappa_h), & \vartheta_R \ll \vartheta_h, \\ \int \Phi_N(\varkappa_\perp, \varkappa_h)\, d\varkappa_h, & \vartheta_R \gg \vartheta_h. \end{cases} \tag{11.6.8}$$

Таким образом, при $\vartheta_R \gg \vartheta_h$ интенсивность рассеянного сигнала определяется интегралом от спектральной плотности флуктуаций плазмы по продольным волновым числам $\varkappa_h$.

Изучение нижней ионосферы методом обратного рассеяния (метод частичных отражений). Предположим, что мы излучаем импульсный сигнал длительностью $\Delta t_и$ вертикально вверх, а пункт приема совмещен с пунктом излучения. Стробируя принимаемый сигнал по времени, мы можем отделять сигналы, рассеянные на разных высотных уровнях z_s ионосферы (точность высотного разрешения, очевидно, определяется величиной $\Delta z \simeq c\Delta t_и/2$). Уровень принимаемого сигнала согласно (5)—(7) определяется величиной $\Phi_\varepsilon(2k_0)e^{-\tau}$. Изучая попеременно волны обыкновенной и необыкновенной поляризации и вычисляя отношения уровней рассеянного излучения для этих нормальных волн, получаем, что

$$\eta_{он} = \frac{P_{sо}}{P_{sн}} \simeq \frac{\overline{\Phi}_{\varepsilon о}(2k_о)}{\overline{\Phi}_{\varepsilon н}(2k_н)} \exp\left[-(\tau_о - \tau_н)\right] \simeq \exp(\tau_н - \tau_о)$$

($\omega \gg \omega_H$, индексы о и н относятся к волнам разной поляризации)*). Отсюда с учетом выражений для коэффициентов поглощения получаем, что измерения $\eta_{он}$ позволяют определить интегральную (до высоты рассеивающего объема) величину $N_e\nu_{en}/(\omega^2 + \nu_{en}^2)$. Принимая рассеянные сигналы с разных высот, можно определять локальное значение данной величины,

*) На самом деле выражение для коэффициента поглощения при учете кинетических эффектов (гл. 2) имеет более сложный вид. Однако здесь, при иллюстрации возможностей метода, мы ограничимся простейшим случаем.

точнее, ее усредненное по $\Delta z \simeq c\Delta t_{\text{и}}/2$ значение *). Поскольку высотное распределение частоты соударений электронов ν_{en} в нижней ионосфере известно значительно лучше (п. 2.1), чем распределение концентрации N_e, то метод обычно используется для определения высотного профиля N_e [31].

Существует, однако, возможность непосредственного определения N_e в нижней ионосфере методом обратного рассеяния. Такая возможность связана с применением эффекта Фарадея (п. 11.3), вследствие которого положение вектора поляризации принимаемой линейно поляризованной волны (из-за вращения плоскости поляризации на пути распространения волны) определяется интегральной концентрацией электронов на луче зрения. Аналогично вышерассмотренному случаю таким образом можно получить сведения о N_e, усредненные на $\Delta z \sim c\Delta t_{\text{и}}/2$. В данном способе определения N_e можно измерять не угол фарадеевского вращения ψ_{Φ}, а корреляционную функцию $\langle I_{\text{о}} I_{\text{н}}\rangle \infty \infty |\langle E_{\text{о}} E^*_{\text{н}}\rangle|^2$ (это равенство следует из рассмотрения п. 8.1). Используя (1), (3), можно показать, что в этом случае $C_\uparrow C^*_\uparrow C_\downarrow C^*_\downarrow$ будут пропорциональны экспоненциальному множителю

$$2k_0 \int\limits_0^{z_s} (n_{\text{о}} - n_{\text{н}})\, dz'.$$

Поэтому $\langle E_{\text{о}} E^*_{\text{н}}\rangle_{z_s} - \langle E_{\text{о}} E^*_{\text{н}}\rangle_{z_s} + c\Delta t_{\text{и}}/2$ будет определяться изменением угла ψ_{Φ} в пределах импульсного объема. Таким образом, измерения $\langle I_{\text{о}}\rangle/\langle I_{\text{н}}\rangle$ и $\langle I_{\text{о}} I_{\text{н}}\rangle$ позволяют определять как N_e, так и ν_e [32]. Следует заметить, что спектральные измерения обратно рассеянного сигнала и измерения в пространственно разнесенных точках позволяют изучать движение неоднородностей в ионосфере.

Большие возможности для изучения параметров ионосферы открывает метод обратного рассеяния на искусственных периодических стратификациях плазмы («решетках»), созданных в ионосфере мощными радиоволнами (п. 10.2). Анализ рассеяния такой решеткой можно провести на основе (1), полагая $\tilde{\varepsilon} = \tilde{\varepsilon}_0 \cos(2k_{\text{м}} z + \varphi(z))$, где $k_{\text{м}}$ — волновое число мощной радиоволны, а $\varphi(z)$ — медленно изменяющаяся функция, отражающая изменения показателя преломления и структуру стоячей мощной волны с высотой. Метод изучения ионосферы с помощью решеток основан на изучении характера ее разрушения при включении возмущающего ионосферу радиопередатчика. В верхней ионосфере решетка разрушается за счет процесса разлета ($\lambda < l_{\text{св}}$) и диффузии ($\lambda > l_{\text{св}}$), возбуждая сильно затухающие ионно-звуковые волны, что позволяет определять, подобно тому

*) Обычно в установках для «частичных отражений» используются импульсы длительностью 25—50 мкс. При этом $\Delta z \sim 3$—7 км.

как это делается с помощью искусственной турбулентности [30], коэффициенты диффузии ионосферы, а также (по времени релаксации рассеянных ионным звуком сигнала) отношение T_e/T_i. В нижних слоях ионосферы ($z < 70$ км) этот метод, по-видимому, позволит определять эффективные константы химических реакций, определяющих величину N_e на этих высотах, а также исследовать процессы атмосферной турбулентности, разрушающей плазменную решетку, которая является в этом случае пассивной примесью. Эти вопросы являются сравнительно новыми, поэтому познакомиться с ними в литературе можно только на основе результатов первых исследований [39—41].

Исследование космического пространства методом обратного рассеяния может оказаться весьма перспективным с точки зрения контроля за ионно-звуковой турбулентностью солнечного ветра вблизи орбиты Земли. Так как фазовая скорость ионно-звуковых волн много меньше скорости СВ, то этим методом можно было бы определять (по доплеровскому сдвигу частоты) скорость солнечного ветра. Уже много лет назад были проведены успешные эксперименты по радиолокации ионно-звуковой турбулентности в солнечной короне [31, 32].

Интересные возможности может содержать в себе метод рассеяния волн свистового диапазона в магнитосфере. Анализ рассеяния свистов проводится аналогично рассмотренным в п. 8.1 с учетом конкретного выражения для показателя преломления свистов (гл. 3). Рассеянное поле на больших расстояниях от рассеивающего элемента находится способом, изложенным в п. 8.2. Особенность состоит в том, что энергия рассеянных волн распространяется вдоль направления $\mathbf{v}_{\text{гр}}$, отличного от $\mathbf{n}_s$. Поэтому, например, при ракурсном рассеянии свистов конусу векторов $\mathbf{n}_s$ соответствует в общем случае другая поверхность, на которой распределены мощности рассеянных волн*). Волны свистового диапазона могут быть использованы для изучения магнитосферной мелкомасштабной турбулентности.

11.7. Метод некогерентного рассеяния радиоволн

Отдельный электрон, совершая колебания в поле электромагнитной волны с напряженностью электрического поля E, создает переменный ток и тем самым является источником новых волн. Если в единице объема содержатся N электронов, перемещающихся статистически независимо, то излучение каждого электрона будет происходить на частоте $\omega = \omega_1 + \mathbf{k}_1\mathbf{v}$ (ω_1 и $\mathbf{k}_1$ — частота и волновой вектор первичной волны, $\mathbf{v}$ — скорость электрона), т. е. будет иметь хаотическую фазу. При таком некогерентном характере переизлучения интенсивность рассеянных волн в любой точке $\mathbf{r}$ будет пропорциональна произведению ин-

*) В последнем легко убедиться, используя (3.4.14). Если рассеивающие неоднородности вытянуты вдоль $\mathbf{h}$, то поверхности конуса векторов $\mathbf{v}_{\text{гр}}$ соответствуют поверхности конуса векторов $\mathbf{k}_s$.

тенсивности волн, рассеянных каждым электроном, на число электронов, содержащихся в рассеивающем объеме. Ввиду того, что напряженность поля волны, рассеянной отдельным электроном,

$$\mathbf{E}_s \infty c^{-2}\partial \mathbf{j}/\partial t \approx \mathbf{E}_0(e^2/mc^2),$$

интенсивность рассеянных единицей объема волн $I_s \infty \sigma_т I_0$, где $\sigma_т$ — томпсоновское сечение рассеяния электроном ($\sigma_т = (8\pi/3) \times \times (e^2/mc^2)^2$). Отсюда ясно, что измерения интенсивности радиоволн, рассеянных электронами, позволяют определять их концентрацию. Кроме того, из частотного спектра таких волн возможно определение хаотической скорости температур электронов. Именно из этих соображений исходил Гордон [33], впервые предложивший новый эффективный метод изучения ионосферы, который он из-за некогерентного характера рассеяния радиоволн свободными электронами назвал методом некогерентного рассеяния радиоволн. Это название сохранилось по настоящее время, хотя сам метод с тех пор претерпел существенные изменения.

Дело в том, что заряженные частицы плазмы, в том числе электроны, далеко не всегда можно считать независимыми. Появление в единице объема «лишнего» электрона или иона приводит к образованию вокруг них поляризационных облаков, состоящих соответственно из ионов или электронов.

В результате рассеивать первичные волны могут не только отдельные частицы, но и эти облака. Если длина волны λ превышает размер такого облака, который по порядку величины равен радиусу Дебая r_{eD} (п. 2.2), то излучение отдельного облака может стать когерентным. Очевидно, что рассеивать высокочастотные радиоволны будут более легкие частицы, в связи с чем основная доля рассеянного сигнала при $\lambda > r_{eD}$ будет связана с облаками электронов, образующихся вокруг ионов. Таким образом, интенсивность рассеяния радиоволн может отражать тепловые флуктуации концентрации ионов, а форма спектра рассеянных волн — хаотические скорости (температуру) ионов плазмы.

Рассмотрим этот вопрос подробнее. Интенсивность I_s описывается полученными в § 6 формулами (4), (5), где вклад в $\Phi_N(\varkappa)$ вносят любые флуктуации электронной концентрации плазмы, в том числе и тепловые флуктуации, связанные с хаотическим характером движения заряженных частиц. Таким образом, задача вычисления интенсивности I_s при некогерентном рассеянии радиоволн сводится к определению спектра $\Phi_N(\varkappa)$ тепловых флуктуаций концентрации заряженных частиц плазмы. Предположим, что эти частицы можно считать невзаимодействующими. Тогда флуктуации в электронной и ионной компонентах плазмы независимы. Используя (2.1.17), представим выражение для флуктуации концентрации частиц N_α в виде

$$\widetilde{N}_\alpha = \int \widetilde{f}_\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)\, d\mathbf{v},$$

где $\tilde{f}_\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t)$ — флуктуация функции распределения частиц по скоростям. Тогда спектральная плотность флуктуаций N_α

$$\Phi_{N_\alpha}(\omega, \mathbf{k}) = \int \Phi_{f_\alpha}(\mathbf{v}, \mathbf{v}', \omega, \mathbf{k})\, d\mathbf{v} d\mathbf{v}', \qquad (11.7.1)$$

где, по аналогии с (8.1.5), спектральная плотность функции распределения

$$\Phi_{f_\alpha}(\mathbf{v}, \mathbf{v}', \omega, \mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int \langle f_\alpha(\mathbf{v}) f_\alpha(\mathbf{v}')\rangle_{\rho,\tau}\, e^{i(\mathbf{k}\boldsymbol{\rho} - \omega\tau)} d\tau\, d\boldsymbol{\rho}. \quad (11.7.2)$$

Здесь учтено, что в силу однородности и стационарности системы частиц корреляционная функция $\langle f_\alpha(\mathbf{v}, \mathbf{r}, t) f_\alpha(\mathbf{v}', \mathbf{r}', t)\rangle$ зависит только от разностных координат $\boldsymbol{\rho}$ и τ. Для системы невзаимодействующих частиц, когда в отсутствие внешних полей траектории частиц описываются выражениями $v_\alpha = \mathrm{const}$ и $\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{r}_\alpha(t = 0) + \mathbf{v}_\alpha t$, имеем

$$\langle f_{\alpha 0}(\mathbf{v}) f_{\alpha 0}(\mathbf{v}')\rangle_{\rho,\tau} = \delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}')\, \delta(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{v}\tau)\, f(\mathbf{v}), \qquad (11.7.3)$$

где индекс «0» означает, что рассматривается система без взаимодействия. Последнее равенство следует из того факта, что отсутствуют корреляции между появлением независимых частиц в двух бесконечно малых элементах фазового объема (в каждом из которых может находиться не более одной частицы). Из (3) следует, что в системе невзаимодействующих частиц $\langle \widetilde{N}_\alpha^2 \rangle \propto N_\alpha$, что хорошо известно из теории флуктуаций концентрации частиц идеального газа (§ 115 [34]). Подставляя (3) в (2), имеем

$$\Phi_{f_{\alpha 0}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}', \omega, \mathbf{k}) = 2\pi\delta(\mathbf{v} - \mathbf{v}')\, \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})\, f_{\alpha 0}(\mathbf{v}) \qquad (11.7.4)$$

и, согласно (1),

$$\Phi_{N_{\alpha 0}}(\omega, \mathbf{k}) \approx 2\pi \int f_{\alpha 0}(\mathbf{v})\, \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})\, d\mathbf{v}. \qquad (11.7.5)$$

Подставляя (5) в (6.6), получаем выражение для спектрального распределения интенсивности рассеянных независимыми частицами (электронами) волн. Спектральную плотность флуктуаций тока частиц легко найти, используя определение (2.1.34) и проводя интегрирование функции $\mathbf{v}\mathbf{v}'\Phi_{f_{\alpha 0}}(\mathbf{v}, \mathbf{v}', \omega, \mathbf{k})$ по $d\mathbf{v}$ и $d\mathbf{v}'$. После интегрирования по $d\mathbf{v}'$ имеем

$$\Phi_{j_0}(\omega, \mathbf{k}) = \sum_\alpha \Phi_{j_{\alpha 0}}(\omega, \mathbf{k}) = 2\pi e^2 \sum_\alpha \int v^2 f_\alpha(\mathbf{v})\, \delta(\omega - \mathbf{k}\mathbf{v})\, d\mathbf{v}. \quad (11.7.6)$$

В случае, когда имеются внешние поля, при вычислении корреляционных функций $\Phi_{N_{\alpha 0}}$ и $\Phi_{j_{\alpha 0}}$ используются выражения, описывающие траектории частиц в этих полях.

В рассматриваемом приближении найденные соотношения можно рассматривать независимо для отдельных электронов и ионов. Взаимодействие между частицами в бесстолкновительной плазме можно учесть с помощью самосогласованного поля, возникающего из-за флуктуаций частиц определенного знака. Для

этого необходимо воспользоваться волновым уравнением, подставив в него в качестве источника поля выражение для тока невзаимодействующих частиц. Используя (7.1.3), имеем

$$E_i(\omega, \mathbf{k}) = \frac{4\pi i\omega}{c^2} L_{i,\nu}^{-1} \sum_{\alpha} \mathrm{j}_{\alpha,\nu}. \tag{11.7.7}$$

Поправки к величине флуктуаций тока и концентрации находятся с помощью соотношения

$$\delta j_{\alpha,\mu}(\omega, \mathbf{k}) = \sigma_{\alpha,\mu i} E_i = -\frac{i\omega}{4\pi}\delta\varepsilon_{\alpha,\mu i}(\omega, \mathbf{k}) E_i(\omega, \mathbf{k})$$

($\delta\varepsilon_{\alpha,\mu i}$ — парциальный вклад частиц сорта α в тензор $\varepsilon_{\mu i}$). Таким образом, полная плотность тока

$$j_{\alpha,\mu}(\omega, \mathbf{k}) = j_{\alpha 0,\mu} + \frac{\omega^2}{c^2}\delta\varepsilon_{\alpha,\mu i}(\omega, \mathbf{k}) L_{\mu\nu}^{-1} \sum_{\beta} j_{\beta 0,\nu}, \tag{11.7.8}$$

где индекс «0» по-прежнему обозначает величины, относящиеся к невзаимодействующим частицам. Спектральную плотность $\Phi_N(\omega, \mathbf{k})$ можно найти, используя связь между $N_\alpha(\omega, \mathbf{k})$ и $j_\alpha(\omega, \mathbf{k})$, которая следует из уравнения непрерывности

$$N_\alpha(\omega, \mathbf{k}) = \mathbf{k}_i \mathbf{j}_{\alpha, i}/\omega e.$$

Ограничимся рассмотрением случая изотропной плазмы. Будем интересоваться только продольными полями, так как именно такие поляризационные поля оказывают основное влияние в изотропной плазме на перераспределение в ней частиц. Тогда выражение (8) для плотности тока электронов принимает вид

$$\mathbf{j}_l(\omega, \mathbf{k}) = -(\delta\varepsilon_{el}(\mathbf{j}_{e0} + \mathbf{j}_{i0})/\varepsilon_l) + \mathbf{j}_e =$$
$$\{-\delta\varepsilon_{el}\mathbf{j}_{i0} + (\varepsilon_l - \delta\varepsilon_{el})\mathbf{j}_{e0}\}/\varepsilon_l \tag{11.7.9.}$$

Выражения для $\delta\varepsilon_{e,l}$ и ε_l получены в гл. 4 (см. также п. 10.4). При наличии в плазме нескольких сортов ионов в (9) в выражениях для ε_l и $\delta\varepsilon_{il}$ необходимо учесть вклад каждого сорта ионов. Сравнивая (9) и (2.1.34), можно установить, что выражения, аналогичные (9), описывают связь между функцией распределения f_e и функциями f_{e0} и f_{i0}. Используя это обстоятельство, с помощью (1)—(3) получаем [35]

$$\Phi_{N_e}(\omega, \mathbf{k}) = \frac{2\pi}{|\varepsilon_l(\omega, k)|^2}\Big\{|1 + \delta\varepsilon_{il}(\omega, k)|^2 \int f_{e0}(\mathbf{v})\,\delta(\omega - \mathbf{kv})\,d\mathbf{v} +$$
$$+ |\delta\varepsilon_{el}(\omega, k)|^2 \int f_{i0}(\mathbf{v})\,\delta(\omega - \mathbf{kv})\,d\mathbf{v}\Big\} \tag{11.7.10}$$

(соответствующее выражение для Φ_{N_i} следует из (10) при замене индексов $e \to i$ и $i \to e$). Исследуем относительный вклад первого и второго членов (10), определяющих спектральную зависимость флуктуаций концентрации, а следовательно, и частотный спектр рассеянного ионосферной плазмой сигнала. Соглас-

но (10.4.28) и (10.4.29) в области достаточно низких частот

$$\varepsilon_l(\omega, \mathbf{k}) \approx 1 + \omega_{e0}^2/k^2v_{T_e}^2 + \omega_{i0}^2/k^2v_{T_i}^2 = 1 + (1 + T_e/T_i)\, k^{-2}r_{eD}^{-2},$$

где второй и третий слагаемые описывают вклад $\delta\varepsilon_{el}$ и $\delta\varepsilon_{il}$ соответственно. Из (11) следует, что при $kr_{eD} \sim r_{eD}/\lambda \gg 1$ $\delta\varepsilon_i \lesssim \delta\varepsilon_e \ll 1$, а $\varepsilon_l \simeq 1$. При этом условии из (10) имеем

$$\Phi_{N_e}(\omega, \mathbf{k}) \approx 2\pi \int f_{e0}(\mathbf{v})\, \delta(\omega - \mathbf{kv})\, d\mathbf{v}, \qquad (11.7.11)$$

т. е. за рассеяние радиоволн ответственны «свободные» электроны. Нетрудно убедиться, используя (4.1.28) и (10), что последнее имеет место вплоть до частот, близких к kv_{T_e} (при условии, что $\delta\varepsilon_{il}$ не вносит значительного вклада в ε_l). В высокочастотной области спектра $(\omega \gg kv_{T_e})$ при $kr_{eD} \gtrsim 1$ флуктуации плазмы могут быть значительны только в диапазоне частот, в котором существуют плазменные волны (4.1.29). В этом случае $\varepsilon_l(\omega, \mathbf{k})$ стремится к нулю и $\Phi_N(\omega, \mathbf{k})$ имеет максимум, величина которого определяется уровнем плазменных волн. При $\alpha_D \approx kr_{eD} > 1$, однако, плазменные волны сильно поглощаются тепловыми электронами плазмы, поэтому даже при наличии внешнего источника этих волн отмеченный максимум $\Phi_N(\omega, \mathbf{k})$ на $\omega \approx \omega_e$ слабо выражен.

Если $kr_{eD} \ll 1$, то $\delta\varepsilon_{el} \gtrsim \delta\varepsilon_{il}$, $\delta\varepsilon_{el} \ll 1$ и основной вклад в Φ_{Ne} в области малых доплеровских частот ω вносит последний член (10). Это обусловлено малой величиной $N_e(\omega, \mathbf{k})$ (которая определяется интегралом от $f_{e0}(\mathbf{v})\delta(\omega - \mathbf{kv})$ по $d\mathbf{v}$) по сравнению с $N_i(\omega, \mathbf{k})$ при $v_{T_e} \gg v_{T_i}$. В результате при $k^2r_{eD}^2 \ll 1$ в области малых частот

$$\Phi_{N_e}(\omega, \mathbf{k}) \simeq 2\pi\, (1 + T_e/T_i)^{-2} \int f_{i0}(\mathbf{v})\, \delta(\omega - \mathbf{kv})\, d\mathbf{v}. \qquad (11.7.12)$$

Согласно (11), (12) для $f_{\alpha 0}(\mathbf{v})$, имеющих вид распределения Максвелла (2.1.16), Φ_{N_e} принимает следующий вид:

$$\Phi_{N_e}(\omega, \mathbf{k}) = \begin{cases} \sqrt{2\pi}\, \dfrac{N}{kv_{T_e}} \exp\left(-\dfrac{\omega^2}{k^2v_{T_e}^2}\right), & \alpha_D \gg 1,\ \omega \lesssim kv_{T_e}; \\ \sqrt{2\pi}\, \dfrac{N}{kv_{T_i}}\left(1 + \dfrac{T_e}{T_i}\right) \exp\left(-\dfrac{\omega^2}{k^2v_{T_e}^2}\right), & \alpha_D \ll 1. \end{cases}$$

(11.7.13)

Из (13) следует, что характерный масштаб изменения Φ_{N_e} с частотой примерно равен kv_{T_i}, т. е. определяется тепловой скоростью ионов. С ростом T_e/T_i величина Φ_{N_e} в области $\omega \ll kv_{T_i}$ уменьшается и при $T_e \gg T_i$ основная энергия флуктуаций концентрации электронов сосредоточена в двух симметричных максимумах $(\omega = \pm kc_s,\ c_s \gg v_{T_i})$, где $\varepsilon_e(\omega, \mathbf{k}) \approx 0$. Эти максимумы

отражают существование при $T_e \gg T_i$ ионно-звуковых волн (4.1.3а), которые сильно поглощаются тепловыми ионами плазмы при $T_e \sim T_i$, так как при этом условии $c_s \simeq v_{T_i}$. Основным источником ионно-звуковых волн в ионосферной плазме является относительное движение электронов и ионов (ток) в плазме. Фазовая скорость этих волн имеет тот же знак, что и направление тока. Поэтому при наличии в плазме тока максимумы на $\omega = \pm kc_s$ могут иметь существенно разные значения. При $\alpha_D \ll 1$ значительными становятся и флуктуации концентрации электронов на частотах $\omega^2 = \omega_{e0}^2\left(1 + 3k^2r_{eD}^2\right)$,обусловленные плазменными волнами. Их уровень в случае $\alpha_D \ll 1$ существенно выше, чем при $\alpha_D \gg 1$, так как фазовая скорость $v_ф$ длинноволновых плазменных волн становится больше v_{T_e}, и такие волны уже не могут отдавать свою энергию тепловым электронам плазмы за счет механизма Ландау. Уровень длинноволновых (по сравнению с r_{eD}) плазменных волн определяется их взаимодействием с надтепловыми электронами (п. 1.1), которые могут в зависимости от знака производной $\partial f_{e0}/\partial v$ в области $v_{нт}$ ($v_{нт}$ — скорость надтепловых электронов) поглощать или отдавать энергию плазменным волнам. В обычной реализации метода некогерентного рассеяния ионосфера облучается вертикальным пучком радиоволн, т. е. волновой вектор $\mathbf{k}_1$ падающей волны направлен вдоль вертикальной оси z, а вектор рассеянной волны $\mathbf{k}_s$ имеет противоположное направление. В этом случае в (10)—(12) $\mathbf{K} = K_z = 2k_1$, что приводит к удвоению доплеровского смещения частоты радиоволн при их обратном рассеянии от движущейся плазмы (п. 10.6). Если на ионосферу посылается радиосигнал частоты ω_1, то принимаемый рассеянный ионосферой сигнал будет смещен на частоту ω, а интенсивность (или мощность) этого сигнала будет пропорциональна спектральной плотности $\Phi_{N_e}(\omega, \mathbf{k})$.

Предположим, что с помощью радиопередатчика мощностью P_0, нагруженного на антенну с коэффициентом усиления P_0G, излучается вертикально вверх мощность P_0G_0, а рассеянный ионосферой сигнал (объем рассеивающего слоя равен V) принимается на антенну с эффективной площадью $A_{эф}$. Тогда, используя (11.6), легко получить, что мощность $P_s\left(\omega_1'\right)$ принятого сигнала в спектральном интервале $d\omega_1'$ *)

$$P_s\left(\omega_1'\right) = P_0G_0\frac{\sigma_\omega V A_{эф}}{16\pi^2 z^4}, \quad \sigma_\omega = 4\pi\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2 \Phi_N(\omega, 2k)\frac{\omega_1'^2}{\omega_1^2}\times \times\sqrt{\frac{\varepsilon\left(\omega_1'\right)}{\varepsilon\left(\omega_1\right)}}\,d\omega_1'. \quad (11.7.14)$$

*) $V = LS$ и $S \approx 4\pi z^2/G_0$; при излучении импульсов длительностью τ $L = c\tau/2$.

Интегральную по всем частотам мощность можно получить путем интегрирования (14) по частотам ω. Резонансные значения $\Phi_{N_e}(\omega, \mathbf{k})$, связанные с обращением $\varepsilon_l(\omega, k)$ в нуль, не вносят определяющего вклада в значение $\langle(\Delta N)^2\rangle = \int \Phi_{N_e}(\omega, \mathbf{k})\, d\omega$ (в силу того, что они сосредоточены в сравнительно узком интервале частот), а характерные масштабы изменения функций $f_{e0}(\omega/k)$ и $f_{i0}(\omega/k)$ существенно меньше масштабов изменения функций $|1+\delta\varepsilon_{il}(\omega, k)|/|\varepsilon_l(\omega, k)|$ и $|\delta\varepsilon_{el}(\omega, k)|/|\varepsilon_l(\omega, k)|$ соответственно. Тогда при интегрировании по частотам в (10), (14) можно считать $\varepsilon_l \simeq \varepsilon_l\ (\omega \simeq 0)$ и в результате получаем, что

$$\langle(\Delta N_e)^2\rangle \simeq N_e \begin{cases} \dfrac{1+\alpha_D}{2+\alpha_D}, & T_e \leqslant T_i \\ 1, & T_e \gg T_i \end{cases} \qquad (11.7.15)$$

и $\sigma_V = \int \sigma(\omega)\, d\omega = 4\pi (e^2/mc^2) \langle(\Delta N_e)^2\rangle$. Из (14) и (15) следует, что для $\alpha_D = (kr_D)^2 \ll 1$ и $T_e \sim T_i$ поперечник рассеяния σ_V примерно в 2 раза меньше тех значений, которые имеют место в случае рассеяния радиоволн на свободных электронах. Зависимость полного поперечника рассеяния σ (отнесенного к поперечнику рассеяния на свободных электронах) от параметра α_D при различных значениях T_e/T_i представлена на рис. 11.7. Таким образом, измерения интегральной (по частоте) мощности сигнала, рассеянного на разных высотах в ионосфере, позволяют определить высотную зависимость концентрации ионосферной плазмы. Однако, если $\alpha_D \leqslant 1$, как видно из (15) и рис. 11.8, для этого необходимо знать высотную зависимость отношения T_e/T_i. Указанная величина может быть определена из $P_s(\omega)$.

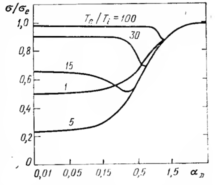

Рис. 11.7. Изменение полного поперечника рассеяния σ $\left(\sigma_e = 4\pi r_e^2 = 4\pi (e^2/mc^2)^2\right)$ в зависимости от α_D при различных значениях T_e/T_i [42].

Спектральную мощность (интенсивность) рассеянного сигнала, которая определяется функцией распределения электронов f_{e0}, т. е. выражением (11), принято называть электронной составляющей спектра, а ту часть спектральной интенсивности рассеянного сигнала, которая определяется (12),— полной компонентой спектра. Последняя, как указывалось, обусловлена рассеянием радиоволн на поляризационных облаках электронов, образующихся вокруг ионов, а точнее, связана с поляризационными зарядами, возникающими при прохождении радиоволны через среду с флуктуациями концентрации плазмы.

В условиях ионосферы радиус Дебая $r_{eD} \approx 40$ см, т. е. ионная компонента спектра рассеянного сигнала преобладает при использовании радиоволн с длиной волны $\lambda > 40$ см в области $\omega \ll kv_{T_e}$. Для длин волн $\lambda < 40$ см или в области доплеровских частот $\omega \simeq \omega_{e0}$ спектральная интенсивность будет определяться

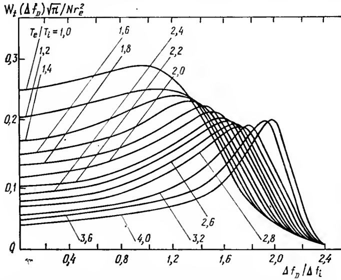

Рис. 11.8. Спектры ионной составляющей при $\alpha_D = 0{,}05$. Шкала частот нормирована на величину $\Delta f_i = \sqrt{8}\, v_{T_i}/\lambda$ [42].

электронной компонентой спектра. В области малых доплеровских частот форма спектрального распределения рассеянных волн может быть описана (13).

На рис. 11.9 в качестве иллюстрации приведены данные о спектральной мощности рассеянного сигнала для различных значений α_D и $T_e/T_i = 1$, вычисленные в предположении, что основной составляющей ионной компоненты рассеивающей плазмы являются ионы атомарного кислорода [36]. Поскольку вид спектра $P_s(\omega)$ зависит от массы ионов, имеется принципиальная возможность определять с помощью метода некогерентного рассеяния радиоволн концентрацию основных ионных составляющих ионосферы [36]. Кривые, подобные приведенным на рис. 11.9, используются для определения температур электронов и ионов в ионосфере. Данные об асимметрии спектра $P_s(\omega')$ относительно значения $\omega = \omega_i$ используют обычно для определения токов в ионосфере (рис. 11.9), а также дрейфов плазмы как целого. В последнем случае, очевидно, изменения формы кривой $P_s(\omega')$ не происходит, однако она целиком смещается в зависимости от направления скорости на величину $|\Delta\omega| = 2k|u_z|$ относительно частоты ω_i. Поведение $P_s(\omega')$ в области частот $\omega' = \omega_i \pm \omega_{e0}$

используется для диагностики плазменных волн в ионосфере и определения их источников. Например, с помощью этого метода могут быть получены данные об энергии фотоэлектронов. В последние годы данный метод используют также для изучения плазменных волн, возбуждаемых в ионосфере мощным наземным радиоизлучением за счет их трансформации в области плазменных резонансов (п. 10.3) [37]. Метод применяют и для определения ионно-звуковой турбулентности, возбуждаемой в ионосфере за счет протекания в ней токов, параллельных или ортогональных силовым линиям геомагнитного поля (гл. 9 и [38]).

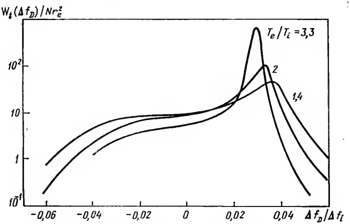

Рис. 11.9. Влияние дрейфа электронов на асимметрию спектра ионной компоненты $\left(v_d/v_{T_e} \approx 0{,}7\alpha_D = 5\cdot 10^{-3}\right)$ для различных значений T_e/T_i [42].

Усложнение методики измерений позволяет осуществить более точное определение некоторых параметров ионосферы или получение сведений о тех ее параметрах, которые не изменяют спектральные характеристики спектра $P_s(\omega')$. Примером может служить использование эффекта Фарадея (пп. 11.4, 11.6) в случае излучения волны линейной поляризации.

Использование наклонного облучения ионосферы и разнесенного приема позволяет оценивать полный вектор скорости движения плазмы.

Это позволяет получать сведения о концентрации электронов без привлечения данных об отношении T_e/T_i.

Интенсивность сигнала, рассеянного в ионосфере тепловыми флуктуациями плазмы, достаточно мала. Поэтому в данном методе используют передатчики мощностью 1—5 МГВт и достаточно направленные антенные системы с коэффициентом усиления $G_0 \sim 10^3$. Некоторые результаты исследований параметров ионосферы, полученные этим методом, иллюстрировались на рис. 1.8, 1.9 гл. 1. Более подробно о методе см. в [38].

ЛИТЕРАТУРА

К введению

1. *Лукьянов С. Ю.* Горячая плазма и управляемый термоядерный синтез.— М.: Наука, 1975.
2. *Саттон Дж., Шермак А.* Основы технической магнитной газодинамики: Пер. с англ./Под ред. Е. И. Янтовского.— М.: Мир, 1968.
3. *Пожела Ю. К.* Плазма и токовые неустойчивости в полупроводниках.— М.: Наука, 1977.
4. *Пахольчик А.* Радиоастрофизика: Пер. с англ./Пед ред. В. В. Виткевича.— М.: Мир, 1973.
5. *Данжи Дж.* Космическая электродинамика: Пер. с англ./Под ред. Д. А. Франк-Каменецкого.— М.: Атомиздат, 1961.
6. *Баранов В. В., Краснобаев К. В.* Гидродинамическая теория космической плазмы.— М.: Наука, 1977.
7. *Альвен Г., Фельтхаммар К. Г.* Космическая электродинамика: Пер. с англ./Под ред. Л. А. Арцимовича.— М.: Мир, 1967.
8. *Железняков В. В.* Радиоизлучение Солнца и планет.— М.: Наука, 1964.
9. *Альперт Я. Л.* Волны и искусственные тела в приземной плазме.— М.: Наука, 1974.
10. *Паркер Е. Н.* Динамические процессы в межпланетной среде: Пер. с англ./Под ред. Л. И. Дормана.— М.: Мир, 1965.
11. Солнечно-земная физика: Пер. с англ./Под ред. И. А. Жулина, Г. А. Скуридина.— М.: Мир, 1968.
12. *Гинзбург В. Л.* Распространение электромагнитных волн в плазме.— М.: Наука, 1967.
13. *Альперт Я. Л.* Распространение электромагнитных волн и ионосфера.— М.: Наука, 1967.
14. *Гершман Б. Н.* Динамика ионосферной плазмы.— М.: Наука, 1974.
15. *Гершман Б. Н., Угаров В. А.*— УФН, 1960, т. 72, с. 235.
16. *Гершман Б. Н., Трахтенгерц В. Ю.*— УФН, 1966, т. 89, с. 201.
17. *Гульельми А. В., Троицкая В. А.* Геомагнитные пульсации и диагностика магнитосферы.— М.: Наука, 1973.
18. *Беликович В. В., Бенедиктов Е. А., Гетманцев Г. Г. и др.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1975, ч. 18, с. 512. УФН, 1974, т. 113, с. 732.
19. Radio Science, 1974, с. 9, № 11.

К главе 1

1. *Ришбет Г., Гарриот О. К.* Введение в физику ионосферы: Пер. с англ./ Под ред. Г. С. Иванова-Холодного.— Л.: Гидрометеоиздат, 1975.
2. *Рагклифф Дж.* Введение в физику ионосферы и магнитосферы: Пер. с англ./Под ред. В. В. Рыбина.— М.: Мир, 1975.
3. *Chakrabarty D. K., Mitra A. P.*— Indian J. Radio Space Phys., 1974, v. 3, p. 76.
4. *Reid C. C.*— J. Geophys. Res., 1976, v. 75, p. 2551.

5. Физика верхней атмосферы Земли/Под ред. С. О. Хайнса и др.: Пер. с англ./Под ред. Г. С. Иванова-Холодного.— Л.: Гидрометеоиздат, 1971.
6. *Иванов-Холодный Г. С., Никольский Г. М.* Солнце и ионосфера.— М.: Наука, 1969.
7. *Уиттен Р., Поппов И.* Физика нижней ионосферы: Пер. с англ./Под ред. А. Д. Данилова.— М.: Мир, 1968.
8. *Данилов А. Д.* Химия ионосферы.— Л.: Гидрометеоиздат, 1976.
9. *Данилов А. Д., Власов М. Н.* Фотохимия ионизованных и возбужденных частиц в нижней ионосфере.— Л.: Гидрометеоиздат, 1973.
10. *Иткина М. А.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1978, т. 21, с. 777.
11. *Mitra A. P., Rowe J. N.*— J. Atm. Terr. Phys., 1974, v. 36, p. 1797.
12. *Данилов А. Д.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1981, т. 24, с. 1171.
13. *Иткина М. А., Кротова З. Н.*— Там же, с. 415.
14. *Гуревич А. В., Шварцбург А. Б.* Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере.— М.: Наука, 1973.
15. *Гершман Б. Н.* Динамика ионосферной плазмы.— М.: Наука, 1974.
16. Космическая геофизика/Под ред. А. Эгеланда и др.: Пер. с англ./Под ред. Б. Б. Брюнелли и др.— М.: Мир, 1976.
17. Эмпирические модели среднеширотной ионосферы/Под ред. Н. П. Беньковой.— М.: Наука, 1981.
18. *Гершман Б. Н., Игнатьев Ю. А., Каменецкая Г. Х.* Механизмы образования ионосферного спорадического слоя E_s на различных широтах.— М.: Наука, 1976.
19. *Ерухимов Л. М., Максименко О. И., Мясников Е. Н.*— В кн.: Ионосферные исследования/Под ред. Л. М. Ерухимова и Л. А. Юдович.— М.: Сов. радио, 1980, вып. 30, с. 27.
20. *Гершман Б. Н.*— Там же, с. 17.
21. *Каменецкая Г. Х.*— Там же, с. 6.
22. *Sagalin R. C., Smiddy M.*— J. Geophys. Res., 1974, v. 79, p. 4252.
23. *Татарский В. И.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1960, т. 3, с. 551.
24. *Fejer B. G., Kelley M. C.*— Rev. Geophys. and Space Phys., 1980, v. 18, p. 401.
25. *Getmantsev G. G., Eroukhimov L. M.*— Solar Terr. Phys., 1969, v. 5, p. 13.
26. *Комраков Г. П., Скребкова Л. А.*— В кн.: Ионосферные исследования/Под ред. Л. М. Ерухимова и Л. А. Юдович.— М.: Сов. радио, 1980, вып. 30, с. 49.
27. *Гдалевич Г. Л., Озеров В. Д., Всехсвятская И. С.* и др.— Геомагнетизм и аэрономия, 1980, т. 20, с. 809.
28. *Акасофу С. И., Чепмен С.* Солнечно-земная физика: Пер. с англ./Под ред. Г. М. Никольского и др.— М.: Мир, 1975, ч. 2.
29. *Нишида А.* Геомагнитный диагноз магнитосферы: Пер. с англ./Под ред. Я. И. Фельдштейна.— М.: Мир, 1980.
30. *Пудовкин М. И., Распопов О. М., Клейменова Н. Г.* Возмущения электромагнитного поля Земли.— Л.: Изд. ЛГУ, 1976.
31. *Митякова Э. Е.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1968, т. 11, с. 770.
32. *Деминова Г. Ф., Деминов М. П., Ерухимов Л. М. и др.*— Геомагнетизм и аэрономия, 1982, т. 22, с. 211.
33. *Гуревич А. В., Цедилина Е. Е.*— УФН, 1967, т. 91, с. 609.
34. *Жилинский А. П., Цендин Л. Д.*— УФН, 1980, т. 131, с. 343.
35. *Казимировский Э. С., Кокоуров В. Д.* Движения в ионосфере.— Новосибирск: Наука, 1979.
36. *Дробжев В. И., Куделин Г. М., Нургожин В. И.* и др. Волновые возмущения в ионосфере.— Алма-Ата: Наука, 1975.
37. *Каплан С. А., Пикельнер С. Б., Цытович В. Н.* Физика плазмы солнечной атмосферы.— М.: Наука, 1977.
38. На переднем крае астрофизики/Под ред. Ю. Эрветта: Пер. с англ./Под ред. В. В. Иванова.— М.: Мир, 1979.
39. Проблемы солнечной активности/Под ред. В. Бумбы и И. Клечека: Пер. с англ./Под ред. В. Обридко.— М.: Мир, 1979.
40. *Железняков В. В.* Радиоизлучение Солнца и планет.— М.: Наука, 1964.
41. *Марочник Л. С., Сучков А. А.*— УФН, 1974, т. 112, с. 275.

42. *Каплан С. А., Пикельнер С. Б.* Физика межзвездной среды.— М.: Наука, 1979.
43. *Гинзбург В. Л., Сыроватский С. И.* Происхождение космических лучей.— М.: Изд. АН СССР, 1963.
44. *Тейлер Р. Дж.* Галактики: строение и эволюция: Пер. с англ./Под ред. А. Г. Дорошкевича.— М.: Мир, 1981.
45. *Манчестер Р., Тейлор Дж.* Пульсары: Пер. с англ./Под ред. А. Д. Кузьмина.— М.: Мир, 1980.
46. *Шкловский И. С.* Сверхновые звезды.— М.: Наука, 1976.
47. *Ерухимов Л. М., Писарева В. В.*— Астрономический циркуляр, 1968, № 489; Изв. вузов. Радиофизика, 1969, т. 12, с. 900.
48. *Ерухимов Л. М.*— УФН, 1969, т. 99, с. 523.
49. *Власов В. И., Чашей И. В., Шишов В. И., Шишова Т. Д.*— Геомагнетизм и аэрономия, 1979, т. 19, с. 401.
50. *Лотова Н. А.*— УФН, 1975, т. 115, с. 603.

К главе 2

1. *Больцман Л.* Лекции по теории газов.— М.: Гостехиздат, 1956.
2. *Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Физическая кинетика.— М.: Наука, 1979.
3. *Грановский В. Л.* Электрический ток в газе.— М.: ГИТТЛ, 1952, т. 1.
4. *Ферцигер Дж., Капер Г.* Математическая теория процессов переноса в газах: Пер. с англ./Под ред. Д. К. Зубарева и А. Г. Башкирова.— М.: Мир, 1976.
5. *Боголюбов Н. Н.* Проблемы динамической теории в статистической физике.— М.: Гостехиздат, 1946.
6. *Климонтович Ю. Л.* Кинетическая теория неидеального газа и неидеальной плазмы.— М.: Наука, 1975.
7. *Эккер Г.* Теория полностью ионизированной плазмы: Пер. с англ./Под ред. А. А. Рухадзе.— М.: Мир, 1974.
8. *Румер Ю. Б., Рывкин М. Ш.* Термодинамика, статистическая физика и кинетика. М.: Наука, 1977.
9. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Статистическая физика.— М.: Наука, 1976, ч. 1.
10. *Майер Дж., Гипперт-Майер М.* Статистическая механика: Пер. с англ./Под ред. Д. Н. Зубарева.— М.: Мир, 1980.
11. *Гинзбург В. Л.* Распространение электромагнитных волн в плазме.— М.: Наука, 1967.
12. *Александров А. Ф., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А.* Основы электродинамики плазмы.— М.: Высшая школа, 1978.
13. Электродинамика плазмы/Под ред. А. И. Ахиезера.— М.: Наука, 1974.
14. Кинетические процессы в газах и плазме/Под ред. Хохштима: Пер. с англ.— М.: Атомиздат, 1972.
15. *Тамм И. Е.* Основы теории электричества.— М.: Наука, 1976.
16. *Беллюстин С. В.* Классическая электронная теория.— М.: Высшая школа, 1971.
17. *Темирязев А. К.* Кинетическая теория материи.— 2-е изд.— М.: Изд-во Московского ун-та, 1954.
18. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика.— М.: Наука, 1973.
19. *Landshoff R.*— Phys. Rev., 1951, v. 82, p. 442.
20. *Силин В. П.* Введение в кинетическую теорию газов.— М.: Наука, 1971.
21. *Шкаровский М., Джонстон Т., Бачинский М.* Кинетика частиц плазмы: Пер. с англ.— М.: Атомиздат, 1969.
22. *Ивановский А. И., Репнев А. И., Швидковский Е. Г.* Кинетическая теория верхней атмосферы.— Л.: Гидрометеоиздат, 1967.
23. *Гершман Б. Н.* Динамика ионосферной плазмы.— М.: Наука, 1974.
24. *Гуревич А. В., Шварцбург А. Б.* Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере.— М.: Наука, 1973.

25. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред.— М.: Наука, 1982.
26. *Баранов В. Б., Краснобаев К. В.* Гидродинамическая теория космической плазмы.— М.: Наука, 1977.

К главе 3

1. *Гинзбург В. Л.* Распространение электромагнитных волн в плазме.— М.: Наука, 1967.
2. *Силин В. П., Рухадзе А. А.* Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред.— М.: Госатомиздат, 1961.
3. *Шафранов В. Д.* Электромагнитные волны в плазме.— В кн.: Вопросы теории плазмы/Под ред. М. А. Леонтовича.— М.: Атомиздат, 1963, вып. 3, с. 3.
4. *Агранович В. М., Гинзбург В. Л.* Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов.— М.: Наука, 1979.
5. *Маделунг Э. М.* Математический аппарат физики: Пер. с нем./Под ред. В. И. Левина.— М.: Наука, 1968.
6. *Гершман Б. Н., Игнатьев Ю. А., Каменецкая Г. Х.* Механизмы образования ионосферного спорадического слоя E_s на различных широтах.— М.: Наука, 1976.
7. *Виноградова М. Б., Руденко О. В., Сухоруков А. П.* Теория волн.— М.: Наука, 1979.
8. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред.— М.: Наука, 1982.
9. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля.— М.: Физматгиз, 1960.
10. *Гинзбург В. Л., Рухадзе А. А.* Волны в магнитоактивной плазме.— М.: Наука, 1970.
11. *Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И.* Геометрическая оптика неоднородных сред.— М.: Наука, 1980.
12. *Гершман Б. Н., Угаров В. А.*— УФН, 1960, т. 72, с. 236.
13. *Helliwell R. A.* Whistlers and Related Ionospheric Phenomena.— Stanford Univ. Press, 1965.
14. Электродинамика плазмы/Под ред. А. И. Ахиезера.— М.: Наука, 1974.
15. *Альвен Г., Фельтхаммар К. Г.* Космическая электродинамика: Пер. с англ./Под ред. Л. А. Арцимовича.— М.: Мир, 1967.
16. *Данжи Дж.* Космическая электродинамика: Пер. с англ./Под ред. Д. А. Франк-Каменецкого.— М.: Госатомиздат, 1961.
17. *Стикс Т.* Теория плазменных волн: Пер. с англ.— М.: Атомиздат, 1965.
18. *Кадомцев Б. Б.* Коллективные явления в плазме.— М.: Наука, 1976.
19. *Кролл Н., Трайвелпис А.* Основы физики плазмы: Пер. с англ./Под ред. А. М. Дыхне.— М.: Мир, 1975.
20. *Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений.— М.: Наука, 1966.
21. *Карпман В. И.* Нелинейные волны в диспергирующих средах.— М.: Наука, 1973.
22. *Петвиашвили В. И.* Нелинейные волны и солитоны.— В кн.: Вопросы теории плазмы./Под ред. М. А. Леонтовича.— М.: Атомиздат, 1979, вып. 9, с. 59.

К главе 4

1. *Гинзбург В. Л.* Распространение электромагнитных волн в плазме.— М.: Наука, 1967.
2. *Александров А. Ф., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А.* Основы электродинамики плазмы.— М.: Высшая школа, 1978.
3. *Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Физическая кинетика.— М.: Наука, 1979.
4. *Гинзбург В. Л., Рухадзе А. А.* Волны в магнитоактивной плазме.— М.: Наука, 1970.

5. *Силин В. П., Рухадзе А. А.* Электромагнитные свойства плазмы и плазмоподобных сред.— М.: Госатомиздат, 1961.
6. *Стикс Т.* Теория плазменных волн: Пер. с англ.— М.: Атомиздат, 1965.
7. *Власов А. А.*— ЖЭТФ, 1938, т. 8, с. 291.
8. *Ландау Л. Д.*— ЖЭТФ, 1946, т. 16, с. 574.
9. *Гершман Б. Н.*— ЖЭТФ, 1953, т. 24, с. 453.
10. *Гершман Б. Н.*— ЖЭТФ, 1953, т. 24, с. 659.
11. Электродинамика плазмы/Под ред. А. И. Ахиезера.— М.: Наука, 1974.
12. *Гершман Б. Н.*— ДАН СССР, 1961, т. 137, с. 822.
13. *Bernstein J. B.* Phys. Rev., 1958, v. 109, p. 10.
14. *Балдвин Д., Бернстейн А., Винник М.* Кинетическая теория плазменных волн в магнитном поле. В кн.: Достижения физики плазмы. Пер. с англ./Под ред. М. С. Рабиновича.— М.: Мир, 1975, с. 172.

К главе 5

1. *Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И.* Геометрическая оптика неоднородных сред.— М.: Наука, 1980.
2. *Курант Р., Гильберт Д.* Методы математической физики. Т. 2.— М.: Гостехиздат, 1951.
3. *Голдстейн Н. Л.* Классическая механика.— М.: Гостехиздат, 1957.
4. *Леви-Чевита Т., Амальди Ч.* Курс теоретической механики. Т. 2, ч. 2.— М.: ИИЛ, 1951.
5. *Аппель П.* Теоретическая механика.— М.: Физматгиз, 1958.
6. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика.— М.: Наука, 1973.
7. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики.— М.: Наука, 1974.
8. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики: Пер. с англ./Под ред. Г. П. Мотулевич.— М.: Наука, 1973.
9. *Маделунг Э.* Математический аппарат физики: Пер. с нем./Под ред. В. И. Левина.— М.: Наука, 1968.
10. Лучевое приближение и вопросы распространения радиоволн: Сб. пер. статей/Под ред. М. П. Кияновского.— М.: Наука, 1971.
11. *Кияновский М. П.*— В кн.: Исследования по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца.— М.: Наука, 1972, вып. 25, с. 87.
12. *Казанцев А. Н., Лукин Д. С., Спиридонов Ю. Г.*— Космические исследования, 1967, т. 5, с. 593.
13. *Спиридонов Ю. Г., Лукин Д. С.*— Изв. вузов. Радиотехника и электроника, 1969, т. 14, с. 1673.
14. *Яшин Ю. Я.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1968, т. 11, с. 491.
15. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Электродинамика сплошных сред.— М.: Наука, 1982.
16. *Рашевский П. К.* Курс дифференциальной геометрии.— М.; Л.: Гостехиздат, 1957.
17. *Гинзбург В. Л.* Распространение электромагнитных волн в плазме.— М.: Наука, 1967.
18. *Агранович В. М., Гинзбург В. Л.* Кристаллооптика с учетом пространственной дисперсии и теория экситонов.— М.: Наука, 1979.
19. *Железняков В. В.* Электромагнитные волны в космической плазме.— М.: Наука, 1977.
20. *Фок В. А.* Таблицы функций Эйри.— М.: ГТТИ, 1946.
21. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика.— М.: Наука, 1974.
22. *Бреховских Л. М.* Волны в слоистых средах.— М.: Наука, 1973.
23. *Ferstelling K.*— Arch. elektr. Ubertrag., 1949, b. 3, s. 11; 1950, b. 5, s. 209.
24. *Денисов Н. Г.*— ЖЭТФ, 1956, т. 31, с. 609.
25. *Железняков В. В., Злотник Е. Я.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1962, т. 5, с. 644.
26. Физика магнитосферы/Под ред. Д. Вильямса и Дж. Мида: Пер. с англ./Под ред. К. И. Грингауза и А. И. Жулина.— М.: Мир, 1972.
27. *Mc Affe J. R.*— J. Geophys. Res., 1969, v. 74, p. 6403.

28. *Гершман Б. Н., Крупина А. Е., Яшин Ю. Я.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1973, т. 16, с. 981.
29. *Крупина А. Е.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1977, т. 20, с. 494.
30. *Гершман Б. Н., Крупина А. Е., Яшин Ю. Я.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1974, т. 17, с. 1461.
31. *Крупина А. Е.. Яшнов В. А.* Изв. вузов. Радиофизика, 1977, т. 20, с. 183.
32. *Budden K. G.* Radio Waves in the Ionosphere.— Cambridge Univ. Press, 1961.
33. *Бадден К. Дж.* Магнитоионная теория.— В кн.: Геофизика. Околоземное космическое пространство. Пер. с англ./Под ред. Г. С. Голицына.— М.: Мир, 1964, с. 56.
34. *Кравцов Ю. А.*— ДАН СССР, 1968, т. 183, с. 74.
35. *Заславский Г. М., Мейтлис В. П., Филоненко Н. И.* Взаимодействие волн в неоднородных средах.— Новосибирск: Наука, 1982.

К главе 6

1. *Twiss R. G.*— Pros. Phys. Soc., 1951, v. 64, B, p. 654.
2. *Sturrock P. A.*— Phys. Rev., 1959, v. 112, p. 1488.
3. *Федорченко А. М., Коцаренко Н. Я.* Абсолютная и конвективная неустойчивость в плазме и твердых телах.— М.: Наука, 1981.
4. *Титчмарш Е.* Введение в теорию интегралов Фурье.— М.: Гостехиздат, 1948.
5. *Гершман Б. Н.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1960, т. 3, с. 146.
6. *Ахиезер А. И., Файнберг Я. Б.*— ДАН СССР, 1949, т. 69, с. 555; ЖЭТФ, 1951, т. 21, с. 1262.
7. *Bohm D., Gross E. P.*— Phys. Rev., 1949, v. 75, p. 1851.
8. *Железняков В. В.* Электромагнитные волны в космической плазме.— М.: Наука, 1977.
9. *Гинзбург В. Л., Рухадзе А. А.* Волны в магнитоактивной плазме.— М.: Наука, 1970.
10. *Романов Ю. А., Филиппов Г. Ф.*— ЖЭТФ, 1961, т. 40, с. 123.
11. *Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З.*— Ядерный синтез, 1961, т. 1, с. 82.
12. *Drummond W. E., Pines D.*— Nucl. Fusion Suppl., 1962, v. 3, p. 1049.
13. *Александров А. Ф., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А.* Основы электродинамики плазмы.— М.: Высшая школа, 1978.
14. *Кролл Н., Трайвелпис А.* Основы физики плазмы: Пер. с англ./Под ред. А. М. Дыхне.— М.: Мир, 1975.
15. *Лифшиц Е. М., Питаевский Л. П.* Физическая кинетика.— М.: Наука, 1979.
16. *Кадомцев Б. Б.* Турбулентность плазмы.— В кн.: Вопросы теории плазмы/Под ред. М. А. Леонтовича.— М.: Атомиздат, 1964, вып. 4, с. 188.
17. *Веднов А. А.* Введение в теорию слаботурбулентной плазмы.— В кн.: Вопросы теории плазмы/Под ред. М. А. Леонтовича.— М.: Атомиздат, 1963, вып. 3, с. 203.
18. *Цытович В. Н.* Нелинейные эффекты в плазме.— М.: Наука, 1967.
19. *Сагдеев Р. З., Шафранов В. Д.*— ЖЭТФ, 1960, т. 39, с. 181.
20. *Гершман Б. Н., Трахтенгерц В. Ю.*— УФН, 1966, т. 89, с. 201.
21. *Пудовкин М. И., Распопов О. М., Клейменова Н. Г.* Возмущения электромагнитного поля Земли.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1976.
22. *Стикс Т.* Теория плазменных волн: Пер. с англ.— М.: Атомиздат, 1965.
23. *Гершман Б. Н.* Динамика ионосферной плазмы.— М.: Наука, 1974.
24. *Гершман Б. Н., Игнатьев Ю. А., Каменецкая Г. Х.* Механизмы образования ионосферного спорадического слоя E_s на различных широтах.— М.: Наука, 1976.
25. *Farley D. T.*— J. Geophys. Res., 1963, v. 68, p. 6085.

К главе 7

1. *Фелсен Л., Маркувиц Н.* Излучение и рассеяние волн: Пер. с англ./Под ред. Левина М. Л.— М.: Мир, 1978, т. 2.

2. *Алексин В. Ф., Пахомов В. И., Степанов К. Н.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1965, т. 8, с. 1147.
3. *Бункин В. Ф.*— ЖЭТФ, 1957, т. 32, с. 338.
4. *Беллюстин Н. С., Докучаев В. П.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1975, т. 18, с. 17.
5. *Беллюстин Н. С.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1978, т. 21, с. 22.
6. *Lu M. S., Mei K. K.*— IEEE Trans. (Antennas and Propagation), 1971, v. AP—19, p. 669.
7. *Гайтлер В.* Квантовая теория излучения: Пер. с англ./Под ред. Богомолова Н. Н.— М.: ИЛ, 1956.
8. *Гинзбург В. Л., Эйдман В. Я.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1959, т. 2, с. 331.
9. *Гинзбург В. Л., Сазонов В. Н., Сыроватский С. И.*— УФН, 1968, т. 94, с. 63.
10. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Теория поля.— М.: Наука, 1973.
11. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: Наука, 1971.
12. Синхротронное излучение/Под ред. Соколова А. А. и Тернова И. М.— М.: Наука, 1966.
13. *Пахольчик А.* Радиоастрофизика: Пер. с англ./Под ред. Виткевича В. В.— М.: Мир, 1973.
14. *Westfold K. C.*— Astrophys. J., 1959, v. 130, p. 241.
15. *Цытович В. Н.*— Вестник МГУ, 1951, т. 11, с. 27.
16. *Гинзбург В. Л.*— УФН, 1953, т. 51, с. 343.
17. *Железняков В. В.* Электромагнитные волны в космической плазме.— М.: Наука, 1977.
18. *Железняков В. В.*— ЖЭТФ, 1966, т. 51, с. 570.
19. *Бекефи Дж.* Радиационные процессы в плазме: Пер. с англ./Под ред. Веденова А. А.— М.: Мир, 1971.
20. *Гетманцев Г. Г.*— ДАН СССР, 1952, т. 83, с. 557.
21. *Разин В. А.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1960, т. 3, с. 584, 594.
22. *Каплан С. А., Трахтенгерц В. Ю.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1967, т. 10, с. 14.
23. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Статистическая физика.— М.: Наука, 1976, ч. 1.
24. *Гинзбург В. Л., Сыроватский С. И.*— УФН, 1965, т. 87, с. 65.
25. *Джеффрис Г., Свирлс Б.* Методы математической физики: Пер. с англ./ Под ред. Жаркова В. Н.— М.: Мир, 1970, вып. 3.
26. *Эйдман В. Я.*— ЖЭТФ, 1958, т. 34, с. 131; 1959, т. 36, с. 1335.
27. *Железняков В. В.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1964, т. 7, с. 67.
28. *Цытович В. Н.* Нелинейные эффекты в плазме.— М.: Наука, 1967.
29. *Железняков В. В.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1959, т. 2, с. 14.
30. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Квантовая механика. М.: Наука, 1974.
31. *Гершман Б. Н.*— ЖТФ, 1960, т. 38, с. 912.
32. *Степанов К. Н.*— ЖЭТФ, 1958, т. 35, с. 283.
33. *Альбер Л. И., Кротова З. Н., Эйдман В. Я.*— Астрофизика, 1975, т. 11, с. 283.

К главе 8

1. *Гинзбург В. Л.* Теоретическая физика и астрофизика.— М.: Наука, 1975.
2. *Железняков В. В.* Электромагнитные волны в космической плазме.— М.: Наука, 1977.
3. *Манчестер Р., Тейлор Дж.* Пульсары: Пер. с англ./Под ред. Кузьмина А. Д.— М.: Мир, 1980.
4. *Каплан С. А., Цытович В. Н.* Плазменная астрофизика.— М.: Наука, 1972.
5. *Зельдович Я. Б., Новиков И. О.* Теория тяготения и эволюция звезд.— М.: Наука, 1971.
6. На переднем крае астрофизики/Под ред. Эвретта Ю: Пер. с англ./Под ред. Иванова В. В.— М.: Мир, 1979.
7. *Железняков В. В.* Радиоизлучение Солнца и планет.— М.: Наука, 1964.
8. *Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И.* Введение в статистическую радиофизику.— М.: Наука, 1978, ч. 2. Случайные поля.

9. *Татарский В. И.* Распространение волн в турбулентной атмосфере.— М.: Наука, 1967.
10. *Исимару А.* Распространение и рассеяние волн в случайно неоднородных средах: Пер. с англ.— М.: Мир, 1981.
11. *Ерухимов Л. М.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1974, т. 17, с. 75.
12. *Долин Л. С.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1968, т. 11, с. 840.
13. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М. Наука, 1971.
14. *Ginzburg V. L., Eroukhimov L. M.*— Astrophys. and Space Sci., 1971, v. 11, p. 362.
15. *Ерухимов Л. М., Зарницына И. Г., Кирш П. И.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1973, т. 16, с. 573.
16. *Ефимов А. И., Яковлев О. И., Разманов В. М.* и др.— Космические исследования, 1978. т. 16, с. 419.
17. *Писарева В. В.*— Астрономический журн., 1958, т. 35, с. 112.
18. *Альбер Я. И., Ерухимов Л. М., Рыжов В. А., Урядов В. П.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1968, т. 11, с. 1371.
19. *Шишов В. И.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1968, т. 11, с. 866.
20. *Бункин В. Ф., Гочелашвили К. С., Прохоров А. М., Шишов В. И.*— УФН, 1974, т. 114, с. 415.
21. *Якушкин И. Г.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1974, т. 17, с. 1350.
22. *Лотова Н. А.*— УФН, 1968, т. 95, с. 293.
23. *Кадомцев Б. Б.* Коллективные явления в плазме.— М.: Наука, 1976.
24. *Гинзбург В. Л.* Распространение электромагнитных волн в плазме.— М.: Наука, 1967.
25. Электродинамика плазмы/Под ред. Ахиезера А. И.— М.: Наука, 1974.
26. *Gurnett D. A., Frank L. A.*— J. Geophys. Res., 1978, v. A83, p. 58.
27. *Галеев А. А., Сагдеев Р. З.*— В кн.: Вопросы теории плазмы/Под ред. Леонтовича М. А.— М.: Атомиздат, 1973, вып. 7, с. 3.
28. *Генкин Л. Г., Ерухимов Л. М.*— Геомагнетизм и аэрономия, 1983, т. 23, с. 15.
29. *Kennel C. F., Scarf F. L.*— J. Geophys. Res., 1968, v. 73, p. 6149.
30. *Schwartz S. J.*— Rev. Geophys. Space Phys., 1980, v. 18, p. 313.
31. *Dobrowolny M., Moreno G.*— Space Sci. Rev., 1977, v. 20, p. 577.
32. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики: Пер. с англ./Под ред. Мотулевич Г. П.— М.: Наука, 1973.
33. *Кравцов Ю. А.*— Докл. АН СССР, 1968, т. 183, с. 74.
34. *Ерухимов Л. М., Кирш П. И.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1973, т. 16, с. 1783.
35. *Гинзбург В. Л., Писарева В. В.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1963, т. 6, с. 877.
36. *Денисов Н. Г.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1960, т. 3, с. 393, 619.
37. *Тамойкин В. В., Замек И. Г.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1974, т. 17, с. 31.
38. *Krüger A.* Introduction to Solar Radio Astronomy and Radio Physics.— Dordrecht (Holland): D. Reidel Publishing Company, 1979.
39. *Железняков В. В.*— Астрономический журн., 1963, т. 40, с. 829.
40. *Злотник Е. Я.*— Астрономический журн., 1968, т. 45, с. 310, 585.
41. *Zheleznyakov V. V., Zlotnik E. Ya.*— Solar Phys., 1971, v. 20, p. 85.
42. *Zheleznyakov V. V., Zlotnik E. Ya.*— Solar Phys., 1975, v. 43, p. 431; v. 44, p. 447, 461.
43. *Зайцев В. В.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1977, т. 9, с. 1379.
44. *Фомичев В. В., Черток И. М.*— Там же, с. 1255.
45. *Zaitsev V. V., Mityakov N. A., Rapoport V. O.*— Solar Phys., 1972, v. 24, p. 444.
46. *Шкловский И. С.* Сверхновые звезды.— М.: Наука, 1976.
47. *Гинзбург В. Л.*— УФН, 1981, т. 134, с. 469.
48. *Разин В. А.*— Астрономический журн., 1958, т. 35, с. 241.
49. *Гинзбург В. Л.*— УФН, 1953, т. 51, с. 343.
50. *Разин В. А.*— Радиотехника и электроника, 1956, т. 1, с. 846.
51. *Каплан С. А., Пикельнер С. Б.* Физика межзвездной среды.— М.: Наука, 1979.

52. *Slysh V. I.*— Nature, 1963, v. 199, p. 682.
53. *Dent W. A., Haddock F.*— Astrophys. J., 1966, v. 144, p. 568.
54. *Железняков В. В., Шапошников В. Б.*— В кн.: Исследования по геомагнетизму, аэрономии и физике Солнца.— М.: Наука, 1979, вып. 48, с. 67.
55. *Trümper J.* e. a.— Astrophys. J., 1978, v. 219, p. L105.
56. *Железняков В. В.*— В кн.: Итоги науки и техники. Сер. Астрономия/Под ред. Р. А. Сюняева.— М.: Наука, 1983, т. 22, с. 13.
57. *Gnedin Yu. N., Sunyaev R. A.*— Astron. Astrophys., 1974, v. 36, p. 379.
58. *Ерухимов Л. М.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1972, т. 15, с. 768.
59. *Шишов В. И.*— Астрономический журн., 1973, т. 50, с. 941.

К главе 9

1. *Гершман Б. Н.* Динамика ионосферной плазмы.— М.: Наука, 1974.
2. *Альперт Я. Л.* Распространение электромагнитных волн и ионосфера.— М.: Наука, 1972.
3. *Девис К.* Радиоволны в ионосфере: Пер. с англ./Под ред. А. А. Корчака.— М.: Мир, 1973.
4. *Гершман Б. Н., Игнатьев Ю. А., Каменецкая Г. Х.* Механизмы образования ионосферного спорадического слоя E_s на различных широтах.— М.: Наука, 1976.
5. *Гуревич А. В., Цедилина Е. Е.* Сверхдальнее распространение коротких радиоволн.— М.: Наука, 1979.
6. *Гинзбург В. Л.* Распространение электромагнитных волн в плазме.— М.: Наука, 1967.
7. *Гершман Б. Н., Угаров В. А.*— УФН, 1960, т. 72, с. 236.
8. *Helliwell R. A.* Whistlelr and Related Ionospheric Phenomena.— Stanford Univ. Press, 1965.
9. *Wail J. R.* Electromagnetic Waves in the Stratified Media.— Cambridge Univ. Press, 1961.
10. *Storey L. R. O.*— Phil. Trans. Roy. Soc. London, 1953, v. 246A, p. 113.
11. *Альперт Я. Л.* Волны и искусственные тела в приземной плазме.— М.: Наука, 1974.
12. *Гершман Б. Н., Трахтенгерц В. Ю.*— УФН, 1966, т. 89, с. 201.
13. *Smith R. L., Angenami J. J.*— J. Geophys. Res., 1968, v. 73, p. 1.
14. *Пудовкин М. И., Распопов О. М., Клейменова Н. Г.* Возмущения электромагнитного поля Земли.— Л.: Изд-во ЛГУ, 1976.
15. *Гульельми А. В., Троицкая В. А.* Геомагнитные пульсации и диагностика магнитосферы.— М.: Наука, 1973.

К главе 10

1. *Цытович В. Н.* Нелинейные эффекты в плазме.— М.: Наука, 1967.
2. *Гапонов А. В., Миллер М. А.*— ЖЭТФ, 1958, т. 34, с. 242.
3. *Гинзбург В. Л.* Распространение электромагнитных волн в плазме.— М.: Наука, 1967.
4. *Гуревич А. В., Шварцбург А. Б.* Нелинейная теория распространения радиоволн в ионосфере.— М.: Наука, 1973.
5. *Геккер И. Р.* Взаимодействие сильных электромагнитных полей с плазмой.— М.: Атомиздат, 1978.
6. *Силин В. П.* Параметрическое воздействие излучения большой мощности на плазму.— М.: Наука, 1973.
7. *Васьков В. В., Милих Г. М.*— Геомагн. и аэрон., 1983, т. 23, с. 196.
8. *Митяков Н. А., Рапопорт В. О., Трахтенгерц В. Ю.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1975, т. 18, с. 27.
9. *Гуревич А. В., Питаевский Л. П.*— ЖЭТФ, 1963, т. 15, с. 1241.
10. *Гетманцев Г. Г., Зуйков Н. А., Котик Д. С. и др.*— Письма в ЖЭТФ, 1974, т. 20, с. 229.
11. *Капустин И. Н., Перцовский Р. А., Васильев А. Н. и др.*— Письма в ЖЭТФ, 1977, т. 25, с. 248.
12. *Котик Д. С., Трахтенгерц В. Ю.*— Письма в ЖЭТФ, 1975, т. 21, с. 114.

13. *Беликович В. В., Бенедиктов Е. А., Гетманцев Г. Г. и др.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1971, т. 20, с. 1821; 1972, т. 21, с. 1418.
14. *Виленский И. М., Ямпольский В. С.* Распространение средних радиоволн в ионосфере.— Новосибирск: Наука, 1982.
15. *Толмачева А. В.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1980, т. 23, с. 278.
16. *Блиох П. В., Брюховецкий А. С.*— Геомагнетизм и аэрономия, 1969, т. 9, с. 545.
17. *Гинзбург В. Л., Рухадзе А. А.* Волны в магнитоактивной плазме.— М.: Наука, 1970.
18. *Александров А. Ф., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А.* Основы электродинамики плазмы.— М.: Высшая школа, 1978.
19. *Васьков В. В., Гетманцев Г. Г. и др.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1975, т. 18, с. 1426.
20. *Carlson H. C., Dunkan L. M.*— Radio Sci., 1973, v. 8, p. 1001.
21. *Showen R. L., Kim D. M.*— J. Geophys. Res., 1978, v. A83, p. 623.
22. *Ерухимов Л. М., Метелев С. А., Митяков Н. А., Фролов В. Л.*— Изв. вузов.— Радиофизика, 1982, т. 25, с. 490.
23. *Силин В. П.*— ЖЭТФ, 1965, т. 48, с. 1679.
24. *Альбер Я. И., Кротова З. Н., Митяков Н. А. и др.*— ЖЭТФ, 1974, т. 66, с. 574.
25. *Грач С. М., Митяков Н. А., Рапопорт В. О., Трахтенгерц В. Ю.*— В кн.: Тепловые нелинейные явления в плазме/Под ред. В. Ю. Трахтенгерца.— Горький: ИПФ АН СССР, 1979, с. 46.
26. *Васьков В. В., Гуревич А. В.*— Там же, с. 81.
27. *Литвак А. Г., Миронов В. А.*— Там же, с. 191.
28. *Грач С. М., Трахтенгерц В. Ю.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1975, т. 18, с. 1288.
29. *Литвак А. Г.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1968, т. 11, с. 1433.
30. *Абрамович Б. С.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1976, т. 19, с. 329.
31. *Васьков В. В., Гуревич А. В.*— Письма в ЖЭТФ, 1974, т. 20, с. 214; Изв. вузов. Радиофизика, 1975, т. 18, с. 1261.
32. *Perkins F. W., Valco E. J.*— Phys. Rev. Let., 1974, v. 32, p. 1234.
33. *Адейшвили Т. Г., Гуревич А. В., Ляхов С. Б. и др.*— Физика плазмы, 1978, т. 4, с. 1293.
34. *Ерухимов Л. М., Метелев С. А., Митякова Э. Е. и др.*— В кн.: Тепловые нелинейные явления в плазме/Под ред. В. Ю. Трахтенгерца.— Горький: ИПФ АН СССР, 1979, с. 7.
35. Radio Sci., Special issue, 1974, v. 9, № 11, p. 885—1090.

К главе 11

1. *Гинзбург В. Л.* Распространение электромагнитных волн в плазме.— М.: Наука, 1967.
2. *Альперт Я. Л.* Распространение электромагнитных волн и ионосфера.— М.: Наука, 1972.
3. *Магуура И., Ондо Т.*— Труды ИИЭР, 1969, т. 57, с. 326.
4. *Гершман Б. Н., Крупина А. Е., Яшин Ю. Я.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1973, т. 16, с. 981; 1974, т. 17, с. 1469.
5. *Поляков В. М., Щепкин Л. А., Казимировский Э. С., Кокоуров В. Д.* Ионосферные процессы.— Новосибирск: Наука, Сибирск. отд-ние, 1968.
6. *Алимов В. А., Ерухимов Л. М., Пыркова Т. Н.*— Геомагнетизм и аэрономия, 1971, т. 11, с. 790.
7. *Денисов Н. Г., Ерухимов Л. М.*— Геомагнетизм и аэрономия, 1966, т. 6, с. 695.
8. *Рытов С. М., Кравцов Ю. А., Татарский В. И.* Введение в статистическую радиофизику.— М.: Наука, 1978, ч. 2. Случайные поля.
9. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений.— М.: Наука, 1971.
10. *Гайлит Т. А., Гусев В. Д., Ерухимов Л. М., Шпиро П. И.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1983, т. 26, с. 795.
11. *Ерухимов Л. М., Митяков Н. А.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1964, т. 7, с. 556.

12. *Виткевич В. В.*— ДАН СССР, 1951, т. 77, с. 585; т. 101, с. 429.
13. *Алимов В. А., Гетманцев Г. Г., Ерухимов Л. М. и др.*— Геомагнетизм и аэрономия, 1970, т. 10, с. 28.
14. *Гетманцев Г. Г., Грингауз К. И., Ерухимов Л. М. и др.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1968, т. 11, с. 649.
15. *Митякова Э. Е., Митяков Н. А., Рапопорт В. О.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1960, т. 3, с. 949.
16. *Манчестер Р., Тейлор Дж.* Пульсары: Пер. с англ./Под ред. Кузьмина А. Д.— М.: Мир, 1980.
17. *Митякова Э. Е.*— Геомагн. и аэрон., 1964, т. 4, с. 816.
18. *Garner F. F., Morris D., Whiteoak J. B.*— Austral J. Phys., 1969, v. 22, p. 813.
19. *Разин В. А., Хрулев В. В., Федоров В. Т. и др.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1968, т. 11, с. 1461.
20. *Дэвис К.* Радиоволны в ионосфере: Пер. с англ./Под ред. Корчака А. А.— М.: Мир, 1973.
21. *Ерухимов Л. М., Максименко О. И.*— В кн.: Полярная ионосфера и магнитосферно-ионосферные связи/Под ред. Распопова О. М.— Апатиты: Кол. фил. АН СССР, 1978, с. 189.
22. *Ерухимов Л. М., Косолапенко В. И.. Лернер А. М., Мясников Е. Н.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1981, т. 24, с. 524.
23. *Getmantsev G. G., Eroukhimov L. M.*— Solar Terr. Phys., 1969, v. 5, p. 13.
24. *Миркотан С. Ф., Кушнеревский Ю. В.* Неоднородная структура и движения в ионосфере.— М.: Наука, 1964.
25. *Казимировский Э. С., Кокоуров В. Д.* Движения в ионосфере.— Новосибирск: Наука. Сибирск. отд-ние, 1979.
26. *Гусев В. Д.*— Вестник МГУ. Сер. физ.-матем., 1959, № 6.
27. *Авакян С. В., Дробжев В. И., Краснов В. М.* Волны и излучение верхней атмосферы.— Алма-Ата: Наука, Каз.ССР, 1981.
28. *Pramesh Rao A.* e. a.— Austral. J. Phys., 1974, v. 27, p. 105.
29. *Ерухимов Л. М., Писарева В. В.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1969, т. 12, с. 900.
30. *Ерухимов Л. М., Метелев С. А., Митякова Э. Е. и др.*— В кн.: Тепловые нелинейные явления в плазме/Под ред. В. Ю. Трахтенгерца.— Горький: ИПФ АН СССР, 1979, с. 7.
31. *Belrose J. S., Burre M. J.*— J. Geophys. Res., 1964, v. 69, p. 2799.
32. *Бенедиктов Е. А., Гришкевич Л. В., Иванов В. А., Комраков Г. П.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1971, т. 14, с. 1452.
33. *Gordon W. E.*— Proc. IRE, 1958, v. 46, p. 1824.
34. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Статистическая физика.— М.: Наука, 1976, ч. 1.
35. *Александров А. Ф., Богданкевич Л. С., Рухадзе А. А.* Основы электродинамики плазмы.— М.: Высшая школа, 1978.
36. *Clark W. L. e. a.*— Proc. IEEE, 1969, v. 57, p. 493.
37. Radio Sci., Special issue, 1974, v. 9, № 11, p. 885—1090.
38. *Брюнелли В. Е., Кочкин Н. И.* Метод некогерентного рассеяния радиоволн.— Ленинград: Наука, Ленингр. отд-ние, 1979.
39. *Беликович В. В., Бенедиктов Е. А., Дмитриев С. А., Терина Г. И.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1981, т. 24, с. 905.
40. *Бенедиктов Е. А., Гришкевич Л. В., Иванов В. А.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1972, т. 15, с. 695.
41. *Бенедиктов Е. А., Гришкевич Л. В., Иванов В .А., Игнатьев Ю. А.*— Изв. вузов. Радиофизика, 1974, т. 17, с. 798.
42. *Эванс Дж. В.*— ТИИЭР, 1969, т. 57, с. 139.

ВОЛНОВЫЕ ЯВЛЕНИЯ В ИОНОСФЕРЕ
И КОСМИЧЕСКОЙ ПЛАЗМЕ